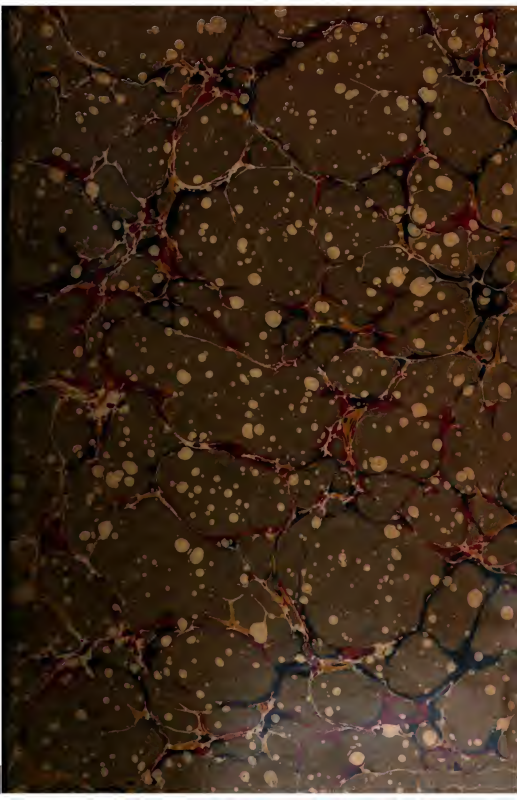


Annalen der Physik

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class



1903.

Nr. 5.

MAY 16 1903

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 11. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 310, BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1903.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 38 M.

Schlaggedruck am 16. April 1903.

Inhalt.

1.	<u>A. Eichenwald. Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. (Hierzu Taf. I.)</u>	1
2.	<u>Franz Lindig. Über die verstimmte Oktave bei Stimmgabeln und über Asymmetrieföne</u>	31
3.	<u>G. Quincke. V. Oberflächenspannung und Zellenbildung bei Leimtauanfösungen</u>	54
4.	<u>Emil Kohl. Über ein Integral der Gleichungen für die Wellenbewegung, welches dem Dopplerschen Prinzip entspricht</u>	90
5.	<u>W. Schmidt. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen mit elektrischen Wellen. (II. Abhandlung.)</u>	114
6.	<u>K. Mey. Über das Kathodengefälle der Alkalimetalle</u>	127
7.	<u>A. Wassmuth. Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten</u>	146
8.	<u>P. Hermesdorf. Über Messungen im Bandenspektrum des Stickstoffs</u>	161
9.	<u>A. Einstein. Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik</u>	170
10.	<u>G. Angenheister. Beiträge zur Kenntnis von der Elastizität der Metalle</u>	188
11.	<u>Ewald Raach. Gasentladungen an elektrolytischen Glühkörpern</u>	202
12.	<u>G. Bakker. Gravitation und Kapillarität</u>	207
13.	<u>G. Bredig. Über die Heterogenität der kolloidalen Sole. (Antwort an die Herren G. Quincke und D. Konowalow)</u>	218
14.	<u>V. Gabritschewski und A. Batschinski. Die sprechende Flamme</u>	223
15.	<u>Joh. Mathieu. Berichtigung zu meiner Arbeit „Über die Kapillarität der Lösungen“</u>	224



Die neue Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie,

deren erste Nummer diesem Annalenheft beiliegt, wird gefälliger Beachtung empfohlen.

Die Zeitschrift wird unter besonderer Mitwirkung von Professor H. Kayser in Bonn herausgegeben von Dr. Englisch-Stuttgart und Dr. Schaum-Marburg und soll neben der eigentlichen wissenschaftlichen Photographie alle Erscheinungen, die mit der Physik und Chemie der Strahlung zusammenhängen, ganz besonders aber die Spektroskopie, in den Bereich ihrer Betrachtung ziehen. Abonnementspreis für den aus 12 Heften bestehenden Band 20 Mark.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 11.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN;

VIERTE FOLGE.

BAND 11.

DER GANZEN REIHE 316. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT SECHS FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1903.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Inhalt.

Vierte Folge. Band 11.

Fünftes Heft.

	Seite
1. A. Eichenwald. Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. (Hierzu Taf. I.)	1
2. Franz Lindig. Über die verstimmte Oktave bei Stimmgabeln und über Asymmetrietöne	31
3. G. Quincke. V. Oberflächenspannung und Zellenbildung bei Leimtannatlösungen	54
4. Emil Kohl. Über ein Integral der Gleichungen für die Wellenbewegung, welches dem Dopplerschen Prinzip entspricht	96
5. W. Schmidt. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen mit elektrischen Wellen. (II. Abhandlung.)	114
6. K. Mey. Über das Kathodengefälle der Alkalimetalle	127
7. A. Wassmuth. Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten	146
8. P. Hermesdorf. Über Messungen im Bandenspektrum des Stickstoffs	161
9. A. Einstein. Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik	170
10. G. Angenheister. Beiträge zur Kenntnis von der Elastizität der Metalle	188
11. Ewald Rasch. Gasentladungen an elektrolytischen Glühkörpern	202
12. G. Bakker. Gravitation und Kapillarität	207
13. G. Bredig. Über die Heterogenität der kolloidalen Sole. (Antwort an die Herren G. Quincke und D. Konowalow)	218
14. V. Gabritschewski und A. Batschinski. Die sprechende Flamme	223
15. Joh. Mathieu. Berichtigung zu meiner Arbeit „Über die Kapillarität der Lösungen“	224

Ausgegeben am 16. April 1903.

Sechstes Heft.

1. Alfred Kalähne. Schallgeschwindigkeit und Verhältnis der spezifischen Wärmen der Luft bei hoher Temperatur	225
2. Alfred Kalähne. Notiz über elektrische Widerstandsöfen	237

	Seite
3. A. H. Bucherer. Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes	270
4. Paul Nordmeyer. Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Verteilung der Intensität der Licht- und Wärmestrahlung . . .	284
5. Walther Schwarze. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Argon und Helium nach der Methode von Schleiermacher . . .	303
6. J. Müller. Über Schallgeschwindigkeit in Röhren	331
7. J. Wallot. Die Verwendung des Keilkompensators von Arago zur Messung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten . . .	355
8. A. Korn und E. Strauss. Über die Strahlungen des radioaktiven Bleis	397
9. W. Altberg. Über die Druckkräfte der Schallwellen und die absolute Messung der Schallintensität	405
10. A. Eichenwald. Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde	421
11. Peter Lebedew. Über eine Abänderung des Rowland-Gilbertschen Versuchs	442
12. Hans Januschke. Über den Energieumsatz in der Mechanik . . .	445

Ausgegeben am 14. Mai 1903.

Siebentes Heft.

1. G. Quincke. VI. Niederschlagsmembranen und Zellen in Gallerten oder Lösungen von Leim, Eiweiß und Stärke	449
2. Felix Ehrenhaft. Das optische Verhalten der Metallkolloide und deren Teilchengröße	489
3. Emil Kohl. Über das dem Dopplerschen Prinzip entsprechende Integral der Gleichungen für die Wellenbewegung . . .	515
4. Gottlieb Kučera. Zur Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber. (Hierzu Taf. II u. III.)	529
5. A. Pflüger. Das Absorptionsvermögen einiger Gläser im photographisch wirksamsten Teile des Spektrums	561
6. J. Kiessling und B. Walter. Über die elektrische Durchbohrung eines festen eines Dielektrikums	570
7. E. Dorn. Bemerkung über die elektromagnetischen Rotationsapparate	589
8. J. Wallot. Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der Salzlösungen von der Konzentration	593
9. J. Wallot. Über die von Beer und Landolt gewählte Form des spezifischen Brechungsvermögens	605
10. H. du Bois. Zur Frage der störungsfreien Magnetometer . . .	609
11. Julius Tafel. Über die Wirkung von Kanalstrahlen auf Zinkoxyd	613

	Seite
12. A. Wöllner und Max Wien. Über die Änderung der Dielektrizitätskonstante des Glases mit dem Druck	619
13. P. Lenard. Über den elektrischen Bogen und die Spektren der Metalle	636
14. F. Pockels. Bemerkungen zu meiner Abhandlung „Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation“	651
15. Wilhelm Volkmann. Kleine Neuerungen an der Ablesung mit Spiegel und Fernrohr	654
16. F. Himstedt. Bemerkung zu der Mitteilung: „Die sprechende Flamme; von V. Gabritschewski und A. Batschinski“	656

Ausgegeben am 4. Juni 1903.

Achstes Heft.

a.

1. Gustav Mie. Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper	657
2. Gottlieb Kučera. Zur Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber	698
3. F. Pockels. Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen	726
4. Philip Ely Robinson. Der elektrische Widerstand loser Kontakte und Resonanzversuche mit dem Kohärer	754
5. Richard Gans. Über Volumenänderung von Gasen durch dielektrische Polarisation	797
6. Max Seddig. Darstellung des Verlaufes der elektrischen Kraftlinien, und insbesondere ihrer Richtungsänderungen durch Dielektrika. (Hierzu Taf. IV.)	815
7. W. König. Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung. (Hierzu Taf. V.)	842
8. J. Zenneck. Nachtrag zu meiner Arbeit über die „Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern“	867
9. Ernst Ruhmer. Bemerkung zur Notiz der Herren V. Gabritschewski und A. Batschinski über die sprechende Flamme	872
Berichtigungen zur Arbeit Eichenwald	872

Ausgegeben am 22. Juni 1903.

b.

1. E. Hagen und H. Rubens. Über Beziehungen des Reflexions- und Emissionsvermögens der Metalle zu ihrem elektrischen Leitvermögen	873
2. Jean Billitzer. Elektrische Doppelschicht und absolutes Potential. Kontaktelektrische Studien I.	902

	Seite
3. Jean Billitzer. Über die Elektrizitätserregung durch die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten. Kontaktelektrische Studien II.	987
4. P. Drude. Elektrische Eigenschaften und Eigenschwingungen von Drahtspulen mit angehängten geraden Drähten oder Metallplatten	957
5. Fritz Thaler. Die diffuse Reflexion des Lichtes an matten Oberflächen. (Hierzu Taf. VI.)	996
6. Georg Kuntze. Ein Beitrag zur Festigkeitslehre	1020
7. Robert Weber. Wärmeleitung in Flüssigkeiten	1047
8. G. Jäger. Das Maxwell'sche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Moleküle in Gasen und Flüssigkeiten . .	1071
9. Moritz Weerth. Über Lamellentöne	1088
10. G. Quincke. VII. Die Bedeutung der Oberflächenspannung für die Photographie mit Bromsilbergelatine und eine neue Wirkung des Lichtes	1100
11. J. Zenneck. Die Energieverhältnisse in oszillatorischen magnetischen Kreisen	1121
12. J. Zenneck. Elektrischer und magnetischer Widerstand bei Schwingungen	1135
13. Carl Barns. Bemerkungen über die Schmidtsche Theorie der Phosphoremanation	1142
Berichtigungen zur Arbeit W. Schwarze	1144

Ausgegeben am 7. Juli 1903.

Nachweis zu den Figurentafeln.

- Tafel I. Eichenwald, Fig. 1.
 „ II u. III. Kučera
 „ IV. Seddig, Figg. 1—9.
 „ V. König, Figg. 1—5.
 „ VI. Thaler.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 11.

**1. Über die magnetischen Wirkungen
bewegter Körper im elektrostatischen Felde;
von A. Eichenwald.**

(Hierzu Taf. I, Fig. 1.)

Die elektromagnetischen Erscheinungen, welche bei der Bewegung der Körper eintreten, sind experimentell viel untersucht worden in den Fällen, wo diese Bewegung im magnetischen Felde stattfindet. Über bewegte Körper in einem elektrostatischen Felde haben wir verhältnismäßig noch sehr wenig Erfahrung. Deshalb habe ich es unternommen, diese letzte Klasse von Erscheinungen, hauptsächlich aber die dabei eintretenden magnetischen Wirkungen, unter möglichst variierten Versuchsbedingungen, experimentell zu studieren.

Der Natur der Sache entsprechend, will ich die Bewegung der Leiter und Dielektrika gesondert behandeln.

I. Bewegte Leiter.

1. Wenn sich Leiter in einem elektrostatischen Felde bewegen, so wird dabei auch die auf ihrer Oberfläche verteilte Ladung mitbewegt; es entsteht sogenannte „elektrische Konvektion“, deren magnetische Wirkung bekanntlich von Rowland¹⁾ zum ersten Male nachgewiesen worden ist. Seine Versuche wurden von Röntgen²⁾ und Himstedt³⁾ wiederholt und bestätigt. Himstedt hat zwar nur relative Messungen

1) H. A. Rowland, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 211. 1876.

2) W. C. Röntgen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 198. 1885.

3) F. Himstedt, Wied. Ann. 38. p. 560. 1889.

gemacht, konnte aber die Proportionalität der magnetischen Wirkung mit der Geschwindigkeit und Dichtigkeit der bewegten Ladung in ziemlich weiten Grenzen prüfen. Endlich haben Rowland und Hutchinson¹⁾ aus den Beobachtungen der magnetischen Wirkung des konvektiven Stromes das Verhältnis der elektrostatischen zu den elektromagnetischen Einheiten berechnet und bekamen einen Wert für das V , welches zwischen $2,26 \cdot 10^{10}$ und $3,78 \cdot 10^{10}$ lag; als Mittelwert aus zwanzig Versuchsreihen ist $3,19 \cdot 10^{10}$ angegeben.

Fast zu derselben Zeit, als ich über einige meiner Versuche knrz berichtet habe²⁾, erschien eine schöne und sorgfältig unter der Leitung von H. Rowland selbst ausgeführte Arbeit von H. Pender³⁾, in welcher gezeigt wird, daß eine gleichmäßig bewegte, aber veränderliche elektrische Ladung dieselben Induktionswirkungen ausüben kann, wie ein veränderlicher elektrischer Strom; auch in quantitativer Hinsicht ist die Übereinstimmung eine sehr gute (V liegt zwischen $2,75 \cdot 10^{10}$ und $3,23 \cdot 10^{10}$; Mittelwert $V = 3,05 \cdot 10^{10}$). Weiter hat E. Adams⁴⁾ die magnetische Wirkung bei der Bewegung von geladenen Kugeln beobachtet; hier ist die Übereinstimmung mit der Theorie weniger gut, auch die Versuchsanordnung ist nicht ganz einwandfrei, denn die Kapazität der Kugeln bleibt während der Bewegung nicht konstant. Endlich ist soeben eine zweite Arbeit von H. Pender⁵⁾ erschienen, wo die Genauigkeit der Übereinstimmung der Theorie mit dem Versuche eine noch größere ist; die aus den Versuchen berechnete Lichtgeschwindigkeit liegt zwischen $2,92 \cdot 10^{10}$ und $3,04 \cdot 10^{10}$ und als Mittelwert wird $3,00 \cdot 10^{10}$ angegeben. Dabei variierte die Tourenzahl von 10—102 Umdrehungen in der Sekunde, die Potentialdifferenz von 905—6275 Volts. H. Pender hat auch den Rowlandschen Versuch in seiner ersten Form mit einer horizontalen rotierenden Scheibe mit leitenden Sektoren wiederholt und direkt die Ablenkungen der über die Scheibe

1) H. A. Rowland u. C. T. Hutchinson, Phil. Mag. (5) 27. p. 445. 1889.

2) A. Eichenwald, Physik. Zeitschr. 2. p. 703. 1901.

3) H. Pender, Phil. Mag. (6) 2. p. 179. 1901.

4) E. P. Adams, Phil. Mag. (6) 2. p. 285. 1901.

5) H. Pender, Phil. Mag. (6) 5. p. 34. 1903.

hängenden Nadel beobachtet. Die beobachtete Ablenkung war 47,9; die Rechnung ergab 56,0. Wir können also sagen, daß jetzt die magnetische Wirkung konvektiv bewegter Ladung schon von mehreren Beobachtern bestätigt¹⁾ worden ist.

Einige von den hier angeführten Versuchen sind also nur als Wiederholungen anzusehen, die mir aber nicht überflüssig schienen, erstens wegen der Wichtigkeit der ganzen Frage und zweitens deshalb, weil alle meine Versuche nach einem einheitlichen Plane ausgeführt worden sind und so in einem gewissen Zusammenhange zueinander stehen. Außerdem muß ich zufügen, daß man in der Litteratur über die Erscheinungen der elektrischen Konvektion zum Teil unrichtige oder wenigstens unklare Ansichten treffen kann, weshalb ich mir erlaube diese Frage eingehender zu behandeln.

2. Bei der Untersuchung des Rowlandeffektes kann man zwei wesentlich verschiedene Methoden benutzen. Bei der einen beobachtet man direkt das magnetische Feld, welches von einer gleichförmig bewegten Ladung erzeugt wird; diese Methode ist von H. Rowland selbst und fast von allen anderen Beobachtern benützt. Bei der zweiten von H. Pender gewählten Methode²⁾, werden die Induktionsströme beobachtet, welche bei der Veränderung des magnetischen Feldes einer mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten, aber mit der Zeit veränderlichen Ladung erzeugt werden.

Die zweite Methode mag verschiedene Vorteile in Bezug auf Bequemlichkeit der Beobachtung darbieten, ich glaube dennoch der ersten den Vorzug gehen zu dürfen, erstens weil

1) Was das Mißlingen dieser Versuche bei V. Crémieu anbetrifft, so muß das offenbar irgend einem Versuchsfehler zugeschrieben werden, welchen hoffentlich Hr. V. Crémieu selbst mit der Zeit auffinden wird. Wenn man bedenkt, wie schwer es manchmal ist, einen Versuchsfehler bei seinen eigenen Versuchen zu finden, so wird man zugeben, daß es noch schwerer ist, solche Fehler nur nach der Beschreibung der Versuche anderer anzuzeigen. Alles, was man in solchen Fällen tun kann, ist, die möglichen Fehlerquellen anzugeben, ohne aber überzeugt zu sein, daß gerade diese und nicht noch andere Fehler bei Hrn. V. Crémieu im Spiele waren.

2) Die Methode ist von V. Crémien, *Compt. rend.* 131. p. 797. 1900.

das eine direkte Methode ist und zweitens weil wir dabei nur statische Felder benutzen, was für den Vergleich mit der Theorie von Wichtigkeit ist. Bei H. Rowland wird nämlich ein Leiter in einem elektrostatischen Felde mit unveränderlicher Geschwindigkeit bewegt und es entsteht wieder ein statisches magnetisches Feld. Keine Energieumsetzungen finden bei dieser Bewegung statt. Ich will solche Fälle „*reine elektrische Konvektion*“ nennen. Im allgemeinen aber fügen sich bei der Bewegung geladener Körper zu dieser reinen elektrischen Konvektion noch elektrische Ströme in den Leitern und sogenannte Verschiebungsströme in den Dielektrika. Jeder von diesen drei Strömen erzeugt ein magnetisches Feld und in den beiden letzten wird die Energie in Joulesche Wärme und Strahlung verwandelt. Im folgenden soll hauptsächlich nur die magnetische Wirkung der reinen elektrischen Konvektion untersucht werden, aber auch andere Fälle werden kurz behandelt.

Die Apparate.

3. In der Fig. 1, Taf. I, ist eine genaue Zeichnung des Apparates gegeben, welchen ich bei den definitiven Versuchen benutzte.¹⁾

Zwei solide Stützen G_1 und G_2 aus gegossenem Messing sind mit je vier Bolzen an einer 8 mm dicken Messingplatte XX befestigt. Die eine von den Stützen G_1 kann in verschiedenen Entfernungen von der anderen festgeschraubt werden. An diesen Stützen sind oben die mit Weißmetall ausgefüllten Achsenlager H und die Schmiervorrichtung J (Vaselinfett) angebracht.

Die Achsen KL habe ich früher aus Stabilit (Isolationsmaterial) angefertigt, sie erlaubten mir aber kein langes Ar-

1) Ich habe meine Vorversuche mit einer einfachen Zentrifugalmaschine angefangen. Der hier beschriebene Apparat ist vom Institutsmechaniker Th. Kotschetow auf das befriedigendste ausgeführt worden und ich will ihm für sein stetiges Entgegenkommen, welches er bei den zahlreichen Umänderungen des Apparates geäußert hat, auch an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

beiten und liefen sich schnell warm, wodurch die Reibung und die Rotation unregelmäßig wurde; Stahlachsen übten eine zu große magnetische Wirkung auf das Magnetometer; am besten bewährten sich 6,5 mm dicke Achsen aus hartem Messing (Tombak). Jede Achse ist an einem Ende mit einer Verdickung und mit einer kleinen Scheibe *L* versehen, an welcher die rotierenden Scheiben *A* und *B* angeschraubt werden; in der Mitte zwischen den Achsenlagern sitzt die Riemenscheibe *O*, an dem anderen Ende der Achse ist ein Gewinde *K* angebracht, welches das Zählrad *P* in Bewegung setzt. Da die Zählräder vom Beobachter nicht gut zu sehen sind, so sind an ihnen an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen zwei kleine Stiftchen *R* angelötet, welche beim Vorbeigehen an den Kontaktfedern *T* einen Strom schließen und einen besonderen, in der Nähe des Beobachters aufgestellten elektromagnetischen Zähler in Bewegung setzen. Es versteht sich von selbst, daß diese verhältnismäßig starken Ströme bei allen Versuchen so angeordnet und mit Rückleitungen versehen waren, daß sie keine Wirkung auf das Magnetometer ausübten.

Der ganze Rotationsapparat ist an einem 70 cm hohen Steinpfeiler, welcher auf dem Gewölbe des Zimmerbodens steht, mit sechs einzementierten Bolzen befestigt. In einer Entfernung von 4 m von dem Pfeiler steht auch auf dem Boden ein Dreiphasenmotor, der vermittelt eines Schnurriemens mit der Riemenscheibe *O* verbunden ist. Der Motor konnte von 4—24 Touren in der Sekunde machen, die Achse des Rotationsapparates machte entsprechend 25—150 Umdrehungen in der Sekunde. Das Ingangsetzen des Motors in der einen oder anderen Richtung konnte vom Platze des Beobachters aus gemacht werden und der Motor, wie alle seine Zuleitungen übten auch keinen Einfluß auf das Magnetometer.

Einen der wichtigsten Teile des Apparates bilden die beiden rotierenden Scheiben *A* und *B*. Bei den großen Geschwindigkeiten, welche bei diesen Versuchen gebraucht werden, ist es unbedingt nötig, die auf der Achse befestigte Scheibe auf das sorgfältigste auszubalancieren, damit ihr Schwerpunkt möglichst genau mit der Rotationsachse zusammenfällt, sonst erhält man starke Erschütterungen des ganzen Apparates und des Zimmerbodens und schnelles Warmlaufen der Achsen-

lager; für denselben Zweck fand ich es besser, so wenig als möglich den Achsen in der Längsverschiebung freien Spielraum zu lassen. Da die Scheiben elektrische Ladungen bei ziemlich hohen Potentialen tragen sollen, so müssen sie auch gut von der Achse isoliert sein. Ich habe Scheiben aus verschiedenem Materiel versucht und am besten für diesen Zweck Mikanitscheiben gefunden. Mikanit isoliert sehr gut auch auf seiner Oberfläche (besser als Glas), läßt sich leicht eben machen, wozu man ihn in Papier eingewickelt zwischen zwei schwere, bis auf etwa 100° erwärmte Gußeisenplatten legt und so langsam kalt werden läßt. Er bleibt auch im Verlauf von mehreren Versnchen schön eben (besser als Hartgummi). Die von mir benutzten Mikanitscheiben hatten im Durchmesser 25 cm und waren 0,6 mm dick. Mir stand Mikanit von 1 mm und von 0,3 mm Dicke zur Verfügung; der erste erwies sich als stark magnetisch, der zweite besaß keine genügende Steifigkeit und ich mußte jede rotierende Scheibe aus zwei Mikanitscheiben von 0,3 mm Dicke bilden, welche sich sehr gut mit Schellack zwischen den oben erwähnten heißen Eisenplatten zusammenkleben ließen. Die Mikanitscheiben sind am Rande mit 1,5 cm breiten Stanniolstreifen beklebt, welche an einer Stelle durch einen radialen, 0,5 mm breiten Schlitz unterbrochen sind. Das eine Ende jedes Streifens *U* ist mit dem an der Achse sitzenden, aber von ihr isolierten Schleifringe mit Bürste *W* leitend verbunden; das andere Ende ist bei der Scheibe *A* dauernd mit der Achse, also mit der Erde verbunden, bei der Scheibe *B* bleibt es frei und kann, indem die Scheiben ruhen, durch eine angelegte Feder auch mit der Erde verbunden sein. Bei der Rotation kann also die Scheibe *B* auf ein gewisses Potential geladen werden, während der Ruhe kann durch jeden Streifen ein galvanischer Strom von bekannter Intensität durchgelassen werden.

Auf die Isolation aller Teile wurde besondere Sorgfalt angewandt und es ließ sich dies durch Paraffin und Hartgummi leicht erreichen, was aber am meisten Schwierigkeiten machte, ist die Beseitigung von kleinen Spitzen, die manchmal gar nicht zu finden waren und dennoch die Beobachtung äußerst störten (vgl. unter § 8, e). Meistenteils gelang es, diese Schwierigkeit zu überwinden, indem man die leitenden Ober-

flächen mit einer sehr dünnen Schicht Paraffin oder Schellack überzog.

Die unbeweglichen Teile des Apparates, wie Scheiben, Schutzringe, Metallhüllen etc. können teils an der Bodenplatte *XX*, teils an zwei an den Stützen angebrachten Messingarmen *Y* festgeschraubt werden.

Die Scheiben rotieren im magnetischen Meridian.

Magnetometer.

4. Um das Magnetsystem möglichst frei von den unvermeidlichen Erschütterungen des Rotationsapparates zu machen, ist das Magnetometer an der Wand befestigt. Zwei Wandkonsolen *aa* sind durch eine Metallplatte *mm* überbrückt, auf welcher die drei Stellschrauben *b* einer vertikalen zylindrischen Metallhülse *c* ruhen. In dieser Metallhülse kann sich eine zweite *d* zusammen mit dem das Magnetsystem enthaltenden Rohr *e* in vertikaler Richtung verschieben lassen. Die Brücke selbst läßt sich auch längs der Konsolen horizontal verschieben und in beliebiger Stellung festklemmen; beide Bewegungen zusammen erlauben dem Magnetsystem verschiedene Stellungen in Bezug auf den Rotationsapparat zu geben. Das Rohr *e* hat einen Durchmesser von 1 cm, eine Wanddicke von 1 mm und ist auf elektrolytischem Wege aus Kupfer hergestellt. Ein Fensterchen von 5×5 mm Öffnung erlaubt die Ablenkungen der Magnetsnadel mittels Spiegel und Skala zu beobachten. Der Trichter *f* schützt das Fensterchen vor elektrostatischen Einflüssen. *NS* ist der Astasierungsmagnet mit einer Schraube *g* zur bequemen Astasierung; eine zweite Schraube *h* ermöglicht, den Astasierungsmagnet um eine vertikale Achse langsam zu drehen.

Das Magnetsystem selbst habe ich in verschiedenen Formen benutzt; für die hier unten angeführten Versuche kommen nur zwei von ihnen in Betracht. Das eine (Fig. 2, *a*) besteht aus sechs dünnen Stahllamellen (Uhrfedern) von 3 mm Länge, welche an einem 15 cm langen Glasfaden angekittet waren. Dieses Magnetsystem wird immer höher als der obere Rand der rotierenden Scheiben angebracht, sodaß die bewegte

Ladung größtenteils nur auf die untere Nadel wirken kann. Das andere (Fig. 2, b) hat nur zwei Paar Nadeln, die in einer Entfernung von 3 cm voneinander auf dem Glasfaden sitzen. Der geladene Stanniolstreifen bewegt sich zwischen den Nadeln und wirkt auf beide in gleichem Sinne.

Die volle Schwingungsdauer der Nadel war fast bei allen Versuchen ca. 10 Sek.

Die Spiegelchen *O* sind, wie in der Zeichnung (Fig. 2) angegeben, angebracht und haben eine Größe von 2×3 mm. —

Die Skala ist mit seitlicher Beleuchtung und in Millimeter geteilt; der Skalenabstand gleich 2 m. —

Der ganze Rotationsapparat und das Magnetometer sind dauernd an Erde gelegt.

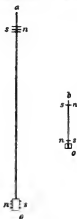


Fig. 2.

$\frac{1}{2}$ nat. Größe.

Methode.

5. Die Methode, welche hier bei allen Versuchen benutzt wird, ist dieselbe, welche ich schon früher benutzt habe¹⁾ und besteht darin, daß man zuerst eine geladene leitende Oberfläche, bei uns eine ringförmige Stanniolbelegung, rasch bewegt, also einen Konvektionsstrom erzeugt und dann durch dieselbe Oberfläche einen galvanischen Strom schickt und die magnetischen Wirkungen beider vergleicht. Dadurch wird man fast ganz frei in der Wahl der Lage und des Abstandes des Magnetsystems von den einzelnen Teilen des Rotationsapparates und man braucht diese Abstände gar nicht zu kennen. Das Magnetsystem selbst kann beliebig konstruiert sein; die Dimensionen der Nadeln, ihre gegenseitige Lage und die einzelnen magnetischen Momente jeder zu einem astatischen Paare verbundenen Nadel brauchen nicht bestimmt zu werden. Allerdings kann bei unserer Methode der Einwand erhoben werden, daß die galvanische Stromdichte in der ringförmigen Stanniolbelegung anders verteilt sein kann, als die Elektrizitätsdichte bei der Ladung; ebenso ist die Geschwindigkeit für ver-

1) A. Eichenwald, l. c. p. 704.

schiedene Kreise in Stanniolringe verschieden und zwar ist sie an dem äußeren Rande $\frac{25}{12}$ mal größer als am inneren. Diese Korrektur (in maximo 5 Proz.) wurde annähernd berechnet und an den Beobachtungen mit dem Magnetsystem Fig. 2, *a* angebracht; bei dem kleineren Magnetsystem Fig. 2, *b* hat die Verteilung der Ströme fast gar keinen Einfluß. Alle relativen Messungen werden von diesem Umstande gar nicht beeinflusst.

6. Ist *C* die Kapazität der bewegten Scheibe und *V* ihr Potential, so ist *CV* die Elektrizitätsmenge. Macht die Scheibe *n* Umdrehungen in der Sekunde, so ist *CVn* der Konvektionsstrom; schickt man jetzt durch dieselben Belegungen einen bekannten galvanischen Strom *i* und beobachtet bei dem Konvektionstrome eine Ablenkung des Magnetometers *a*, bei dem galvanischen Strome eine Ablenkung *b*, so muß sein

$$\frac{CVn}{a} = \frac{i}{b}.$$

Da man *V*, *n*, *a*, *b* und *i* direkt beobachtet, so kann man daraus die Kapazität *C* berechnen und sie mit der direkt bestimmten Kapazität vergleichen; oder, was zweckmäßiger ist, die nach irgend einer Methode bestimmte Kapazität in die obige Gleichung einsetzen, die Ausschläge *a* berechnen und sie mit den beobachteten vergleichen. Endlich kann man auch, wie es Rowland getan hat, das Verhältnis der elektrostatischen zu den elektromagnetischen Einheiten berechnen. Die Resultate solcher Berechnungen sind unten an entsprechenden Stellen angegeben.

7. Die Kapazität wurde bestimmt, indem man den Kondensator vermittelst einer Wippe *n*₁ gleich 22 mal in der Sekunde auf eine Potentialdifferenz von *V*₁ gleich 55 Volt lud und ebenso oft durch ein Galvanometer von bekannter Empfindlichkeit entlud. Ist der Anschlag des Galvanometers dabei *a*₁ und gibt er bei einem bekannten Strom *i*₁, einen Anschlag *b*₁, so ist

$$\frac{CV_1 n_1}{a_1} = \frac{i_1}{b_1},$$

eine Formel, die ganz analog wie die oben angeführte gebaut ist. Deswegen habe ich auch aus dem Rowlandschen Versuch die Kapazität zu berechnen versucht.

Die Wippe war so konstruiert, daß durch den Galvanometer nur die Ladung der bewegten Teile der geladenen Leiter ging, weil in dem Rowlandschen Versuch nur diese in Betracht kommen, obwohl gleichzeitig auch andere Leiter (z. B. die Schutzringe etc.) mit geladen werden können. Auf dieselbe Weise wurde auch die Kapazität der bewegten, aber mit der Erde verbundenen Leiter bestimmt.

Das Galvanometer war von du Bois und Rubens älterer Konstruktion und gab bei einem Widerstand von 40 Ohm und Skalenabstand von 2 m eine Empfindlichkeit 1 Skt. = $2,10^{-9}$ Amp. Die gemessenen Kapazitäten lagen im Bereiche von $1,10^{-11}$ bis $5,10^{-11}$ Farad. Für die Ladung wurde immer eine passende Zahl Akkumulatoren genommen, um die Ausschläge von ca. 100 mm zu erhalten. Es wurde noch ein Hilfskondensator mit Schutzring, also von genau berechenbarer Kapazität, zum Vergleich mit den unbekannten Kapazitäten benutzt.

Die Potentialdifferenz V der Scheiben wurde mit einem Braunschen Elektrometer bestimmt, welcher von Zeit zu Zeit mit einem absoluten Elektrometer geeicht wurde. Die Eichung geschah nach der von P. Czermak¹⁾ angegebenen Methode (mit Telephon), welche ich sehr bequem und zuverlässig fand.

Als Elektrizitätsquelle diente eine Toeplersche Influenzmaschine, welche dauernd mit einer isolierten Batterie von 27 Leydener Flaschen verbunden war. Der bewegliche Kondensator im Rotationsapparat konnte durch eine Wippe mit der einen oder anderen Belegung der Batterie verbunden werden und sich positiv oder negativ laden. Die Kapazität der Batterie war ca. 30000 cm, während die Kapazität der beweglichen und unbeweglichen Teile des Kondensators im Rotationsapparat höchstens 90 cm betrug. Bei jedem Kommutieren sank also das Potential nur um $\frac{1}{3}$ Proz. und ein Gehülfe konnte leicht durch ganz langsames Drehen der Elektrisiermaschine ein konstantes Potential halten.

Während der Rotation der Scheiben vor und nach jeder Beobachtungsreihe wurde der elektromagnetische Zähler nach

1) P. Czermak, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 97. Abt. 2. p. 307. 1888.

einer Sekundenuhr in Gang gesetzt und die Tourenzahl im Verlauf von einer Minute bestimmt. Da der Zähler jede 50 Touren angibt und der Apparat in einer Minute von 1500 bis 9000 Touren machte, so kann die Tourenzahlbestimmung bis auf ca. 1 Proz. genau gemacht werden.

Der Strom i ist von einem Akkumulator durch Widerstände abgezweigt und war von der Größe $4 \cdot 10^{-4}$ Amp.

Es wurden immer doppelte Anschläge beim Kommutieren des Stromes oder der Ladung beobachtet und das Mittel aus zehn Beobachtungen genommen; aber ich habe mich mehrmals überzeugt, daß die Ausschläge bei + oder - Ladung und Entladung die Hälfte von den Ausschlägen beim Kommutieren waren (vgl. unten § 8 e).

Die Ausschläge a und b sind nicht direkt miteinander zu vergleichen, weil die Empfindlichkeit des Magnetometers, während die Scheiben rotierten oder in Ruhe waren, nicht immer dieselbe war; auch während des Versuches kann sich ja die Empfindlichkeit ändern, wenn durch irgend welche Ursachen große Nullpunktsänderungen eintreten. Deshalb wurde immer noch ein unbeweglicher Hilfsstrom benutzt und seine Wirkungen c auf das Magnetsystem einerseits mit der Wirkung b des Stromes i andererseits mit den magnetischen Wirkungen des Konvektionsstromes a verglichen.

Versuchsfehler.

8. Abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern will ich hier noch die verschiedenen Ursachen besprechen, welche auf das Magnetometer wirken und die Beobachtungen stören können. Zunächst muß ich hervorheben, daß rein elektrostatische Einflüsse auch während der Rotation der Scheiben hier völlig ausgeschlossen sind, wovon ich mich durch spezielle Versuche (mit einer Kupfernadel statt Magnetenadel) überzeugt habe.¹⁾

Die mechanischen Ursachen, also Erschütterungen des Rotationsapparates pflanzen sich bis zur Wandkonsole des Magnetometers nicht fort; wenn sich aber irgend ein Teil des

1) A. Eichenwald, l. c. p. 704.

Magnetometers an irgend einen Teil des Rotationsapparates während der Rotation zufällig anlegt, so sind die Erschütterungen so groß, daß es unmöglich wird die Skala zu beobachten. Es sind also nur die magnetischen Wirkungen eingehend zu behandeln und zwar nur solche, welche im Apparate selbst ihre Ursache haben und nicht von außen herkommen.

a) Werden die Scheiben in Rotation versetzt, so entstehen dadurch ziemlich starke Luftbewegungen, welche einige unbewegliche Teile des Apparates ein wenig verschieben können; sind diese Teile magnetisch, so erhält man die Ablenkungen des Magnetometers. Das habe ich z. B. beobachtet, als ich die unbeweglichen Scheiben des Kondensators auf dicke Mikanitplatten montierte. Es muß also für möglichst feste Lage aller Teile gesorgt werden.

b) Ist die rotierende Scheibe selbst magnetisch (einige Sorten von Hartgummi), so geht die Magnetnadel bei langsamem Drehen der Scheibe hin und her und stellt sich bei rascher Rotation in eine Mittellage.

c) Wenn das Magnetsystem oder der Astasierungsmagnet unsymmetrisch in Bezug auf die rotierende Scheibe aufgestellt sind, so können in derselben Foucaultsche Ströme entstehen und das Magnetsystem ablenken. Bei den ersten Versuchen von F. Himstedt¹⁾ waren sogar diese Ablenkungen besonders störend und er mußte die Vergoldung der rotierenden Scheibe mit einer Graphitschicht ersetzen. Bei mir waren die Scheiben mit Stanniol beklebt und ich habe diese Ursache der Magnetometerablenkungen sehr gering gefunden.

d) Viel stärker sind die Wirkungen der Thermoströme. Das kupferne Rohr des Magnetometers mußte mit Karton und Watte umhüllt werden; aber auch in den unbeweglichen Teilen des Kondensators, namentlich wenn die Rotationsachse oder die Scheibe nicht genau genug montiert waren, entstanden so starke Thermoströme, daß die Magnetnadel manchmal über die Skala flog. Bestand der Kondensator aus Stanniol, so stellte sich schnell ein Gleichgewichtszustand ein, waren es aber Zinkplatten, so wandelte die Nadel viel langsamer und kam auch nach beendeter Rotation in ihre Ruhelage langsam

1) F. Himstedt, l. c. p. 563.

zurück. Um von diesen Störungen frei zu werden, habe ich alle metallischen Teile des Kondensators nahe an dem Magnetometer mit einem radialen Schlitz von 0,2 mm Breite versehen.

e) Ich habe oben schon von den störenden Einflüssen ganz kleiner Spitzen gesprochen. Sie bewirken erstens einen starken Elektrizitätsverlust und zweitens entstehen dadurch in den Scheiben elektrische Ströme, die das Magnetometer beeinflussen können. Natürlich muß die Spitze eine bestimmte Lage gegen das Magnetometer haben, denn ich habe oft bei hohen Potentialen Spitzen und sogar Funkenentladungen im Kondensator gehabt, ohne die geringste Ablenkung der Magnetnadel zu beobachten. Es wurde nur dann beobachtet, wenn die Spitzenwirkung fortfiel.

9. Die Wirkungen von a) bis d) (§ 8) sind unabhängig von der Rotationsrichtung und von der Ladung und hängen nur von der Geschwindigkeit ab; die Wirkung e) ist von der Rotationsrichtung und Rotationsgeschwindigkeit unabhängig und ändert sich nur mit dem Sinne der Ladung. Ich habe bemerkt, daß die Wirkung e) erst bei ca. 4000 Volt anfängt und unsymmetrisch ist, d. h. bei positiver und negativer Ladung ungleich. Zuweilen ist die Spitzenwirkung so konstant, daß man mit ihr den Rowlandeffekt beobachten kann. Dann erhält man ungleiche Ausschläge bei entgegengesetzter Rotation. Ist s die Spitzenwirkung, so erhält man z. B. bei einer Rechtsdrehung der Scheibe $\alpha_1 = kn + s$, bei der Linksdrehung $-\alpha_2 = -kn + s$.

So waren bei mir in einem Versuche die Ablenkungen:

bei + Rotation	+ 17,3
bei - Rotation	- 5,5
Mittelwert	11,4

Nachdem die Spitze gleich gefunden und beseitigt wurde, erhielt ich:

bei + Rotation	+ 11,2
bei - Rotation	- 12,0
Mittelwert	11,6

Ganz solche Erscheinungen, wie die hier geschilderten, haben Rowland und Hutchinson¹⁾ beobachtet, konnten aber den Grund dafür nicht angeben. Sie haben nämlich immer bei positiver Rotation (Zenith, Nord, Nadir, Süd) einen größeren Ausschlag (6,5 mm) beobachtet, als bei negativer (5,0). Die Differenz konnte dem Beobachtungsfehler nicht zugeschrieben werden. Ich bin geneigt sie dem genannten Versuchsfehler zuzuschreiben. Rowland und Hutchinson sagen zwar²⁾, daß sie die Ablenkungen bei stillstehenden Scheiben beseitigt haben, aber die Spitzenwirkung konnte auch bei der Rotation erst eintreten, wie ich zuweilen beobachtet habe. Himstedt³⁾, welcher keine vergoldete, sondern mit Graphit eingeriebene Glasscheibe benutzte, konnte die von Rowland beobachtete Unsymmetrie nicht realisieren.

10. Dafür hat aber F. Himstedt eine andere Erscheinung erhalten: die Proportionalität zwischen dem Ausschlage der Magnetnadel und dem Potential der bewegten Ladung war nur bis zu 4000 Volts zu beobachten, darüber hinaus aber nicht mehr und F. Himstedt sieht keine andere Möglichkeit, diese Erscheinung zu erklären, als anzunehmen, daß die elektrische Ladung nur bis zu diesen Spannungen auf dem ponderablen Träger haftet, bei höheren aber nicht mehr mit dem Träger rotiert. Dagegen sprechen aber die Versuche von Rowland und Hutchinson, welche z. B. in der Tab. I Nr. 19 angeben, daß die Entfernung der Kondensatorbelegungen $e = 1,8$ cm und die elektrische Dichte $\sigma = 1,13$ C.G.S. war, woraus sich die Potentialdifferenz zu

$$V = 4 \pi e \sigma = 25,6 \text{ C.G.S.} = 7700 \text{ Volt}$$

berechnet, also fast doppelt so groß als der Grenzpotential von F. Himstedt. Nun aber sagt F. Himstedt, daß seine Isolation nur bis 4000 Volt⁴⁾ hielt und „wenn die Scheiben zu einem Potentiale von 14000 Volts geladen wurden, dei

1) H. A. Rowland u. C. T. Hutchinson, l. c. p. 458.

2) l. c. p. 455.

3) F. Himstedt, l. c. p. 572.

4) l. c. p. 569.

Elektrometer ein sehr schnelles Sinken des Potentials anzeigte. Oft schon in einer Minute war das Potential auf ca. 4000 Volt gesunken.“ Ich vermute deshalb, daß wegen Isolationsmangel der obere Teil der rotierenden Scheibe, welcher an dem Magnetometer gerade vorbei ging, teilweise schon entladen war und nicht die erwartete Wirkung auf das Magnetometer ausüben konnte. Ich selbst habe nie solche Erscheinungen beobachtet.

Die Versuche.

11. Eine rotierende Mikanitscheibe *B* (Fig. 3) mit ringförmiger Stanniolbelegung, wie oben beschrieben, ist von einer unbeweglichen flachen Zinkschachtel *AC* umhüllt, welche nur eine Öffnung für die Achse und eine zweite kleine Öffnung *D* für die Kontaktfeder (vgl. p. 6, § 3) hat. Die Belegung der Scheibe wird durch Schleifring mit Bürsten *W* geladen und bildet mit der inneren Oberfläche der zur Erde abgeleiteten Zinkhülle einen geschlossenen Kondensator. Oben hat die Zinkhülle einen vertikalen, äußerst schmalen Schlitz, um Thermoströme vom Magnetometer fernzuhalten; der Schlitz ist mit breitem Karton und darauf mit Stanniol wieder zugeklebt. Außen ist an der Zinkschachtel ein isolierter Draht *E* für den Vergleichsstrom angekittet. Die Mikanitscheibe wird in Rotation versetzt und die Ausschläge der Magnetnadel beim Kommutieren der Ladung beobachtet. In der folgenden Tabelle sind die Resultate dieser Beobachtungen zusammengestellt. Dabei ist *V* die Potentialdifferenz in Volts. $\pm a$ die doppelte Ablenkung beim Kommutieren der Ladung. *c* die doppelte Ablenkung vom Hilfsstrom. $\pm n$ die Tourenzahl in der Sekunde. + Rotation ist Zenith, Nord, Nadir, Süd.

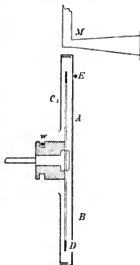


Fig. 3.

Tabelle I.
Magnetometer Nr. 1 (Fig. 2, a).

Nr.	V	n	a		Diff.	c	$\frac{a \cdot 10^6}{c \cdot V \cdot n}$
			beob.	ber.			
1	1875	+ 77	+ 5,8	+ 5,5	+ 0,3	39,0	1,030
8	1875	- 77	- 6,2	- 6,0	+ 0,2	42,8	1,003
2	3750	+ 77	+ 14,1	+ 14,3	- 0,2	50,9	0,959
7	8750	- 77	- 18,5	- 18,0	+ 0,5	46,0	1,015
3	5000	+ 77	+ 19,2	+ 19,1	+ 0,1	50,9	0,980
6	5000	- 77	- 17,4	- 17,3	+ 0,1	46,0	0,983
4	6250	+ 77	+ 21,4	+ 21,4	+ 0,0	45,5	0,977
5	6250	- 77	- 22,0	- 21,5	+ 0,5	45,7	1,000
9	6250	+ 15 ¹⁾	+ 4,1	+ 4,2	- 0,1	45,8	0,956
10	6250	- 15	- 4,0	- 4,2	- 0,2	45,8	0,936
11	6250	+ 30	+ 8,6	+ 8,3	+ 0,3	45,5	1,012
12	6250	- 30	- 8,7	- 8,4	+ 0,3	45,6	1,016
13	6250	+ 75	+ 20,0	+ 20,7	- 0,7	45,2	0,946
14	6250	- 75	- 21,0	- 20,9	+ 0,1	45,7	0,981
15	6250	+ 100	+ 30,0	+ 28,6	+ 1,4	47,0	1,024
16	6250	- 100	- 29,4	- 29,2	+ 0,2	47,8	0,983
17	6250	+ 110	+ 32,7	+ 33,0	- 0,3	49,2	0,968
18	6250	- 110	- 32,2	- 33,0	+ 0,8	49,2	0,953
19	6250	+ 130	+ 43,0	+ 43,9	- 0,9	55,4	0,956
20	6250	- 130	- 42,0	- 43,9	- 1,9	55,4	0,933
21	6250	+ 150	+ 45,5	+ 46,0	- 0,5	50,2	0,966
22	6250	- 150	- 46,1	- 46,3	- 0,2	50,6	0,973

Mittelwert - 0,980

Ein galvanischer Strom, durch die Stanniolbelegung geschickt, $i = 3,96 \cdot 10^{-5}$ Amp. gibt einen doppelten Ausschlag $b = 43,9$, während $c = 51,8$ ist; also b reduziert auf $c = 100$ ist $b_1 = 84,8$.

Benutzt man das Mittel aus allen Beobachtungen von $a/CVn = 0,980$ für die Berechnung der Kapazität, so erhält man

$$C = \frac{i}{b_1} \frac{a}{C V n} = 4,58 \cdot 10^{-11} \text{ Farad.}$$

Direkte Bestimmungen gaben $C = 4,56 \cdot 10^{-11}$ Farad

Differenz 0,02 oder $\frac{1}{2}$ Proz.

1) Mit der Hand gedreht.

Benutzt man umgekehrt die bestimmte Kapazität der rotierenden Scheibe und berechnet für jede Versuchsreihe die Ausschläge α , so sieht man, daß die Übereinstimmung mit den wirklich beobachteten Ausschlägen eine befriedigende ist. Berechnet man aus diesen Versuchen die Lichtgeschwindigkeit, so ergeben sich Werte von $2,86 \cdot 10^{10}$ bis $3,16 \cdot 10^{10}$; als Mittelwert $v = 3,01 \cdot 10^{10}$ cm/sec statt des $v = 3 \cdot 10^{11}$, welcher bei der Berechnung der elektrischen Einheiten angenommen worden ist. Diese genaue Übereinstimmung ist natürlich eine zufällige und soll nur zeigen, daß die Fehler bei den einzelnen Beobachtungsreihen keine systematischen Fehler sind.

Ganz analoge Resultate erhält man mit dem Magnet-system Nr. 2 (Fig. 2, b); hier sind zwar die Ausschläge zweimal größer als bei dem System Nr. 1, aber größere Genauigkeit ist dadurch nicht erzielt worden. Nimmt man alle meine definitiven Versuche in Betracht, so erhält man die Kapazität von $C = 4,4 \cdot 10^{-11}$ bis $C = 4,7 \cdot 10^{-11}$ Farad.

Durch diese Versuche ist gezeigt worden, daß auch die direkte Magnetometermethode den Rowlandeffekt mit einer Genauigkeit von ca. ± 5 Proz. zu beobachten erlaubt.

Aus allen bisher von verschiedenen Beobachtern gemachten Versuchen können wir schließen, daß eine mit langsamer Geschwindigkeit (bis zu 150 Meter in der Sekunde) bewegte Ladung ein magnetisches Feld erzeugt, welches in jeder Beziehung (Richtung, Größe, Verteilung im Raume, Induktionswirkungen) dem Felde eines galvanischen Stromes von gleichem numerischen Betrage äquivalent ist.

12. Bei der Wiederholung des Rowlandschen Versuches werden manchmal die rotierenden, sowie auch die ihnen gegenüberstehenden unbeweglichen Scheiben in einzelne voneinander isolierte Sektoren eingeteilt. Diese Einteilung ist aber durchaus nicht notwendig. Schon Rowland¹⁾, welcher bei seinen ersten Versuchen eine vergoldete Ebonitscheibe benutzte, hat gezeigt, daß man dieselben magnetischen Wirkungen erhält, wenn die Vergoldung die Oberfläche der Scheibe gleichmäßig bedeckt oder in Sektoren eingeteilt ist. Hr. H. Pender²⁾

1) H. v. Helmholtz, Ges. Abhandl. 1. p. 793.

2) H. Pender, l. c. p. 206.

bestätigt dieses Resultat auch. Ebenso hat Himstedt¹⁾ eine Glasscheibe mit einer ununterbrochenen Graphitschicht am Rande benutzt. Bei mir²⁾ war früher die rotierende Mikanitscheibe am Rande mit sechs Stanniolstreifen beklebt, welche voneinander durch $\frac{1}{2}$ mm breite Zwischenräume isoliert waren; aber diese Einteilung war nicht wesentlich und hatte nur den Zweck die elektrischen Ströme, welche etwa im Moment der Ladung durch Schleifkontakte entstehen könnten, von dem Magnetsystem fernzuhalten. Der Schleifkontakt war stets an dem unteren Stanniolstreifen angelegt, während der obere schon fertig geladen an dem Magnetsystem vorbeiging. Die feststehenden Scheiben waren auch bei mir volle Zinkscheiben. Später, nach Verbesserung der Schleifkontakte erwies sich auch die oben genannte Einteilung als überflüssig und ich konnte einige Versuche sogar mit einer vollen Aluminiumscheibe anstellen.

Es verhält sich also die konvektiv bewegte Ladung so, als ob sie an der Materie haftete.

Dasselbe gilt natürlich auch für die Ladung auf der feststehenden Scheibe, denn sollte sich diese auch mitbewegen, so würde dadurch auf der feststehenden Scheibe ein gewöhnlicher (Konduktions-)Strom entstehen, welcher die magnetische Wirkung des Konvektionsstromes größtenteils kompensieren würde. Der Versuch zeigt also, daß dieses nicht der Fall sein kann.

Um das noch deutlicher zu zeigen und auch zu untersuchen, wie sich die einander entsprechenden Ladungen der beiden Belegungen *eines und desselben Kondensators* bei der elektrischen Konvektion verhalten, habe ich folgende Anordnung gewählt.

13. Zwei rotierende Mikanitscheiben (Fig. 4) *A* und *B* und eine unbewegliche *C*, welche ebenso wie im eben beschriebenen Versuche mit Stanniolstreifen beklebt waren, bilden zusammen einen Kondensator. *C*, *D* und *E* sind fest an die Bodenplatte und an die Stützen des Apparates angeschraubte Mikanitplatten, die mit 4 cm breitem Stanniol beklebt als

1) F. Himstedt, l. c. p. 560.

2) A. Eichenwald, l. c. p. 703.

Schutzringe dienen sollen. Sie haben nicht den Zweck ein homogenes Feld herzustellen, sondern nur eine vollkommene Symmetrie des Feldes um die Rotationsachse zu erreichen, was für reine elektrische Konvektion wesentlich ist (vgl. § 18). Diese Symmetrie des Feldes kann bei offenem Kondensator, wie wir ihn jetzt gebrauchen, durch die Stützen und das Magnetometergehäuse zerstört werden. Die Abstände zwischen *A*, *B* und *C* sind 1,2 cm.

14. Mit diesem Apparate kann man zunächst zeigen, daß während der Rotation der Scheiben keine Konduktionsströme entstehen. Zu dem Zwecke verbindet man die Schleifbürste der Scheibe *A* mit einem empfindlichen Galvanometer, dessen anderes Ende an Erde gelegt wird; da das eine Ende der ringförmigen Stanniolbelegung der Scheibe *A* mit dem Schleifring, das andere Ende mit der Achse, also mit der Erde verbunden ist, so muß der in der Stanniolbelegung gebildete Strom den Weg durch das Galvanometer nehmen.

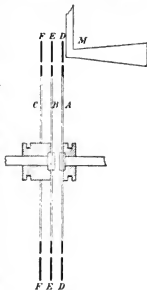


Fig. 4.

Wird die Scheibe *B* bis auf 6000 Volts geladen und in Bewegung gesetzt, so bemerkt man im Galvanometer keine Ablenkungen; rotiert aber die Scheibe *A*, so entstehen im Schleifring Thermostrome und außerdem bemerkt man beim Kommutieren der Ladung kleine Zuckungen des Galvanometers, die ziemlich unregelmäßig sind, deren Sinn aber von der Rotationsrichtung unabhängig ist. Es sind wahrscheinlich Ladungsströme oder auch Thermostrome, die durch kleine Fünkchen im Schleifringe beim Kommutieren entstehen. Jedenfalls sind das keine dauernden Ablenkungen und das Galvanometer geht nach jedem Kommutieren der Ladung der Scheiben wieder auf seinen Nullpunkt zurück. Die Galvanometerempfindlichkeit war $2 \cdot 10^{-9}$ Amp. bei 5 Ohm Widerstand. Der Konvektionsstrom war aber von der Ordnung $2 \cdot 10^{-5}$, also 10 000 mal größer.

15. Derselbe Apparat wurde zur Beobachtung des Rowland-effektes benutzt, indem das Magnetometer beobachtet wurde, während die geladenen Scheiben *A* und *B* einzeln oder zusammen in gleicher oder entgegengesetzter Richtung rotierten. Außerdem konnten die den Kondensator bildenden Stanniol-belegungen auf verschiedene Weise geladen werden; es konnte nämlich das elektrostatische Feld entweder zwischen *A* und *B*, oder zwischen *B* und *C*, oder zwischen allen drei Belegungen zusammen erzeugt werden. Alle diese Fälle sind experimentell untersucht worden und in der Tab. II zusammengestellt.

Die Bezeichnungen sind die früheren.

Die Kapazität der Belegungen wurde wie früher bestimmt und ergab sich für *B* $C_2 = 3 \cdot 10^{-11}$ Farad., für *A* die Hälfte von dieser Größe, $C_1 = 1,5 \cdot 10^{-11}$, wie es aus Symmetriegründen auch sein sollte.

Ein galvanischer Strom $i = 4 \cdot 10^{-5}$ gibt einen doppelten Ausschlag

in der Belegung <i>A</i>	$b_1 = 108,8$
" " <i>B</i>	$b_2 = 49,2$
im Kontrolldraht	$c = 50,0$.

Aus diesen Größen lassen sich die Magnetometerablenkungen *a* beim Konvektionsstrom berechnen. Wenn $V = 6250$ und $n = 78$, so muß sein

$$a_1 = \frac{C_1 V n b_1}{i} = 19,9,$$

$$a_2 = \frac{C_2 V n b_2}{i} = 18,0.$$

Tabelle II.

Nr.	Geerdet	El. Feld zwischen	Rotiert		Reduz. Ausschlag		Diff.
			<i>A</i>	<i>B</i>	beob.	ber.	
1	<i>A</i> und <i>C</i>	<i>A—B—C</i>	±	...	± 20,1	± 19,9	+ 0,2
2	<i>A</i> und <i>C</i>	<i>A—B—C</i>	...	±	∓ 17,9	∓ 18,0	- 0,1
3	<i>A</i> und <i>C</i>	<i>A—B—C</i>	±	±	± 2,0	± 1,9	+ 0,1
4	<i>A</i> und <i>C</i>	<i>A—B—C</i>	±	∓	± 37,5	± 37,9	- 0,4
5	<i>A</i>	<i>A—B</i>	±	...	± 20,5	± 19,9	+ 0,4
6	<i>A</i>	<i>A—B</i>	...	±	∓ 8,4	∓ 9,0	- 0,6
7	<i>A</i>	<i>A—B</i>	±	±	± 10,6	± 10,9	- 0,3
8	<i>A</i>	<i>A—B</i>	±	∓	± 28,6	± 28,9	- 0,3

Ich glaube, daß die hier angegebenen zwei Fälle genügen, um zu zeigen, daß die magnetischen Wirkungen zweier Konvektionsströme sich superponieren.

Hierzu muß ich bemerken, daß das Superpositionsprinzip für die magnetischen Wirkungen der Konvektionsströme schon von Rowland und Hutchinson, von Himstedt und Pender hinreichend genau bewiesen worden ist, aber bei allen ihren Versuchen waren immer zwei *verschiedene* Kondensatoren benutzt, wobei in jedem nur die eine Belegung rotierte, während die andere stehen blieb, und man könnte glauben, daß es für die magnetische Wirkung notwendig wäre, daß die einander entsprechenden, durch Faradaysche Kraftlinien verbundenen Ladungen sich relativ gegen einander bewegen. Unser Versuch Nr. 7, Tab. II zeigt, daß auch dann, *wenn der geladene Scheibenkondensator als Ganzes wie ein starrer Körper in Rotation versetzt wird, die magnetische Wirkung als Superposition von den magnetischen Wirkungen jeder seiner Belegungen erscheint.*

Ich konnte mich auch bei diesen, wie bei den früheren Versuchen mehrmals überzeugen, daß die Wirkungen des Konvektionsstromes sich mit den Wirkungen des galvanischen Stromes *i* auch superponieren.

Endlich können wir, alle diese Versuche zusammenfassend, schließen, daß *die Ladungen an der Materie haften und sich mit derselben bewegen, und zwar sind bei unserer Anordnung die Bewegungen wie auch die magnetischen Wirkungen der in einem Kondensator einander entsprechenden Ladungen unabhängig voneinander.*

16. Bei dieser Gelegenheit will ich die Frage über Bewegung der Kraftlinien berühren. Wir sind ja gewohnt die zwei „gebundenen“ Elektrizitäten in einem Kondensator durch Kraftlinien zu verbinden, oder nach der neueren Anschauung sind ja die Ladungen nichts als Enden der Kraftlinien. Was geschieht mit den Kraftlinien während der Bewegung? Im Falle, wo der Kondensator als Ganzes bewegt wird, können wir sagen, daß die Kraftlinien mit bewegt werden und ihre Enden an denselben Teilen der Materie bleiben. Es entsteht also ein reiner Konvektionsstrom. Diese Anschauung führt hier zu keinem Widerspruch, denn sie wird durch den Versuch Nr. 7, Tab. II bestätigt. Wird aber irgend eine Scheibe *A*

relativ zur anderen B bewegt und nehmen wir an, die Kraftlinien bewegen sich mit, so müssen sich ihre Enden auf der unbeweglichen Scheibe B auch bewegen und einen Konduktionsstrom bilden. Nehmen wir andererseits an, die Kraftlinien bewegen sich nicht, so können ihre Endpunkte an der bewegten Scheibe A sich auch nicht bewegen und wir bekommen jetzt auf der Scheibe A einen Konduktionsstrom. In beiden Fällen würde der Rowlandeffekt wesentlich modifiziert sein, also beide Annahmen widersprechen dem Versuch. Der Begriff von der Bewegung der Kraftlinien ist also mit einer gewissen Vorsicht zu benutzen; will man aber der Anschaulichkeit halber mit diesem Begriffe operieren, so muß man zuerst in jedem Punkte des Raumes das elektrostatische Feld in seine einzelnen Bestandteile zerlegen, welche jeder einzelnen Ladung angehören und so von jeder positiven Ladung die Kraftlinien nicht zu den entsprechenden negativen Ladungen, sondern durch alle Körper, sogar durch alle Leiter hindurch ins Unendliche ziehen; ebenso müssen vom Unendlichen Kraftlinien gezogen werden, welche in den negativen Ladungen enden. Definiert man so die Kraftlinien, so kann man von ihrer Bewegung mit der Ladung sprechen und auf diese Weise alle die Erscheinungen der elektrischen Konvektion erklären.¹⁾

Hr. J. J. Thomson hat in seinem bekannten Buche „Recent Researches in Electricity and Magnetism“ eine Theorie entwickelt, nach welcher die magnetische Kraft durch die Bewegung der elektrischen Kraftlinien erklärt wird, und um das Vorhandensein eines magnetischen Feldes auch da zu erklären, wo kein elektrisches Feld, also auch keine eigentlichen Kraftlinien sich befinden, mußte er eine Hypothese machen, daß überall im Äther geschlossene (d. h. ohne Endpunkte) Kraftlinien²⁾ existieren, die durch die Bewegung der Faradayschen Kraftlinien auch in Bewegung gesetzt werden und so die Fortsetzung des magnetischen Feldes bilden. Diese geschlossenen Kraftlinien müssen aber von der Intensität $E = 0$ sein, weil geschlossene Kraftlinien von endlicher Intensität im

1) Analoges gilt für die magnetischen Kraftlinien (unipolare Induktion).

2) „Closed tubes“ p. 2.

statischen Felde nicht existieren können.¹⁾ Mathematisch kommt das also darauf hinaus, daß wir in einem beliebigen Punkte des Raumes das Feld in seine einzelnen Bestandteile, welche von den einzelnen Ladungen herrühren, zerlegbar denken müssen. Es ist klar, daß dann die magnetischen Wirkungen der einzelnen Ladungen bei ihrer Bewegung sich auch superponieren werden.

17. Mit der oben beschriebenen Anordnung habe ich auch die Wirkung der Dielektrika untersucht, indem ich Paraffin- oder Hartgummipplatten von 1 cm Dicke zwischen den Scheiben *A* und *B* einschob. Die Platten wurden an *B* fest angelegt und ließen einen genügenden Zwischenraum (2 mm), damit *A* rotieren konnte. Das elektrostatische Feld wurde nur zwischen *A* und *B* erzeugt. In der Tab. III sind die mit dem kleinen Magnetometer (Fig. 2 b) gemachten Beobachtungen angegeben.

Ganz ebenso, wie wir früher aus den Beobachtungen über die magnetische Wirkung der elektrischen Konvektion die Kapazität des Kondensators berechnen konnten, können wir jetzt die Dielektrizitätskonstante berechnen; dazu brauchen wir nur relative Messungen anzustellen. Natürlich muß bei der Berechnung der 2 mm dicke Luftzwischenraum in Betracht gezogen werden.

Tabelle III.

Dielektrikum	Beobachteter Ausschlag	Verhältnis der Ausschläge	Dielektrizitätskonstante		Fehler
			aus der Beobachtung berechnet	direkt bestimmt	
Luft	29,6	1,00	1,00	1,00	—
Paraffin	41,8	1,44	1,56	1,68 ²⁾	8 %
Hartgummi	62,6	2,17	2,86	2,96	5 %

Wie man sieht, stimmt die aus dem Rowlandeffekt berechnete Dielektrizitätskonstante mit der direkt bestimmten genügend überein.

1) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 41. 1900.

2) Paraffin war mit kleinen Luftbläschen.

18. Bis jetzt haben wir nur reine elektrische Konvektion behandelt; es ist aber klar, daß nicht bei jeder Bewegung des geladenen Körpers eine solche stattfindet. Im allgemeinen entstehen bei solchen Bewegungen in den benachbarten Leitern Konduktionsströme und im elektrischen Felde Verschiebungsströme. Ich will unten einige solcher Fälle untersuchen.

Haben wir einen Rotationskörper, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seine Symmetrieachse rotiert und ist das elektrostatische Feld auch symmetrisch um dieselbe Achse angeordnet, so bleiben bei der Rotation alle Verhältnisse ungeändert. Das Feld ändert sich nicht, es entstehen keine Verschiebungsströme und keine Konduktionsströme in den benachbarten Leitern. Die Konvektion ist eine reine. Wollen wir also die magnetische Wirkung eines Konvektionsstromes unter reinen Verhältnissen studieren, so müssen wir für den Versuch, streng genommen, nur volle leitende Scheiben, d. h. wirkliche Rotationskörper benutzen und keine Sektoreneinteilung zulassen.¹⁾ Sind die Zwischenräume zwischen den einzelnen Sektoren klein, so sind sie unschädlich, können aber praktisch von Nutzen sein, wie oben auseinandergesetzt ist; sind sie aber groß, so sind die Bedingungen für reine Konvektion verletzt.

Betrachten wir irgend ein Element der Oberfläche eines beliebigen Sektors, so ist es klar, daß es bei der Bewegung in verschiedenen Bedingungen sein wird, wenn er sich gegenüber einem leitenden Sektor oder gegenüber einem isolierten Zwischenraum befindet. Bei der Bewegung der Sektoren gegeneinander wird die Feldintensität an jedem von ihnen an Richtung und Größe geändert und es entstehen Konduktionsströme, welche auch auf das Magnetometer wirken können und so die Versuchsergebnisse verwickeln.

1) Bei der Kritik der Crémieuschen Versuche hat Hr. H. Wilson (Phil. Mag. (6) 2. p. 150. 1901) ihm einen Vorwurf gemacht, daß bei ihm die Sektoren wahrscheinlich schlecht voneinander isoliert waren. Wir kommen hier gerade zum entgegengesetzten Resultate: die Sektoren brauchen gar nicht isoliert zu werden. Die Versuchsanordnung von E. Adams mit bewegten Kugeln ist in Bezug auf die Reinheit der Konvektion auch nicht einwandfrei.

19. Diese Konduktionsströme hat schon Rowland bei seinen ersten Versuchen¹⁾ beobachtet. Er ließ eine vergoldete Ebonitscheibe, deren Goldüberzug durch eine Reihe feiner kreisförmiger Linien in Ringe geteilt war, die also voneinander für kleine Potentialdifferenzen isoliert waren, zwischen zwei unbeweglichen Sektoren *A* rotieren (Fig. 5). Wird der Sektor *A* mit positiver Elektrizität geladen und rotiert die Ebonitscheibe in der Richtung *b a*, so wird bei dieser Rotation in der Goldbelegung bei *b* immer neue negative Elektrizität gebunden und positive frei; bei *a* wird immer negative Elektrizität frei. Die freien Elektrizitäten neutralisieren sich durch einen Konduktionsstrom, welcher zwei Wege hat: der eine ist *b c a*, der andere *b d a*.²⁾ Diesen letzteren konnte Rowland mit der Magnetnadel nachweisen.

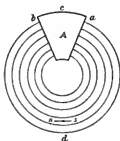


Fig. 5.

20. Man muß aber bemerken, daß bei diesem Versuche in der rotierenden Scheibe selbst kein konstanter Strom fließt, sondern ein Wechselstrom, welcher aber wegen der Rotation ein im Raume feststehendes Magnetfeld erzeugt. Ich konnte diesen Wechselstrom direkt mit dem Telephon nachweisen. Zu dem Zwecke wird die ringförmige Stanniolbelegung der Scheibe *A* (Fig. 4) in sechs isolierte Sektoren eingeteilt; zwei von diesen Sektoren werden mit einem Telephon, die anderen mit der Erde verbunden. Die Scheibe *B* wird mit drei einzelnen Stanniolsektoren beklebt, indem die Zwischenräume den Sektoren gleich genommen werden. Rotiert die geladene Scheibe *B*, so hört man im Telephon sehr deutlich einen Ton, welcher genau der Tourenzahl und der Sektorenzahl entspricht.

Noch besser hört man diese Töne bei folgender Anordnung. Die rotierende Mikanitscheibe *B* ist wie früher mit drei Stanniolsektoren beklebt, sodaß die Zwischenräume den Sektoren gleich sind, und befindet sich zwischen ebensolchen drei Sek-

1) H. v. Helmholtz, Ges. Abhandl. 1. p. 793.

2) Diese Erklärung entnehme ich H. v. Helmholtz, l. c. p. 794.

toren A aus Zink, welche mit der Erde verbunden werden können. Werden die Sektoren B geladen, so entstehen während der Rotation in allen Sektoren Wechselströme (keine Sinusströme). Verbindet man die Sektoren B durch ein Telephon mit der Erde, so hört man einen lauten Ton. Ist die Tourenzahl gleich 86 pro Sekunde, so hat man im Telephon die Schwingungszahl $3 \times 86 = 258$, was einem Ton c entspricht; nimmt man die Tourenzahl größer oder kleiner, so wird der Ton höher oder tiefer; nimmt man sechs Sektoren statt drei in jeder Scheibe, so erhält man die Töne eine Oktave höher.¹⁾

Diese Wechselströme in den unbeweglichen Sektoren üben auf die Magnetnadel keine Wirkung, aber die Wechselströme in den beweglichen Sektoren kommen bei der Magnetnadel immer mit derselben Phase vorbei und können die Ablenkung der Nadel beeinflussen.

21. Am übersichtlichsten können die Konduktionsströme in der folgenden Anordnung beobachtet werden. Die Hälfte von der rotierenden, mit der Erde leitend verbundenen Scheibe B ist von einem Zinksektor A bedeckt. Der Sektor wird geladen und das Magnetometer beobachtet. Nehmen wir an, der Sektor A sei mit $+$ Elektrizität geladen und die Scheibe B rotiere in der Richtung $abcd$, so haben wir bei abc eine Konvektion der negativen Elektrizität $-K$ in derselben Richtung; bei a , wo die ungeladenen Teile der Scheibe B ankommen, wird immer positive Elektrizität frei und es entstehen zwei gleiche Konduktionsströme $+G$: der eine geht über abc , der andere über adc . Alle diese Ströme wirken auf das Magnetometer und wir beobachten in der Stellung (Fig. 6) die Wirkung von $-G$, in der Stellung (Fig. 7) die Wirkung von $-K + G$. Nun ist aber $K = 2G$, wir müssen also in beiden Stellungen ganz gleiche Ausschläge des Magnetometers erhalten. Der Unterschied ist aber der, daß wir im ersten Falle das magnetische Feld von einem gewöhnlichen Strome $-G$ beobachten, im zweiten Falle aber eine Super-

1) Man kann diesen Apparat einen elektrischen Wechselstrom-generator nennen, weil er in der Tat den in der Technik so verbreiteten elektromagnetischen Alternatoren sehr ähnlich ist.

position eines gewöhnlichen Stromes $+G$ mit einem Konvektionsstrome $-K$.

Bei diesem Versuche bilden die zwei galvanischen Ströme über abc und adc die Fortsetzung von dem Konvektionsstrome abc . Die magnetische Wirkung des Konvektionsstromes

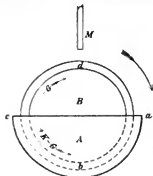


Fig. 6.

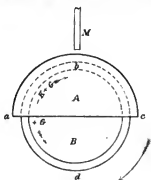


Fig. 7.

wird dabei durch die Wirkung des Konduktionsstromes auf die Hälfte vermindert.

Zwischen a und c entsteht eine Potentialdifferenz. Da der Strom von der Ordnung 10^{-5} und der Widerstand des Stannioloringes ca. 1 Ohm ist, so ist die Potentialdifferenz zwischen a und c auch von der Ordnung 10^{-5} Volts.¹⁾

Ich will einige Beobachtungen, die mit dieser Versuchsanordnung gemacht worden sind, hier mitteilen.

Tabelle IV.

Nr.	V	n	-g	$-\frac{G}{V \cdot n} \cdot 10^5$	$-K + G$	$-\frac{K + G}{V \cdot n} \cdot 10^5$	K		Diff.
							beob.	ber.	
1 u. 5	1875	± 70	$\pm 2,7$	2,05	$\pm 2,6$	2,00	5,3	5,2	+0,1
2 u. 6	3750	± 70	$\pm 5,2$	1,98	$\pm 5,4$	2,06	10,6	10,5	+0,1
3 u. 7	5000	± 70	$\pm 7,2$	2,07	$\pm 7,1$	2,03	14,3	14,0	+0,3
4 u. 8	5000	± 120	$\pm 11,2$	1,87	$\pm 12,0$	2,00	23,2	24,0	-0,8

1) Bei genügender Kapazität oder Selbstinduktion der Scheibe würde eine Phasenverschiebung der Potentialdifferenz gegen die Ströme nach bekannten Regeln eintreten.

Die oben angeführten theoretischen Betrachtungen sind also durch den Versuch bestätigt. Da diese Konduktionsströme, wie auch aus der Tab. IV zu sehen ist, mit dem Sinne der Ladung und der Rotation ihren Sinn wechseln und da die Ablenkungen der Magnetnadel hier auch proportional der Potentialdifferenz und der Tourenzahl wachsen, so sind die Wirkungen dieser Ströme leicht mit den Wirkungen der Konvektionsströme zu verwechseln. *Die von der Theorie geforderte Größe des Rowlandeffektes wird aber immer in solchen Versuchen kleiner erscheinen.*

22. Noch auf eine andere Weise können die Konduktionsströme, welche bei der Bewegung geladener Körper entstehen, nachgewiesen werden. Wir wissen, daß die Konduktionsströme sich von der reinen Konvektion dadurch unterscheiden, daß bei den ersteren immer eine Verwandlung der Energie in Joulesche Wärme stattfindet, bei den letzteren aber nicht. Entstehen also bei der Bewegung geladener Körper Konduktionsströme, so muß die Bewegung gehemmt werden. Diese Wirkungen der Konduktionsströme hat H. Hertz ¹⁾ zuerst beobachtet. Er hängte eine 10 cm lange horizontale Nadel, welche an ihren Enden zwei horizontale 3 cm lange und 2 cm breite Messingplättchen trug, an einem vertikalen Drahte auf. Die Nadel konnte über einer relativ gut leitenden Spiegelglasplatte Torsionsschwingungen ausführen. Wurde die Nadel geladen, so entstanden bei ihrer Bewegung auf der Glasplatte Konduktionsströme, welche die Bewegung deutlich dämpften. Wir können diesen Versuch von Hertz noch ergänzen. Nimmt man statt der Nadel eine volle Scheibe, d. h. einen Rotationskörper, so erhalten wir keine Dämpfung. Das elektrostatische Feld bleibt nämlich jetzt an der Glasplatte auch bei der Bewegung konstant und es entstehen keine Leitungsströme, also auch kein Energieverbrauch. Geringe Dämpfung kann man auch bei der vollen Scheibe beobachten, wenn ihre Ebene nicht genau senkrecht zu der Schwingungsachse angeordnet ist.

Bilden die Ebenen der Scheibe und der Glasplatte einen Winkel, ist die Scheibe aber senkrecht zur Rotationsachse angeordnet, so bleibt bei der Rotation der Scheibe das Feld

1) H. Hertz, Wied. Ann. 13. p. 267. 1881.

an der Glasplatte dennoch konstant, nicht aber in den einzelnen Teilen der Scheibe; es entstehen also auf der letzteren Konduktionsströme, welche aber wegen der großen Leitfähigkeit des Kupfers keine beobachtbare Dämpfung verursachen können.

23. Durch die hier angeführten Versuche habe ich mich bemüht die Erscheinungen der elektrischen Konvektion experimentell zu erläutern, aber alle diese Experimente lassen sich auch als Folgerungen aus der Maxwellschen Theorie hinstellen. Denn auch nach dieser Theorie kann in einem bewegten geladenen Leiter kein Strom durch die Bewegung allein entstehen (§ 14 und § 22), wenn die Feldintensität bei dieser Bewegung unverändert bleibt, also reine Konvektion stattfindet. Dieselbe Theorie sagt aus, daß der Konvektionsstrom Cv die gleichen magnetischen Wirkungen ausübt wie der Konduktionsstrom i und der Verschiebungsstrom dE/dt von gleichem Betrage und daß die Wirkungen aller dieser Ströme sich einfach superponieren. *Was also die im elektrostatischen Felde bewegten Leiter anbetrifft, so ist die Maxwell'sche Theorie mit dem Versuche in voller Übereinstimmung.*

24. Nach der Elektronentheorie wird ein jeder elektrischer Strom als Konvektionsstrom angesehen und der Rowlandsche Versuch bekommt hier eine fundamentale Bedeutung. Betrachten wir unsere Versuche vom Standpunkte der Elektronentheorie, so können wir aus ihnen verschiedene Schlüsse ziehen.

Wir haben gesehen (§ 14 und § 22), daß bei reiner elektrischer Konvektion in einem benachbarten Leiter kein Strom entstehen kann; nach der Elektronentheorie soll dasselbe auch für den galvanischen Strom gelten und das ist bekanntlich schon längst von Faraday bewiesen worden.

Es ist auch klar, daß weder ein Leiter noch die einzelnen Teilchen des Leiters irgend eine Schirmwirkung im magnetischen Felde eines elektrischen Stromes ausüben können.

Bewegt sich aber ein Elektron in einem Leiter, so bilden die einzelnen Teilchen des Leiters Unhomogenitäten im Raume; die Bewegung des Elektrons wird keine reine Konvektion sein und, wie wir sehen, muß dann eine Hemmung der Bewegung und Energieverlust eintreten. So könnte man den Widerstand der Leiter und die Joulesche Wärme erklären. Die Reihung der Elektronen würde so eine rein elektromagnetische Ursache haben.

Die Schwingungen des Elektrons werden ja durch Strahlung gedämpft und diese Dämpfung muß von den Abständen und von der Verteilung der benachbarten Teilchen beeinflußt werden. Es können endlich solche Fälle eintreten, wo durch diese Verteilung die Dämpfung völlig aufgehoben wird.

Bekanntlich hat Ampère eine Hypothese aufgestellt, nach welcher der Magnetismus im Eisen den Molekularströmen zugeschrieben wird. Diese Molekularströme in permanenten Magneten müssen sich in widerstandslosen Bahnen bewegen. Für gewöhnliche Ströme ist das nicht wohl möglich, aber es steht nichts im Wege hier Konvektionsströme ohne Energieverlust, d. h. reine elektrische Konvektion anzunehmen.

Moskau, Ingenieur-Hochschule, Januar 1903.

(Fortsetzung folgt.)

(Eingegangen 8. Februar 1903.)

2. Über die verstimmte Oktave bei Stimmgabeln und über Asymmetrietöne; von Franz Lindig.

[Auszug aus der Kieler Dissertation, II. Teil.¹⁾]

**Bedeutung der Oktavenschwebung für die Phasenfrage,
bisherige Behandlung des Problems und Ergebnisse vorliegender
Untersuchungen.**

Bei der Frage, ob bei einem Tonintervall ein Phasenunterschied der Komponenten unserem Ohr hörbar wird, oder nicht, ist vielfach der Fall der verstimmten Stimmgabeloktave angeführt und für die eine wie die andere Entscheidung benutzt worden: Wenn man zwei Stimmgabeln, die annähernd das Intervall der Oktave bilden, zusammen ertönen läßt, während sie auf ihren Resonanzkästen stehen, so hört man dabei leise schwebungsartige Klangveränderungen. Es scheint, als ob Grundton und Oktave abwechselnd hervortreten. Hat man es hier mit einem wirklichen Hörbarwerden der Phasen zu tun? Dies stünde in Widerspruch mit dem, was von Helmholtz²⁾, Hermann³⁾ und zuletzt von mir vermittelt der *Telephonsirene*⁴⁾ über die Phasenfrage gefunden worden ist.

Helmholtz sieht die Erklärung der Oktavenschwebung in dem sich während des Zusammenklanges der Gabeln bildenden ersten Differenztone; dieser bilde mit der Oktavengabel Schwebungen des Einklangs. Wenn die Erscheinung aber auch bei schwach angeschlagenen Stimmgabeln auftritt, so muß jene Erklärungsweise uns wenigstens zweifelhaft erscheinen, denn die Helmholtzschen Kombinationstöne treten gemäß ihrer Theorie⁵⁾ immer nur dann auf, wenn die ver-

1) Der Fakultät eingereicht im Mai 1902.

2) H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, I. Aufl. p. 190 f. 1863.

3) L. Hermann, Pflügers Archiv 56. p. 467 f. 1894; Wied. Ann. 58. p. 392 f. 1896.

4) F. Lindig, Ann. d. Phys. 10. p. 242 ff. 1903.

5) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 99. p. 497 f. 1856; Wissenschaftl. Abhandl. 1. p. 263 f. 1882.

wendeten, kombinierten Töne so stark sind, daß auch „die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluß auf die Größe der Bewegungskräfte erhalten“.

Lord Kelvin ¹⁾, sowie R. König ²⁾ sehen in der schwebungsartigen Klangveränderung der verstimmten Oktave den direkt durch das Ohr wahrgenommenen allmählichen Phasenwechsel zwischen Grundton und Oktave. Denn sie gehen von der Voraussetzung aus, daß die Stimmgabeln gar keine, oder doch nur hohe, unharmonische Obertöne, aber nicht die Oktave, erzeugen können. Daher ist ihnen dieser Fall ein klarer Beweis für den Einfluß der Phasen auf die Klangfarbe.

Eine andere Erklärung des vorliegenden Phänomens gründet sich auf die Annahme, die Stimmgabeln hätten harmonische Obertöne, darunter die Oktave. Dieser Oherton bilde also mit der verstimmten Oktavengabel Schwebungen des Einklangs. Solche Erklärung gibt Hr. Prof. Hermann.

Diese Lösung des Rätsels wäre freilich die einfachste; nur müssen wir uns dann Rechenschaft davon geben, wie die Oktave in der Stimmgabelschwingung zu stande kommt. Solche Erscheinung spräche doch offenbar allen bisher über die Bewegung freischwingender Stäbe bekannten Gesetzen Hohn!

Hr. Prof. Hermann gibt für die harmonischen Obertöne der Stimmgabeln keine Erklärung, sondern heruft sich nur darauf, daß solche vielfach beobachtet seien, zuletzt von Hrn. Prof. Stumpf. ³⁾ Dieser hat an verschiedenen Stimmgabeln durch Schwebungen eine ganze Reihe von Obertönen nachgewiesen, vor allen die Oktave, sie fehlte bei keiner Gabel. Stumpf zitiert auch ausführlich die bisherige Literatur über Beobachtungen harmonischer Ohertöne an Stimmgabeln und ähnlichen Tonquellen; er selbst aber entscheidet sich für keine der gegebenen Erklärungsweisen, sondern stellt nur durch seine Beobachtungen die Tatsache vom Vorhandensein der harmonischen Obertöne fest. Auf die vor Stumpf gemachten Beobachtungen und diesbezüglichen Erklärungsversuche der Stimmgabelobertöne werde ich später (p. 44) eingehen.

1) Lord Kelvin, Proc. Roy. Soc. Edinb. 9. p. 602. Taf. 5. 1878.

2) R. König, Wied. Ann. 14. p. 369 f. 1881; 57. p. 555. 1896.

3) C. Stumpf, Wied. Ann. 57. p. 660 f. 1896.

Es ist offenbar von der größten Wichtigkeit, für die von vielen beobachtete Tatsache des Auftretens der harmonischen Obertöne an Stimmgabeln, Klangstäben, Platten etc., deren höhere Eigenschwingungen sämtlich als unharmonisch zur Grundschwingung bekannt sind, eine rein auf Beobachtungen gegründete, alle Erscheinungen in sich fassende Erklärungsweise zu finden. Dies gilt nicht zum wenigsten auch für die Phasenfrage; denn *beim Mangel an deutlicher Einsicht in die Entstehung dieses harmonischen Obertones wird man denselben auch nicht mit voller Zuversicht zur Erklärung der Erscheinungen der verstimmten Stimmgabeloktave heranziehen können.*

Gleich hier sei das *Ergebnis* meiner hier folgenden Untersuchungen in Kürze zusammengestellt:

Das *Vorhandensein der Oktave im Klange einer einzelnen Stimmgabel* wird zunächst *bestätigt* und, wie wir glauben, zum ersten Mal eine einwandfreie und zugleich in das Einzelne der Erscheinungen gehende *Erklärung für das Auftreten dieser Oktave* gegeben.

Es zeigt sich, daß das Auftreten jener Oktave zwar unter die *v. Helmholtzsche Theorie der Kombinationstöne* fällt, daß dasselbe jedoch nicht bedingt ist durch große Intensität des Grundtones — was bei den eigentlichen Kombinationstönen der Fall ist —, vielmehr durch die an der Grenze zwischen Stimmgabelzinke und Luft bestehende *Asymmetrie* in der Lagerung der Luft.

Deshalb, und weil es sich außerdem bei einer Stimmgabel überhaupt nicht um die Kombination der Wirkungen zweier Schallwellenzüge auf die Luftteilchen handelt, so wird für die behandelte Oktave und die anderen in gleicher Weise auch bei reiner Sinusschwingung der Stimmgabelzinken entstehenden harmonischen Obertöne der Name „*Asymmetrietöne*“ vorgeschlagen.

Diese, sowie die anderen schon vorhandenen Erklärungsweisen der Oktave bei Stimmgabeln werden an einer großen Zahl besonderer Versuche geprüft.

Eine weitere Reihe von Versuchen, die zeigt, daß, wie bei den Stimmgabeln auch bei anderen Tonquellen in gleicher Weise harmonische Obertöne in der Luft — *Asymmetrietöne* — entstehen, bildet den Schluß der Arbeit.

Beobachtung der Oktavenschwebung.

Ich wiederholte zunächst die Versuche, die in dieser Hinsicht von Helmholtz, König, Lord Kelvin und Hermann vorgenommen waren und zwar mit zwei Königschen Stimmgabeln neuester Konstruktion: $U_3 = c'$ (16 cm lang, 0,8 cm dick, 1,4 cm breit), $u_4 = c''$ (10 cm lang, 0,6 cm dick, 1,4 cm breit).

Der freie Abstand der von der Stielkrümmung an parallel verlaufenden Zinken betrug bei beiden Gabeln 1,9 cm. Die Stimmgabeln erzeugten einen sehr lange andauernden Ton. Der Stiel hatte an seinem Ende Schraubengewinde, das durch eine Mutter von der Innenseite des Resonanzkastens gehalten wurde. Diese Einrichtung erwies sich namentlich in Hinsicht auf das nachher notwendige Aufhängen der Gabeln als sehr praktisch. Die Lissajoussche Gabel, die auf ihrer oberen Zinke das Objektiv des Vibrationsmikrokopes trug, war die niedere Oktave von U_3 , also gleich U_2 (c); sie war 21 cm lang, 0,7 cm dick und 1,5 cm breit. Zunächst stellte ich die beiden Gabeln c' c'' auf ihre Resonanzkästen, und stimmte die tiefere von ihnen, die fortan „Grundtongabel“ genannt werden soll (während c'' „Oktavengabel“ heißen möge) mit der Lissajousschen Vergleichsgabel in die reine Oktave, sodaß die Oktavenfigur im Mikroskop sich nicht änderte. Dann wurde c'' um ein gewisses Maß verstimmt.

Die Erregung der Lissajousschen Stimmgabel geschah nicht auf elektrischen Wege, sondern wie die der beiden anderen Gabeln, mittels eines mit einem Tuch überzogenen Korkhammers.

Die Versuche hatten das schon bekannte Resultat. Die Schwebung trat am besten hervor, wenn die Oktavengabel schwächer angeschlagen wurde, als die Grundtongabel. Doch schien mir der Charakter der Klangveränderung, solange beide Gabeln auf ihren Resonanzkästen standen, nicht ganz klar zu Tage zu treten.

Ich hängte daher späterhin jede Gabel ohne Resonanzkasten in folgender Weise auf: Auf einem dünnen dreieckigen Holzbrettchen, von den Seitenlängen 11:11:8 cm, war ein starkes Stück festen Korkes aufgenagelt, sodaß das Brettchen hiermit in den Arm eines eisernen Statives eingeklemmt werden

konnte. Von den Ecken dieses Brettchens führten drei gleich lange Kautschukschläuche zu einem gleichen hinunter, durch das von unten her der Stiel der Stimmgabel geführt und von oben mittels der Schraubenmutter fest angezogen werden konnte.

Bei solcher Aufhängung gaben die Stimmgabeln gar keinen Schall, außer durch Luftleitung, ab. Nur in nächster Nähe konnte man ihr Tönen wahrnehmen. Ich stellte demnach die beiden Stative so an, daß die Gabeln, ohne sich zu berühren, dicht nebeneinander und zwar mit den vier Zinken in einer Ebene hingen, und führte zwischen beide Gabeln ein kleines Glasröhrchen von 6 mm Durchmesser ein, von dem aus ich einen 1 m langen Schlauch zum Ohre leitete. In dieser Weise beobachtet, kam der Charakter der Klangveränderung viel deutlicher zu Gehör. Ich erkannte, daß die Veränderung darin bestand, daß in dem Takte, wie ich die Oktavengabel verstimmt hatte, jedesmal die *Oktave* des Klanges einmal *schwächer und stärker* wurde, daß der *Grundton* dagegen immer *seine anfängliche Stärke beibehielt*. Nur bei ungenügender Aufmerksamkeit konnte man durch Kontrastwirkung zu dem Glauben verleitet werden, daß auch der Grundton seine Intensität ändere.

Alle diese Versuche weichen von den bisher üblichen, namentlich denen Prof. Hermanns, nur insoweit ab, daß ich meistens die Oktavengabel, er jedoch die Grundtongabel um ein gewisses Maß verstimmte. Er erhielt also doppelt so viele Schwebungen der Oktavengabel mit der Grundtongabel, als wie diese mit der rein gestimmten Grundtongabel gab; ich dagegen bekam überall die gleiche Anzahl von Figurenwechseln und Schwebungen. Weil dies die Überlegungen wesentlich einfacher gestaltet, habe ich meine Methode späterhin auch beibehalten. Doch habe ich es nicht unterlassen, znnächst auch Versuche in der üblichen Art durchzuführen, und zwar mit demselben objektiven Versuchsergebnis wie Hr. Prof. Hermann.

Es muß nach alle diesem als sehr wahrscheinlich gelten, daß die auftretende Klangveränderung beim Intervall der verstimmten Oktave von dem Schweben der Oktavengabel mit einer von der Grundtongabel mit erzeugten Oktave herrührt. Denn eine Klangveränderung, die auf Phasenwechsel beruht,

würde doch wohl am stärksten bei gleicher Amplitude beider Töne zu erwarten sein, während dies durchaus nicht der Fall ist. Hierzu kommt ferner, daß aus der Methode, die aufgehängten Gabeln mit einem Röhrchen zu beobachten, sich mit Sicherheit der Charakter der Klangveränderung als derart ergibt, daß nur die Oktave stärker oder schwächer wird, während der Grundton unverändert forttönt. Von einem Alternieren beider Töne ist nicht die Rede.

Die wichtige Frage ist nun also, das Auftreten der Oktave bei Stimmgabeln physikalisch, und zwar durch Experiment und Theorie, genau zu analysieren. Bevor ich diesem Problem direkt näher trat, stellte ich mir zunächst die *Frage, in welcher Phase die Oktave der Stimmgabel zu ihrem Grundton steht.*

Es hat sich mir gezeigt, daß die Lösung dieser scheinbar abliegenden Voruntersuchung gerade zur Lösung des Hauptproblems beiträgt.

Die Feststellung der Phase der Oktave ist mit Berücksichtigung folgender Überlegungen möglich:

1. Wenn sich *eine* Stimmgabel *A* schwingend vor der mit dem Vibrationsmikroskop versehenen Lissajouschen Gabel *L* befindet, so sieht man an den Figuren direkt die Phasen zwischen *A* und *L*.

2. Wenn sich gleichzeitig *zwei* Stimmgabeln *A* und *B* in der geschilderten Lage befinden, so läßt sich aus den zwei Figuren ein Rückschluß auf die Phase zwischen *A* und *B* machen, und zwar vereinfacht sich dieser Rückschluß wesentlich dann, wenn die eine Stimmgabel, etwa *A*, ein harmonisches Intervall mit *L* bildet und also ihre Figur stillsteht.

3. Es sei nun unter *A* die Grundtongabel (*c'*), unter *B* die Oktavengabel (*c''*) verstanden. Dann ergibt sich die Phase der von der Grundtongabel miterregten Oktave zu deren Grundton in folgender Weise: Wenn beim gleichzeitigen Erklängen von Grundtongabel *A* und verstimmter Oktavengabel *B* eine Schwebung der Oktave auftritt — denn als solche hat sich die Klangveränderung herausgestellt —, so ist sicher die Oktavengabel *B* mit der von der Grundtongabel *A* erregten Oktave in dem Augenblick, wo die Oktave stark war, in gleicher, wo sie schwach war, in entgegengesetzter Phase gewesen.

Solche Momente müssen wir also akustisch und optisch fixieren, d. h. wir müssen die Phase der beiden Stimmgabeln *A* und *B* untereinander für den Augenblick feststellen, wo die gehörte Oktave in der Schwebung ihr Maximum hatte. Für solchen Augenblick gibt die Oktavengabel auch die Phase der Obertonoktave an.

Praktisch ist jene oben gestellte Versuchsbedingung, beide Gabeln gleichzeitig im Gesichtsfelde des Lissajousschen Mikroskopes zu beobachten, schwer durchführbar. Denn gerade bei diesem wichtigen Versuche muß man ganz sicher sein über den Weg, auf dem die Töne in das Ohr gelangen; daher muß jedes direkte Festklemmen der Gabel vermieden werden. Dabei könnte nämlich einerseits das Stativ zum Tonleiter werden, andererseits könnte es auch als Resonator auf die Periode der Stimmgabel variierend einwirken.

Ich hängte daher beide Stimmgabeln getrennt in der oben beschriebenen Weise an Kautschukschläuchen auf und brachte sie einander so nahe, wie es ohne Berührung der Gabeln und Brettchen angehen konnte; dann schob ich das Lissajoussche Mikroskop schnell von der einen zur anderen Gabel hinüber. Der Abstand der nebeneinander hängenden Gabeln betrug im Durchschnitt 3—4 cm. Vorher stimmte ich, wie schon oben, die Grundtongabel absolut rein mit der Lissajousschen, so daß sich die Figur während einer Minute nicht änderte.

Um eine möglichst große Garantie für die Richtigkeit dieser wichtigen Versuche zu haben, ist auch der Temperaturkoeffizient der Stimmgabeln berücksichtigt worden. Er wurde durch schon drei Stunden vorher konstant gehaltene Temperatur im Zimmer (20°) eliminiert. Auch gegen strahlende Wärme wurden die Gabeln, und zwar durch einen Schutzmantel von Nickelpapier, geschützt.

Ferner ist zu beachten, daß viele der Lissajousschen Figuren mehrdeutig sind. Eindeutige Resultate gaben also auch nur die eindeutigen Figuren, d. h. bei den hier in Betracht kommenden Intervallen der Oktave und Doppeloktave die Parallelbögen einerseits und die Σ artigen Figuren andererseits.

Endlich mußte volle Sicherheit darüber herrschen, zu wissen, auf welchem Wege die Töne in das Ohr gelangten.

Dies wurde dadurch erreicht, daß der von einer oder von zwei Glasröhrchen aufgenommene Ton der Gabeln durch einen sich mittels Gabelstücks in zwei teilenden Kautschukschlauch in die Ohren geleitet ward. Jedes Schlauchende wurde dann einem Ohre mit Siegelack genau eingepaßt und die Längen der Schläuche so gewählt, daß darin eine halbe Wellenlänge der verwendeten Töne vermieden wurde.

Die Zeit eines ganzen Versuches betrug nach dem Anschlagen der Gabeln ungefähr 20 Sek., oder nach Wunsch länger. Es erfordert allerdings erst einige Übung und Gewandtheit, die beiden aufgehängten Gabeln nach dem Anschlagen durch Berührung des Aufhängebrettchens gleich ganz in Ruhe zu bringen, und auch das Ohr muß sich erst an die genaue Beobachtung der recht kleinen Tonintensitäten gewöhnen.

Die Versuche wurden in vier wesentlich verschiedenen Anordnungen durchgeführt: Zwei mit einfachem Aufnahme-röhrchen der Töne, zwei mit doppeltem, von denen sich noch jede wieder durch die Stellung der Röhrenmündungen zu den Zinken unterschied. Doch kann ich auf die Einzelbeschreibung dieser Versuche, die sich in der Dissertation ausführlich finden, verzichten und zwar schon darum, weil, wenn sie auch allerdings für mich grundlegend, zwingend und unmittelbar beweisend waren, ich später angestellte Versuche schildern will, die dasselbe Resultat auf die allereinfachste Weise erkennen lassen.

Das Resultat dieser hunderte von Malen durchgeführten Versuche war folgendes:

An welcher Stelle vor den Zinken der Stimmgabel ich auch immer den Klang der Grundtongabel in das Glasröhrchen eintreten ließ, immer ergab sich als Phase des Druckes zwischen deren Grundton und Oktave die Phase Null, d. h. überall beginnt mit dem positiven Druck des Grundtones auch positiver Druck der Oktave. Dann muß die Oktave also auch *zu derselben Zeit* überall in derselben Phase sein. Dies bedeutet, es geht z. B. Verdichtung gleichzeitig nach allen Seiten aus. *Die Zinken mußten sich also*, falls diese selbst die Oktavenbewegung transversal ausführten, *im Oktaventakte zugleich nach innen und nach außen bewegen*. Dies ist ein *Unding*. *Folglich*

kann die Oktave kein aus der transversalen Schwingungsbewegung der Zinken sich ergebender Oberton der Stimmgabel sein.

Danach bleiben noch *drei Möglichkeiten* offen: Erstens könnte die Oktave das *Resultat einer longitudinalen Schwingung* der Zinken sein, oder zweitens das einer *Volumenschwingung*, d. h. beruhend auf Expansion und Kompression der Zinken. Diese beiden Schwingungsarten ergeben aber, wenn mechanisch auch vielleicht zulässig, doch kein so einfach harmonisches Verhältnis zur Transversalschwingung, wie das der Oktave, sondern wären unharmonisch.

Als dritte Möglichkeit bleibt die, daß *die Oktave erst in der Luft*, durch deren Schwingung, *erzeugt wird.* —

Bevor ich auf die Erklärung der Oktave weiter eingehe, seien hier zunächst noch die Versuche angeführt, die die Richtigkeit der gewonnenen Resultate auf die allereinfachste Weise dartun.

Wenn nämlich die Oktave bei Stimmgabeln auftritt, und zwar überall in gleicher Phase, so muß sich dies auch in einfacherer Weise, wie bei der Oktavenschwebung, durch direkte Versuche zu erkennen geben.

Direkte Beobachtung der Oktave bei Stimmgabeln.

I. Beobachtungen an nur einer Stimmgabel.

Zur Beobachtung der Stimmgabeln wandte ich auch hier mit großem Vorteil die, wie ich nachträglich in der Literatur gefunden habe, schon von Kiessling¹⁾ und Stefan²⁾ gebrauchte Methode an, nämlich die Methode, die Zinken der Stimmgabeln direkt mit einem Röhrchen zu hören, von dem man einen oder zwei gleich lange Kautschukschläuche in das Ohr leitet. Ein Doppelröhrchen aber ist, soweit ich weiß, noch nicht zu diesem Zwecke verwendet worden. Dagegen hat gerade diese Modifikation der Versuche mich zur Auffindung von manchem Neuen geleitet. Bei den hier folgenden Versuchen sind zur Aufnahme der Töne zwei einfache Röhrchen mit 4 mm innerem Durchmesser benutzt worden, von denen eines in eine 2 mm

1) K. Kiessling, Pogg. Ann. 130, p. 177. 1867.

2) M. J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, mathem. Klasse 61. 2. Abt. p. 491. 1870.

dünne Spitze ausgezogen war. Ferner wurde ein Doppelröhrchen mit parallelen Gabelenden verwandt und diese, wenn erforderlich, durch zwei Ansatzstücke mittels Kautschukzwischenstücken verlängert.

Um die gefundenen Resultate besser formulieren zu können, diene folgende schematische Zeichnung:



Die beigesetzten Buchstaben deuten die Stellungen der Röhrenmündungen an. Die ersten Beobachtungen führte ich an der schon bei der Oktavenschwebung benutzten Stimmgabel Ut_3 (c') aus.

a) Versuche mit einfachem Röhrchen.

Ich hängte die zu prüfende Stimmgabel in der oben beschriebenen Weise in dem Brettchen mit Kautschukschläuchen auf, schlug sie mit dem Korkhammer an und näherte den Zinken bis auf 3—4 mm zunächst das einfache Glasröhrchen, von dem der Schall in das Ohr geleitet ward. Es ist schon vornherein zu erwarten, daß man so die Oktave nur da wird hören können, wo der Grundton nicht vorhanden ist. Also ergaben sich die Punkte: b , f , h , k .

Von b und f konnte ich mit der Röhrenmündung noch eine ganze Strecke an den Zinken der über Kopf hängenden Gabel hinaufgehen; immer noch war dort die Oktave deutlich zu hören. Mit überraschender Deutlichkeit ist die Oktave bei h und k , direkt unter den Zinken, zu hören. Geht man mit dem Röhrchen an den bezeichneten Stellen etwas weiter von den Zinken ab, so erlischt die Oktave sehr schnell. Ferner ist mit dem einfachen Röhrchen noch ein Klangunterschied zwischen den Stellungen a und d zu vernehmen. Da bei d der Grundton in doppelter Stärke wie in a wirkt, die Oktave aber wegen des größeren Abstandes nur wenig vernehmbar ist, so hört man in a die Oktave deutlich aus dem Klange

heraus, während bei d vergleichsweise nichts von ihr zu hören ist.

b) Versuche mit Doppelröhrchen.

Hier benutzte ich das Doppelröhrchen mit parallelen Gabelenden. Die Oktave war bei diesen Versuchen deutlich zu hören, wenn sich die Röhrchen befanden in

$$a-c, a-e, e-g, c-g; \quad b-f, h-k, b-k, h-f.$$

Dagegen trat der Grundton stark hervor in den Stellungen: $c-e, a-g$. Aus diesen Versuchen geht klar hervor, daß an all den Stellen, wo sich der Grundton in entgegengesetzter Phase befindet, die Oktave in gleicher Phase nachbleibt. Nun ließe sich vielleicht einwenden, daß die Oktave nur an den Außenseiten der Zinken erregt würde. Auch dann könnte sie in den Stellungen $a-c, a-e$, sowie $e-g, c-g$ auftreten, da sich dort der Grundton vernichtet; sie käme dann eben nur von a und andererseits von g her, und die Behauptung der gleichen Phase ließe sich hierdurch nicht beweisen. Aber gegen das Nichtvorhandensein der Oktave an den Innenseiten der Zinken spricht der Umstand, daß man mit dem Doppelrohr an den bezüglichen Stellen die Oktave überall stärker hört, als mit dem Einzelrohr an den Interferenzstellen des Grundtones. Zweitens spricht für die Behauptung der Gleichheit der Phase der Versuch $h-k, b-f$, sowie $b-k, h-f$. Befinden sich die Enden des Doppelrohres in diesen Stellungen, so ist die Oktave nicht etwa schwächer, als in den Einzelstellungen, oder gar erloschen, sondern sie tritt verstärkt auf. Also befindet sie sich dort in gleicher Phase.

II. Beobachtungen an zwei Stimmgabeln von annähernd gleicher Höhe.

Hierzu bediente ich mich zweier neuer Königscher Stimmgabeln von der Höhe $R e_3$ (d'). Sie hatten beide genau dieselben Dimensionen, waren 13 cm lang, 0,6 cm dick, 1,4 cm breit. Der freie Abstand der parallelen Zinken betrug ebenso wie bei den oben beschriebenen Gabeln 1,9 cm. Auch hier hängte ich die eine Stimmgabel, um nicht durch einen immer tönenden starken Grundton behindert zu sein, an den Kautschukschläuchen über Kopf auf und näherte ihr die

andere, während ich sie mit dem am Stiele angebrachten Holzstückchen aufrecht in der Hand hielt. Dadurch war jede äußere Resonanz der Gabeln verhindert. Die Schwebungsdauer betrug bei diesen Versuchen etwa 4 Sek. Mögen die Zinken der einen Stimmgabel durch a und b , die der anderen durch a_1 und b_1 bezeichnet werden, so brachte ich beide Gabeln anfangs zueinander in die Stellung:

$$a \quad b \quad a_1 \quad b_1.$$

Den Abstand $b \ a_1$ machte ich ungefähr gleich 5 mm. Zwischen b und a_1 führte ich die Mündung des in eine Spitze auslaufenden einfachen Glasröhrchens ein und klemmte es an einem Nebenarm des Aufhängestatives der Stimmgabel in der erforderlichen Stellung fest. Wenn beide Stimmgabeln mit dem Hammer angeschlagen waren, hörte man im Takte der hervorgebrachten Verstimmung durch den Schlauch den Grundton der Gabeln abwechselnd anwachsen und verschwinden. Im Augenblick seines Verschwindens aber trat die Oktave sehr deutlich hervor. Für meine Behauptung der gleichen Phase der Oktave beweist dieser Versuch nichts, da ich zwei gleiche (äußere) Kanten der Zinken einander genähert habe; diese enthalten natürlich die Oktave in gleicher Phase zum Grundton. Auch wenn die Oktave aus der Eigenbewegung der Zinken hervorginge und also innen und außen in entgegengesetzter Phase zum Grundton stände, würde die hier beobachtete Erscheinung auftreten. Dieser Versuch beweist nur abermals die Existenz der Oktave.

Wesentlich anders werden die Verhältnisse, wenn ich folgende Stellung der beiden Stimmgabeln wähle:

$$a \quad a_1, \quad b \quad b_1.$$

Ich will gleich das hier erhaltene Resultat voranstellen: Sowohl zwischen a und a_1 , wie zwischen b und b_1 , wie auch zwischen a_1 und b tritt während der Auslöschung des Grundtones die Oktave hervor. Die erstgenannten beiden Fälle sind gleichartig. Jedesmal wirken eine Außenseite und eine Innenseite der Stimmgabelzinken zusammen. Der zuletzt genannte Versuch, wo das Röhrchen sich zwischen a_1 und b befindet, ist dem in der vorhin geschilderten Nebeneinander-

stellung der Stimmgabeln in gewisser Weise analog. Hier sind zwei Innenseiten der Zinken einander zugekehrt. Wenn also dann die Oktave bei Auslöschung des Grundtones auftritt, so ist das ein schlagender Beweis dafür, daß die Oktave auch an der Innenseite der Zinken erregt wird. Für die Phase aber sagt dieser Fall ebenso wenig etwas aus wie jener der Nebeneinanderstellung der Gabeln.

Mit Benutzung des Resultates von $a_1 - b$ können wir jedoch weiter schließen: Da zwischen aa_1 und zwischen bb_1 auch die Oktave bei Auslöschung des Grundtones auftritt, so muß sie an der Außen- und Innenseite der Zinken in gleicher Phase zum Grundton stehen. Gerade dies war zu beweisen.

Kurz sei hier darauf hingewiesen, daß ich bei der oben angeführten einfachen Nebeneinanderstellung der Gabeln noch eine an sich wertvolle und interessante Beobachtung habe machen können. Man kann bei diesem Versuch mit der Dauer einer Schwebung viel weiter gehen, als anfangs zu erwarten. Wurden die Zinken einander bis auf etwa 5 mm nahe gebracht, so habe ich noch Schwebungen gut feststellen können, die eine Dauer von je 80—90 Sek. hatten. Ja, ich habe diese Grenze sogar noch auf das Doppelte erweitert, indem ich die in der Hand gehaltene Gabel um 90° drehte, nachdem ein Erlöschen des Grundtones beobachtet worden war. Dadurch tritt dies nämlich schon nach der halben Schwebungszeit wieder ein. Also konnten so *allein durch das Ohr Schwebungen von der Dauer von je 160—180 Sek. beobachtet* werden.

Die zum Beweis der Oktavenphase bei Stimmgabeln angeführten Versuche werden genügen, um das Resultat sicher zu stellen. Es ist jetzt nötig, zu einer theoretischen Begründung der durch diese Versuche gewonnenen Tatsachen zu gelangen.

Erklärung der Oktave.

Daß die beobachtete Oktave nicht als Oberton der Stimmgabel im gewöhnlichen Sinne gefaßt werden darf, habe ich gezeigt.

Der erste, der überhaupt die Oktave bei Stimmgabeln beobachtet hat, ist, soweit ich die Literatur hierüber rück-

wärts verfolgen konnte, 1839 Roeber¹⁾ gewesen. Er unterscheidet die beobachtete Oktave sehr wohl von den vorher behandelten Klirrtönen und erkennt, daß sie sich ebenso wenig aus den bekannten Schwingungsgesetzen der Stäbe erklären lasse. Demnach läßt er die Frage nach ihrer Entstehung offen. Fernerhin machte A. Seebeck²⁾ Beobachtungen an Glocken und Stimmgabeln, aus denen hervorgeht, daß dabei harmonische Obertöne auftraten. Dann hat auch H. v. Helmholtz³⁾ bei Gelegenheit seiner Arbeiten über Kombinations-töne die Oktave bei Stimmgabeln gefunden. Auf seine Erklärungsweise komme ich gleich zu sprechen. Im Jahre 1866 fand Quincke⁴⁾ durch seine Untersuchungen mit Interferenzröhren die Oktave bei allen daraufhin geprüften Stimmgabeln; eine Erklärungsweise dafür gab er nicht. Eine Erklärung, die ziemlich isoliert dasteht, hat 1870 M. J. Stefan⁵⁾ für die Oktave gegeben. Er sagt, daß bei Stimmgabeln, Klangstäben, Glocken etc. Oktaven an den Interferenzstellen des Grundtones auftraten, die durch periodische Druckschwankungen, bei stärkeren Exkursionen der Luft, in der Mittelebene entstanden. Solange man nur mit einem einfachen Röhrchen die Oktave beobachtet, wie Stefan es tat, muß man freilich meinen, daß sie nur in der Mittelebene auftritt, und der Stefansche Erklärungsversuch scheint berechtigt; beobachtet man jedoch mit einem Doppelrohr, so findet sich, daß die Oktave nicht nur in der Mittelebene, sondern an allen Seiten der Stimmgabel auftritt, was aber seiner Erklärung widerspricht. Sodann gibt Stefan doch auch nur den Grund für das Entstehen der Oktave an, während auch noch andere, höhere harmonische Obertöne an Stimmgabeln etc. beobachtet worden sind. Daher muß man die Stefansche Erklärungsweise zum wenigsten als unzureichend bezeichnen.

Ich habe als Ausgangspunkt zu meiner Erklärung die schon oben zitierte *v. Helmholtzsche Untersuchung über Kom-*

1) Roeber, Doves Repertorium der Physik 3. p. 55. 1830.

2) A. Seebeck, Doves Repertorium der Physik 8. p. 69. 1849.

3) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 99. p. 506 f. 1856.

4) G. Quincke, Pogg. Ann. 128. p. 177 f. 1866.

5) M. J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, math.-naturw. Klasse 61. 2. Abt. p. 491. 1870.

binationsstöne gebraucht. Darin habe ich (p. 506) eine Bemerkung gefunden, aus der hervorgeht, daß er für die an Stimmgabeln auftretenden harmonischen Obertöne eine der hier folgenden ähnliche Erklärung schon als möglichen in das Auge gefaßt hat. Er sagt in Bezug auf diesen Gegenstand: „Ich glaube, daß der Grund dieser Erscheinungen darin zu suchen ist, daß die Schwingungen der betreffenden elastischen Körper bei diesen Versuchen die Grenze überschreiten, innerhalb deren die elastischen Kräfte den Elongationen proportional sind. Daß dadurch harmonische Obertöne entstehen müssen, läßt sich theoretisch durch eine ähnliche mathematische Entwicklung, wie wir sie später für die Theorie der Kombinationstöne geben werden, zeigen.“

Dies spricht Helmholtz im Jahre 1856 aus; dennoch benutzt er diese Erklärung nicht zur Begründung der Oktavenschwebung. Überhaupt spricht er in den drei ersten Auflagen der „Tonempfindungen“ von den Stimmgabeln immer als von Tonquellen mit nur unharmonischen Obertönen, ohne die dabei auftretende Oktave etc. zu nennen.

Ich will im folgenden zeigen, daß man auf dem von Helmholtz angedeuteten Wege zu einer vollgültigen Erklärung aller vorliegenden Erscheinungen kommt. Im besonderen werde ich auch beweisen, daß die Phase der Oktave in der mathematischen Entwicklung mit Berücksichtigung der jeweiligen physikalischen Verhältnisse dieselbe ist, wie die von mir an den Stimmgabeln beobachtete. Helmholtz aber legt, nach jener Bemerkung zu urteilen, bei der Entstehung der harmonischen Obertöne das *Hauptgewicht auf die starken Elongationen* des Punktes. Es fragt sich nnr, wo die Grenze zwischen starken und schwachen Elongationen zu setzen ist. Ich habe die Oktave sowohl an einer Stimmgabel direkt, als auch besonders mit zweien durch die bekannte Oktavenschwebung noch feststellen können, wenn die Gabeln nur sehr leise klangen; nur muß die höhere im Verhältnis zur tieferen immer noch geringer in Schwingung versetzt werden, dann hört ein aufmerksames Ohr ebenso charakteristisch hier die Schwebungen mit kleinen Tonintensitäten, als vorher mit großen. Meine Erklärung hierfür werde ich gleich geben.

Wir können zunächst die mathematische Entwicklung

ganz an die v. Helmholtzsche anlehnen, nur mit dem Unterschied, daß wir nur *ein* erregendes Wellensystem wirken lassen. In der die Stimmgabel umgebenden Luft wählen wir einen beweglichen Punkt von der Masse m . Seine Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t sei x . Auf ihn wirke nun, infolge der Stimmgabelschwingung der äußere periodische Druck: $f \cdot \sin(p t)$ und infolge der Elastizität der Luftteilchen die ihn in die Gleichgewichtslage zurückziehende Kraft k . Diese setzen wir proportional der ersten und zweiten Potenz der Elongationen, also:

$$k = ax + bx^2.$$

Daß hier die zweite Potenz von x mit berücksichtigt werden muß, begründen wir so: Es habe *nicht etwa* x einen *besonders großen Wert*, wie dies für die Kombinationstöne im gewöhnlichen Sinne gilt, wohl aber sei *der konstante Faktor* b *des quadratischen Gliedes groß*. Auch wenn dies eintritt, wird *das quadratische Glied von Einfluß auf die Bewegung des Massenpunktes* m .

Dies bedeutet physikalisch, daß der hin- und herschwingende Massenpunkt sehr *unsymmetrisch* gelagert ist: denn durch großes b wird der absolute Betrag k sehr verschieden bei positiver und bei negativer Bewegungsrichtung des Massenpunktes.

Dies ist, so behaupte ich, in hohem Maße in der Nähe der Stimmgabelzinken der Fall. Zunächst werde aber jetzt die mathematische Entwicklung zu Ende geführt. Ich gebe dem b in der Rechnung vorerst einen positiven Wert. Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes wird nach obigen Voraussetzungen:

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} = ax + bx^2 + f \sin(p t).$$

Setzen wir hierin $x = \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \dots$ und $f = \epsilon f_1$, so können wir die mit gleichen Potenzen von ϵ multiplizierten Glieder einzeln gleich Null setzen:

$$(a) \quad ax_1 + m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f_1 \sin(p t),$$

$$(b) \quad ax_2 + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -bx_1^2,$$

$$(c) \quad ax_3 + m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = 2bx_1x_2 \text{ etc.}$$

Die Integration der ersten Gleichung liefert:

$$x_1 = A \sin \left(t \sqrt{\frac{a}{m} + h} \right) + \frac{f_1}{m p^2 - a} \cdot \sin(p t).$$

Das erste Glied, in das die Integrationskonstanten mit aufgenommen sind, gibt die Bewegung an, die der Massenpunkt annehmen würde, wenn er, einmal aus der Gleichgewichtslage gebracht, sich selbst überlassen wäre. Wir dürfen aber, da diese Bewegung schnell erlischt, A gleich Null setzen und erhalten dann:

$$x_1 = \frac{f_1}{m p^2 - a} \cdot \sin(p t) = u \cdot \sin(p t).$$

Diese Schwingung des Massenpunktes m würde auch eintreten, wenn nur $k = a x$ gesetzt wäre.

Setzt man den Wert von x_1 in die Gleichung (b) ein, so ergibt sich:

$$a x_2 + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -b u^2 \sin^2(p t).$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wiederum mit Weglassung des die Eigenschwingung des Punktes darstellenden Gliedes:

$$x_2 = -\frac{b}{2a} u^2 - \frac{b u^2}{2(4m p^2 - a)} \cos(2 p t).$$

In diesem Gliede stellt der mit $\cos(2 p t)$ versehene Teil die von uns gesuchte Oktave dar.

Für diese haben wir unter Berücksichtigung der jeweiligen physikalischen Verhältnisse die Phase zum Grundton $\sin(p t)$ festzustellen. Dabei wird sich zugleich zeigen, mit welcher Berechtigung wir dem b einen großen Wert beigelegt und infolge dessen die zweite Potenz von x für k mit in die Rechnung eingeführt haben.

Ich denke mir einen Massenpunkt m_1 der Luft in der Nähe der Außenseite der Stimmgabelzinken (links):



k bedeutet eine den Punkt in die Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft, die sich aus der Elastizität der Luftteilchen ergibt. Das x sei positiv gerechnet auf die Zinke

zu (nach rechts). Dann wird offenbar der positiven Bewegung des Massenpunktes eine größere zurückerstrebende Kraft entgegengesetzt, als der negativen. Denn bei positiver Bewegungsrichtung bieten die zwischen dem betrachteten Massenpunkte und der Zinke befindlichen Nachbarpunkte einen Widerstand für die Bewegung, während sie bei der negativen alle leicht ausweichen. Daher muß hier gewählt werden:

$$b > 0,$$

denn dann wird

$$k_{(+x)} = a x + b x^2,$$

$$k_{(-x)} = -a x + b x^2,$$

folglich:

$$|k_{(+x)}| > |k_{(-x)}|.$$

Demnach läßt sich auch die Phase der Oktave zum Grundton an der Außenseite der Zinke berechnen. Hier hat man für x_2 den Wert:

$$x_2 = -\frac{b u^2}{2 a} - \frac{b u^2}{2 (4 m p^2 - a)} \cos(2 p t)$$

und demgegenüber:

$$x_1 = u \sin(p t).$$

Da außer b alle anderen Teile des Koeffizienten als positive Größen betrachtet werden dürfen, so bleibt bei $b > 0$ das obige $-\cos(p t)$ bestehen.

Jetzt legen wir dem $p t$ bestimmte Werte bei:

Ist $p t = 0$, so ist $\sin(p t) = 0$, $-\cos(2 p t) = -1$.

Ist $p t = \frac{\pi}{2}$, so ist $\sin(p t) = 1$, $-\cos(2 p t) = +1$ etc.

Also finden wir als Phase der Bewegung: Die Oktave eilt dem Grundton um $\frac{1}{4}$ ihrer Wellenlänge voraus (Fig. 1).



Fig. 1.



Fig. 2.

Soll aus der Bewegungskurve Fig. 1 die Kurve des in m_1 wirksamen Druckes gefunden werden, so hat man zunächst

beide Bestandteile der Kurve umzukehren, da beide positiven Bewegungsrichtungen negative Drucke in m_1 erzeugen (Fig. 2). Daraus ergibt sich die Druckkurve Fig. 3.



Fig. 3.

Also wird an der Außenseite der Stimmgabelzinken eine Oktave erzeugt, deren Druckkurve zu der des Grundtones in Phase Null steht.

Jetzt denke ich mir einen Massenpunkt m_2 , der Luft an der Innenseite der Zinken, behalte aber die frühere Bewegungsrichtung (nach rechts) als positiv bei:



Hier findet in Bezug auf die Größe der zurücktreibenden Kraft k gerade das Gegenteil von vorhin statt: Jetzt wird der positiven Bewegung des Massenpunktes m_2 nur eine kleine Kraft entgegengesetzt, dagegen der negativen eine weit größere infolge der Zinkennähe. Also ist in diesem Fall zu wählen:

$$b < 0,$$

sodaß

$$k_{(+x)} = ax - bx^2,$$

$$k_{(-x)} = -ax - bx^2,$$

folglich:

$$|k_{(+x)}| < |k_{(-x)}|.$$

Daher erhält jetzt x_2 positive Vorzeichen:

$$x_2 = \frac{bu^2}{2a} + \frac{bu^2}{2(4mp^2 - a)} \cos 2pt.$$

Also muß die Phase zwischen $\sin(pt)$ und $+\cos(2pt)$ festgestellt werden.

Als Resultat ergibt sich durch eine ähnliche Überlegung wie oben, daß die Oktave dem Grundton um $\frac{3}{4}$ ihrer Wellenlänge vorausseilt, also die Bewegungskurve Fig. 4.

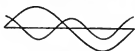


Fig. 4.



Fig. 5.

Bei diesem Falle erzeugen beide positiven Bewegungsrichtungen zugleich positive Drucke in m_2 ; also gewinnt man direkt die Druckkurve der Fig. 5.

Die Phasenverhältnisse in den Druckkurven der Figg. 5 und 3 sind aber die gleichen, da beide Kurven als fortlaufend gedacht werden müssen. Folglich wird auch an der Innenseite der Stimmgabelzinken in der Luft eine Oktavenbewegung erzeugt, deren Druckkurve zu der des Grundtones der Stimmgabel in Phase Null steht. Mithin befindet sich diese Oktave an allen Seiten der Zinken in derselben Phase.

Was nun die Erklärung der Oktave bei Stimmgabeln angeht, so habe ich schon angeführt, daß *Helmholtz* stets das ganze Gewicht auf die Größe der Elongationen legt. Er sagt freilich in der Abhandlung über Kombinationstöne, daß in der Kraftgleichung $k = ax + bx^2$ implicite die Bedingung liege, daß der Massenpunkt unsymmetrisch befestigt sein müsse. Er wendet dies jedoch nur auf das unsymmetrisch gebaute Trommelfell an, um zu beweisen, daß den Kombinationstönen wirkliche Schwingungen des Trommelfelles und der Gehörknöchelchen entsprächen, diese also nicht nur subjektiv in der Empfindungsweise des Hörnerven vorhanden seien.

Aus meiner Entwicklung geht aber, denke ich, vor allem hervor, daß, wenigstens in unserem Falle, auf die Asymmetrie in der Lage des schwingenden Punktes das Hauptgewicht gelegt werden muß, in zweiter Linie erst auf große Elongationen. Ich möchte daher für die von mir beobachteten Töne auch nicht den Namen Kombinationstöne wählen, da es sich einmal hierbei überhaupt nicht um die Kombination von Wellen handelt, und dann auch die Größe der Elongationen hier keine Rolle spielt, sondern habe dafür den Namen **Asymmetrietöne** gewählt.

Der Unterschied zwischen Kombinationstönen und Asymmetrietönen ist also der:

Ist x groß, so entsteht ein **Kombinationston** *mitten in der Luft, wo zwei sehr intensive Töne zusammentreffen.*

Ist b groß, so entsteht ein **Asymmetrieton** *nur an Übergangsstellen (Grenzflächen) der Tonquellen selber.*

Ich habe meine obigen Untersuchungen und die theoretische Entwicklung nur auf die *Asymmetrieoktave* erstreckt. Berücksichtigt man die dritte aufgestellte Differentialgleichung (c), so ergibt sich durch deren Integration die Asymmetrieduodecime etc. Ich glaube daher in meine Erklärung auch die sonst an Stimmgabeln beobachteten höheren harmonischen Obertöne einbegreifen zu dürfen. Es ließe sich auf dem von mir eingeschlagenen Wege aus den höheren Gliedern x_3, x_4 etc. auch die Phase der höheren harmonischen Asymmetrietöne feststellen und dadurch ein Fingerzeig für ihre genauere Beobachtung gewinnen.

Die hier für die Stimmgabeloktave gegebene Erklärung als Asymmetrieton ist, wie man sieht, so allgemein, daß solche Oktave und weiterhin auch die höheren harmonischen Obertöne nicht auf den Schwingungsvorgang bei Stimmgabeln allein beschränkt bleiben darf; vielmehr müssen diese an den Grenzflächen auch noch anderer Tonquellen auftreten, nämlich überall da, wo die Luftteilchen unsymmetrisch hin- und herbewegt werden.

Auch darüber habe ich ausgedehnte Versuche angestellt, allerdings wieder mit Beschränkung auf die Asymmetrieoktave. Diese Versuche sind in der Dissertation ausführlich dargestellt, sollen hier jedoch nur im großen und ganzen behandelt werden. Als Kriterium der Existenz der Asymmetrieoktave, sozusagen als ihre Identitätsreaktion, diente mir immer die Beobachtung, daß diese Oktave überall da, wo sich die Eigentöne der Tonquelle in entgegengesetzter Phase befinden, selbst in gleicher Phase hervortritt.

Zunächst wurde an transversal schwingenden, in ihren Knotenlinien aufgehängten Metallstäben beobachtet. Sowohl allein als auch in der Erscheinung der Oktavenschwebung, die der bei Stimmgabeln ganz analog ist, war die Asymmetrieoktave zu beobachten.

Sodann wurden kreisförmige, transversal schwingende Metallplatten untersucht. Auch hier ergab sich, und zwar nicht weniger für die Oberschwingung, als für die Grundschwingung der Platten, die Oktave, die immer in gleicher Phase resultierte, wenn man sich an irgend einer Stelle der Platten von unten und oben zugleich mit einem Doppelröhrchen näherte.

Schließlich haben auch einige Metall- und Darmsaiten die Erscheinung der Asymmetriektave gegeben, aber nicht ganz so deutlich wie die anderen Tonquellen. Denn einmal ist hier die Asymmetrie der schwingenden Luftteilchen nicht so bedeutend wie etwa bei den Stimmgabeln, und dann ist es auch schwer, eine Saite so in Schwingung zu versetzen, daß sie nicht schon an sich durch ihre Schwingungsform die Oktave miterzeugt.

Somit ist gezeigt worden, daß die betreffs der Oktave bei Stimmgabeln gewonnenen Resultate ganz allgemeine Bedeutung und Gültigkeit haben.

Durch die vorstehenden Untersuchungen bin ich also zu dem Ergebnis gekommen, daß die Stimmgabeln in der Tat harmonische Obertöne haben, wenn man sie so nennen will, nämlich die in ihrer Zinkennähe auftretenden Asymmetrietöne. Wenn demnach zwei Stimmgabeln, die angenähert eine Oktave miteinander bilden, eine schwebungsartige Klangveränderung hören lassen, so ist eine zureichende Erklärung hierfür die, daß die Oktavengabel mit der von der Grundtongabel in der Luft erzeugten Asymmetriektave Schwebungen des Einklangs bildet.

In Hinsicht des Resultates der früher mitgeteilten Untersuchung ist demnach zu bemerken, daß auch hier keine Ausnahme des Phasengesetzes vorliegt.

Es geht aus der angegebenen Entstehungsweise der Oktave auch hervor, daß es zur *Erzeugung reiner Töne*, d. h. reiner Sinusschwingungen der Luft, *durchaus nicht genügt, eine Tonquelle mit reinen Sinusschwingungen zu haben*; denn jene Asymmetrieverhältnisse treten bei allen bekannten Tonquellen dort auf, wo die Abgabe der Schwingung von der Quelle an die Luft stattfinden soll, also werden dort auch überall Asymmetrietöne zu erwarten sein. Somit darf hier die Behauptung

aufgestellt werden, daß das Problem, reine Töne darzustellen, überhaupt noch nicht gelöst ist.

Zum Schlusse möge es mir gestattet sein, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. P. Lenard, für die stets bereitwillige Anregung und Hülfe, die er mir während meiner Untersuchungen hat zu teil werden lassen, an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen.

(Eingegangen 3. Februar 1908.)

3.

V. Oberflächenspannung und Zellenbildung bei Leimtannatlösungen; von G. Quincke.¹⁾

§ 97. *Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze von Wasser, wässrigen Lösungen von β -Leim und Leimtannat.* Nach M. Traube²⁾ löst sich β -Leim (vgl. oben § 86) in konzentrierter Gerbsäure reichlich schon bei gewöhnlicher Temperatur, noch weit mehr in der Wärme. Die Lösung, mit Wasser verdünnt, trübt sich stark unter Ausscheidung von gerbsaurem Leim, da die Löslichkeit des Leimes in Gerbsäure mit der Verdünnung rasch abnimmt.

Umgekehrt löst sich die Gerbsäure in konzentriertem β -Leim um so weniger, je verdünnter der letztere ist. Wasser löst den gut gewaschenen gerbsauren β -Leim kaum spurweis.

Mischt man verdünnte Lösungen von Leim und Gerbsäure, so erhält man einen unlöslichen Niederschlag von Leimtannat, der nach H. Davy und Mulder³⁾ auf 100 Teile Leim 135 oder 85,2 Teile Gerbsäure enthält, je nachdem die Gerbsäurelösung oder die Leimlösung in großem Überschuß verwandt wird. Die erste Verbindung soll aus 1 At. Leim und 1 At. Gerbsäure, die zweite aus 3 At. Leim und 2 At. Gerbsäure bestehen.

Diese Niederschläge werde ich als *saures* oder *basisches Leimtannat* bezeichnen, ohne damit über die chemische Konstitution dieser Substanzen eine bestimmte Meinung auszusprechen, da es schon fraglich ist, ob sie überhaupt eine bestimmte chemische Zusammensetzung haben.

1) G. Quincke, Fortsetzung von Ann. d. Phys. 7. p. 57—96, 631—682, 701—744. 1902; 9. p. 1—48, 793—836, 969—1045. 1902; 10. p. 478—521, 673—703. 1903.

2) M. Traube, Reichert und du Bois-Reymonds Arch. 1867. p. 97; Moritz Traube, Gesammelte Abhandlungen p. 213. 8°. Berlin 1899.

3) G. J. Mulder, Erdm. Journ. 17. p. 337. 1839.

Konzentrierte Lösungen von gerbsaurem Leim scheinen bei starker Verdünnung mit Wasser durch Hydrolyse in unlöslichen sauren gerbsauren Leim und Leimlösung gespalten zu werden, ähnlich wie konzentrierte Lösungen von neutralen ölsauren Alkalien bei Zusatz von Wasser in unlösliches saures Alkali und freies Alkali zerfallen.¹⁾

Ich werde zeigen, daß diese Niederschläge von Leimtannat zuerst flüssig sind, wie alle Niederschläge (vgl. § 23) und erst nach einiger Zeit fest werden. Solange der Niederschlag flüssig ist, herrscht eine Oberflächenspannung an seiner Grenzfläche mit der ihn umgebenden wässerigen Lösung von Leim oder Gerbsäure, und soll er in diesem Zustande der Kürze wegen „*ölartiges Leimtannat*“ heißen.

Wird nach Löwig²⁾ zu einer Lösung von Leim eine Auflösung von Gerbsäure gesetzt, so entsteht sogleich ein Niederschlag, welcher sich zu einer zähen Masse vereinigt. Dieselbe ist in feuchtem Zustande weich und elastisch; getrocknet weiß oder grau, undurchsichtig, in Wasser unlöslich, und geht in Fäulnis über.

M. Traube³⁾ digerierte 3 g Gelatine in der Wärme unter Ersatz des verdampften Wassers mit 0,7 g Gerbsäure und 10 g Wasser und erhielt nach dem Erkalten unter Abscheidung eines zusammenhängenden Gerinnsels eine etwas trübe Lösung, die selbst bei starker Konzentration nicht koagulierende basisch gerbsaure Leimverbindung enthielt. Durch Wasser wurde sie milchig trübe unter Abscheidung von gerbsaurem Leim. In Gerbsäure gebracht bildete sie mit Leichtigkeit Zellen (vgl. unten §§ 100, 101), deren Inhalt aber bei endosmotischer Wasseraufnahme trübe wird durch die oben erwähnte Abscheidung von gerbsaurem Leim.

Eine wässerige Lösung von β -Leim, in welcher Gerbsäure oder reines Tannin (vgl. oben § 92) aufgelöst ist, werde ich kurz als eine Lösung von β -Leimtannat bezeichnen.

Die „zähe Masse“ von Löwig und das „zusammenhängende Gerinnsel“ von Traube ist eine ölartige, sehr klebrige β -Leim-

1) W. Heintz, Zoochemie p. 439. 1853; vgl. G. Quincke, Wied. Ann. 53. p. 593. 1894.

2) C. Löwig, Organische Chemie 1. p. 709. 1846.

3) M. Traube, Gesammelte Abhandlungen p. 220. Berlin 1899.

tannatlösung, welche bei der Bildung der künstlichen Zellen von Traube (vgl. unten § 100) eine wesentliche Rolle spielt.

Eine wässrige Lösung von β -Leim löst um so mehr Gerbsäure zu einer klaren Flüssigkeit auf, je konzentrierter und heißer die Leimlösung ist. Eine reine β -Leimlösung von solchem Leimgehalt, daß sie bei gewöhnlicher Temperatur gelatiniert, kann durch Zusatz von Gerbsäure in eine Flüssigkeit verwandelt werden.

Die folgende Tabelle gibt für eine Reihe Leimtannatlösungen die Zusammensetzung und das spezifische Gewicht bei mittlerer Temperatur, etwa 20°; für einige Lösungen auch den Brechungsexponenten n_D für Natriumlicht und die Oberflächenspannung α_{11} gegen Wasser.

Klare Lösungen von β -Leimtannat.

Nr.	β -Leim	Gerbsäure	Wasser	Brechungs- exponent n_D	Spez. Gewicht	Oberflächen- spannung an der Grenze mit Wasser. α_{11}
Leimtannatlösung A mit käuflicher Gerbsäure und β -Leim.						
1	100 g	3,77 g	875,6 g	—	1,089	—
2	100	4,08	127	—	1,125	—
3	100	4,03	73	—	1,200	0,287...0,141 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
4	100	26,98	51,6	1,467	1,217	0,245...0,126 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
Leimtannatlösung B mit reiner käuflicher Gerbsäure und β -Leim.						
5	100 g	10 g	80,71 g	—	1,207	0,066
6	100	20,65	66,72	—	1,232	—
7	100	19,97	90,72	—	1,223	—
8	100	27	96,8	—	—	—
Leimtannatlösung C mit reinem Tannin (Curtius) und anderem β -Leim.						
9	100 g	5 g	72,16 g	undurchsichtig	1,2128	—
10	100	10	94,04	1,423	1,1868	—
11	100	20	96,40	1,409	1,1763	—
12	100	30	79,80	1,460	1,2148	—

Trockene Gerbsäure wurde mit einem Glasstabe in die Leimlösung eingerührt, welche in einem Probierrohr auf 100° erhitzt war. Wurde dieser Leimtannatlösung, Nr. 1 der Tabelle, die doppelte Menge Gerbsäure zugesetzt, so war bei 100° die

Lösung noch klar, nach dem Abkühlen trübe von kugligen Leimtropfen.

Beim Erwärmen wird eine Leimtannatlösung weniger klebrig. Ölartiges Leimtannat, an der Luft eingetrocknet und hart geworden, sieht aus wie brauner Schellack, wird aber durch Reiben mit Tuch nicht wie Schellack negativ, sondern positiv elektrisch. Mit Katzenfell gerieben, wurden beide negativ elektrisch.

Konzentrierte Lösungen von Leimtannat in Wasser, wie Nr. 4, bilden eine öltartige, sehr zähe Flüssigkeit, die Fäden zieht, und so klebriger und dunkelbranner ist, je weniger Wasser sie enthält.

Leimtannatlösung Nr. 2 gab noch keine Fäden, gelatinierte bei Wasserverlust, trocknete auf einem Uhrglas zu einer helleren braunen Masse ein, die unter dem Polarisationsmikroskop bei starker Vergrößerung am Rande zahlreiche kleine, auf Kugelflächen oder Schaumwänden verteilte Kristalle zeigte und sich in Wasser ohne Tropfenbildung auflöste.

Die Leimtannatlösung Nr. 4 ließ nur in dünnen Schichten die orangen und gelben Strahlen des Spektrums durch. Eine dünne Schicht zwischen Flintglasprismen untersucht, gab mit totaler Reflexion den Brechungsexponenten 1,4671 für Natronlicht.

Unter Wasser hält sich eine öltartige Lösung von Leimtannat (Nr. 3 oder 4) tage- und monatelang scheinbar un geändert. Das darüberstehende Wasser erscheint sehr schwach gelblich gefärbt und schmeckte kaum merklich nach Gerbsäure.

Um die Oberflächenspannung an der Grenze von öltartigem Leimtannat Nr. 4 und Wasser zu bestimmen, wurde mit einem Kathetometermikroskop der vertikale Abstand von Kuppe und Bauch eines flachen Tropfens gemessen in einem mit Wasser gefüllten Würfeltrog aus zusammengeschmolzenen Spiegelglasplatten, dessen Boden mit Quecksilber bedeckt war. Die öltartige Flüssigkeit floß aus einem weiten Glastrichter unter Wasser aus und bildete nach 2 Min. einen flachen Tropfen, dessen Höhe (zwischen Kuppe und Bauch gemessen) kurze Zeit zunahm, und dann in 5 Min. von 1,5 mm auf 1,023 mm sank, während der Durchmesser von 21,5 auf 24 mm zunahm.

Aufbringen einer 5 proz. Gerbsäurelösung auf die Tropfenoberfläche änderte die Tropfenhöhe nicht merklich. Hiernach nimmt die Oberflächenspannung an der Grenze von ölarartigem Leimtannat Nr. 4 mit Wasser in 5 Min. von 0,245 auf 0,126 mg/mm ab.

Ähnliche Messungen an einem flachen Tropfen des ölarartigen Leimtannats Nr. 3 unter Wasser gaben die Oberflächenspannung 0,237 mg/mm, die allmählich auf 0,141 mg/mm sank. Die Flüssigkeit Nr. 3 war viel klebriger als die Flüssigkeit Nr. 4 und wohl 200 mal oder mehr klebriger als Wasser.

Für ölarartiges Leimtannat mit ganz verschiedenem Gerbsäuregehalt (4—25 Teile Gerbsäure auf 100 Teile β -Leim) ist also die Oberflächenspannung an der Grenze mit Wasser unabhängig vom Gerbsäuregehalt und nahezu dieselbe, wie an der Grenze von Olivenöl und Alkohol, für welche ich früher ¹⁾ mit derselben Methode 0,226 mg/mm gefunden habe.

Mit angeblich reiner Gerbsäure aus anderer Bezugsquelle wurde das Leimtannat Nr. 5—8 mit erheblich kleinerer Grenzflächenspannung α_{11} gegen Wasser erhalten. Diese Lösungen waren weniger klebrig als Nr. 1—4 bei gleicher Konzentration und bildeten beim Ausziehen nur kurze Fäden. Dasselbe gilt für die Leimtannatlösungen aus reinem Tannin Nr. 9—12.

Da sich ölarartiges Leimtannat in wässrigen Leimlösungen von genügendem Leimgehalt auflöst, und da die Leimlösung in Wasser löslich ist, so ist die

Oberflächenspannung an der Grenze von ölarartigem Leimtannat und konzentrierter Leimlösung gleich Null

und die

Oberflächenspannung an der Grenze von Leimlösung und Wasser gleich Null.

Die Grenzfläche von ölarartigem Leimtannat und 10 proz. Lösung von β -Leim zeigt noch eine merkliche Oberflächenspannung. Eintrocknete Fäden aus ölarartigem Leimtannat lösten sich in 20 proz. β -Leimlösung, bildeten aber in 10 proz. β -Leimlösung ölarartige Fäden mit Anschwellungen und Einschnürungen, deren Wände kugelförmige Hohlräume enthielten, und von vielen kleinen Leimkugeln umgeben waren.

¹⁾ G. Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 27. 1870.

Leimtannat Nr. 12 aus 100 g β -Leim mit 30 g reinem Tannin war in 25 proz. und 48 proz. β -Leimlösung löslich, zeigte in 10 proz. und 20 proz. β -Leimlösung eine merkliche Grenzflächenspannung und war in Wasser unlöslich.

Die Oberflächenspannung von öltartigem Leimtannat gegen wässrige Leimlösung ist also um so größer, je geringer der Leimgehalt der Leimlösung ist.

Wenn Gerbsäure in einer Leimlösung aufgelöst wird, so muß die Oberflächenspannung an der Grenze der öltartigen Leimtannatlösung gegen Wasser mit wachsendem Gerbsäuregehalt zunehmen von 0 bis zu einem Maximalwert 0,24 mg/mm, der schon bei einer Lösung von 100 Teilen β -Leim auf vier Teile Gerbsäure erreicht ist, und bei weiterem Zusatz bis zu 25 Teilen Gerbsäure auf 100 Teile β -Leim sich nicht mehr ändert.

Konzentrierte wässrige Leimlösung oder gerbsäurearme Leimtannatlösung muß sich also an der Grenze von gerbsäurereichem öltartigen Leimtannat und Wasser ausbreiten, da dadurch die Oberflächenspannung dieser letzteren Grenzfläche verkleinert wird.

Dies gibt die Erklärung für die im folgenden Abschnitt besprochenen Emulsionen von Leim und Leimtannat.

§ 98. *Emulsionen von Leim und Leimtannat in Wasser. Schaumbildung. Quellung. Niederschlagmembran von Leimtannat.* Lösungen von β -Leim, in welchen öltartiges Leimtannat aufgelöst ist, zeigen in Berührung mit Wasser eine Reihe merkwürdiger Erscheinungen, ähnlich denjenigen, die ich früher beobachtet habe bei der Einwirkung von Wasser auf ölsaure Alkalien und auf fette Öle oder Ölsäure, in denen ölsaure Alkalien gelöst waren. Nur ist das Leimtannat viel klebriger, vielleicht 100 oder 200 mal klebriger als Ölsäure. Die Flüssigkeit erreicht also unter dem Einfluß der wirkenden Oberflächenkräfte viel langsamer den Gleichgewichtszustand und man nimmt an öltartigem Leimtannat und Wasser dieselben Erscheinungen bequem während einer Stunde wahr, die sich bei ölsauren Alkalien und Wasser in einigen Sekunden oder Minuten abspielen und daher viel schwerer verfolgen lassen.

Schüttelt man etwas Leimtannatlösung Nr. 1 mit Wasser, so bildet sich eine Milch oder Emulsion mit Leimkugeln von

0,001—0,0013 mm Durchmesser, die unter dem Mikroskop lebhafte Brownsche Molekularbewegung zeigen. Die Emulsion bleibt tagelang bestehen. Die Brownsche Molekularbewegung wird aber schwächer und pflegt nach 1—2 Tagen ganz zu verschwinden. Beim Erwärmen des Wassers auf 100° verschwindet die Emulsion, erscheint aber beim Abkühlen wieder, und zeigt wieder zahlreiche Leimkugeln unter dem Mikroskop.

Bei geringerem Gerbsäuregehalt gibt die Leimtannatlösung, mit Wasser geschüttelt, neben den kleinen Leimkugeln der Emulsion auch größere durchsichtige Leimkugeln von mehreren Millimetern Durchmesser.

Es entspricht dies den § 70 beschriebenen Versuchen mit Kieselsäurelösungen, welche beim Eintrocknen um so kleinere Kugeln gaben, je mehr Alkali die Kieselsäure enthielt.

Auch die mit reinem Tannin hergestellten Leimtannatlösungen Nr. 9—12 gaben beim Schütteln mit Wasser eine Milch mit Leimkügelchen oder Blasen von 0,015—0,0005 mm Durchmesser, welche einige Zeit Brownsche Molekularbewegung zeigten.

Aus Wasser mit Methylenblau ($\frac{1}{5000}$) speichern diese Leimkugeln den Farbstoff auf, und zeigen dann eine blaugefärbte doppelkonturierte Kugelschale, welche den schwach oder gar nicht gefärbten Kern der Kugel umhüllt.

Die Erscheinungen erklären sich durch eine dünne ölartige Haut von gerbsäurearmem Leimtannat, das sich an der Grenze von Leim und Wasser bildet, durch Kapillarkräfte hier festgehalten wird, da es die frühere Oberflächenspannung der Kugeloberfläche herabgesetzt hat, und nun die übrige Leimmasse vor der Einwirkung des Wassers schützt. Solange sich noch verdünnte Lösungen von Leimtannat an der Oberfläche der tannathaltigen Leimkugeln bilden und periodisch ausbreiten, werden die in der Grundflüssigkeit (Wasser) schwebenden Leimkugeln von den bei der Ausbreitung erzeugten Flüssigkeitswirbeln ein wenig verschoben und zeigen Brownsche Molekularbewegungen; ähnlich, wie sich verdünnte Seifenlösung an der Oberfläche von alkalihaltigen Ölsäurekugeln in Wasser periodisch bildet und ausbreitet und dadurch haltbare Emulsionen und Brownsche Molekularbewegung erzeugt.¹⁾

1) G. Quincke, Pflügers Arch. 19. p. 136. 1879; Wied. Ann. 53. p. 600. 1894.

Ans klebrigem öltartigen Leimtannat Nr. 3 und 4 ließen sich mit dem Knopf oder der Spitze einer Stecknadel lange haarfeine Fäden ziehen, die schraubenförmige Windungen und unter dem Polarisationsmikroskop Doppelbrechung zeigten. Nach 12 Stunden waren dieselben eingetrocknet und die Doppelbrechung verschwunden. In den eingetrockneten Fäden lagen kleine doppeltbrechende Kristalle, scheinbar rechteckförmige Tafeln von 0,0003—0,0006 mm Länge auf Kugelflächen oder erstarrten Schaumwänden verteilt.

Bringt man ein 1 mm langes Stückchen eines solchen Fadens von Leimtannat auf einen Objektträger unter ein Deckglas mit untergeschobenen Deckglasstreifen in Wasser, so nimmt das Leimtannat Wasser auf, quillt an, und die Ecken runden sich ab. Das Mikroskop läßt bei starker Vergrößerung

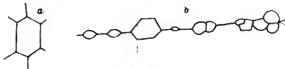


Fig. 131.

in der Leimmasse unzählige Zellen von 0,008—0,013 mm Länge erkennen mit feinen dunkelbraunen Scheidewänden, die sich unter Winkeln von 120° schneiden und aus flüssigen Schaumwänden von braunem öltartigen Leimtannat bestehen (Fig. 131, a). Die Leimmasse im Innern der Zellen zieht durch Diffusion Wasser an, die Zellen und der ganze Leimtannatfaden vergrößern ihr Volumen. Die Zellen wachsen schneller am Rande, als im Innern des Leimfadens. Das Volumen einer Randzelle kann in 1 Min. um das Sechsfache zunehmen.

Verschiebt man das Deckglas ein wenig über dem Leimtannatfaden, der mit dem Wasser schon in Berührung ist, so entstehen dünne Fäden, die im Wasser aufquellen und die in ihnen entstehenden Zellen mit Schaumwänden oder kugelförmigen Bläschen leichter erkennen lassen (Fig. 131, b).

Einen aufgequollenen β -Leimtannatfaden vor dem Verschieben des Deckglases und einen anderen β -Leimtannatfaden nach dem Verschieben des Deckglases zeigen Figg. 132a und 132b [Photographie]. Die Fäden des letzteren sind nach dem

Verschieben in Wasser weiter aufgequollen und haben Schläuche mit Anschwellungen, Einschnürungen und Schraubenwindungen (bei *s* Fig. 132 b) gebildet, indem die Oberflächenspannung des ölartigen Leimtannats an den konkaven Stellen der Schlauchoberfläche größer war, als an den konvexen (vgl. § 23). Ähnliche Erscheinungen habe ich bei den Metallsalzvegetationen beschrieben und ebenso erklärt (Fig. 24, § 28; Fig. 35, § 29; Fig. 49, *b*, § 37), oder bei Kieselsäure (Fig. 90, *i*, 91, *i*, § 66; Fig. 95, *a*, *b*, § 70) etc.



Fig. 132a.

Leimtannat aufgequollen.



Fig. 132b.

Faden von Leimtannat aufgequollen.

Bei schwachem Erwärmen zeigen sich größere Blasen, indem ein Teil der Schaumwände verschwindet oder mehrere kleine Blasen zu einer größeren zusammentießen.

Die braunen Scheidewände sind nach 24 Stunden nicht mehr in kaltem Wasser löslich.

Legt man die Fäden aus Leimtannat in Wasser mit Methylenblau, so speichern die Scheidewände der Zellen beim Entstehen den Farbstoff auf und sind dann leichter wahrzunehmen. Nach einiger Zeit löst sich der Inhalt der Schaumzellen und nur die Schaumwände bleiben zurück als dunkelblaue feste Scheidewände, die Kugelgestalt haben, sich mit Randwinkeln von 120° schneiden und in Wasser schwer lös-

lich sind. Die mit Methylenblau gefärbten Schaumwände erstarren eher und sind weniger löslich, als die ungefärbten Schaumwände.

Bei zwei Fäden aus Leimtannat Nr. 3 beobachtete ich zu verschiedenen Zeiten nach dem Zusammenbringen mit Wasser folgende Dimensionen:

Zeit	Länge	Durchmesser	Volumen
Faden 1 aus Leimtannat Nr. 8.			
0 ^h 0'	92,9 sc	7 sc	1
2 40	105	23	12,90
4 16	108	24	13,67
Faden 2 aus Leimtannat Nr. 3.			
0 ^h 0'	77 sc	5,7 sc	1
4 16	85	23	17,99

$$1 \text{ sc} = 0,015 \text{ mm.}$$

Ein Faden aus ölarartigem Leimtannat von 0,2 mm Durchmesser, der 9 Monate trocken gelegen hatte, zeigte zwischen Nicolschen Prismen keine Doppelbrechung. Durch Aufquellen in Wasser nahm in 5 Min. sein Volumen auf das $2\frac{1}{4}$ fache zu, wobei sich an der Außenseite in einer 0,03 mm dicken Schicht tausende von Schaumzellen mit flüssigen braunen Wänden bildeten und die Mitte des quellenden Leimfadens Doppelbrechung zeigte. Die Zellen an der Außenseite wuchsen schneller, als die im Innern der Leimmasse.

Ein Faden aus Leimtannat Nr. 11, mit reinem Tannin erhalten, quoll in Wasser in 20—40 Sek. zum 4fachen Volumen auf, unter Abrundung der Ecken und Bildung zahlreicher Schaumwände im Innern.

Ein frisch gezogener Faden aus Leimtannat hatte zu verschiedenen Zeiten Z nach dem Zusammenbringen mit Wasser folgende Durchmesser:

$Z = 0$	15	50	120	240	480—1200 Sek.
$2r = 2$	4	6	8	10	12 sc

$$1 \text{ sc} = 0,015 \text{ mm.}$$

Das Volumen war also unter Bildung zahlreicher flüssiger Schaumwände in 4 Min. auf das 25 fache gestiegen.

Fäden desselben Leimtannats Nr. 11 und 12, welche 4 Monate eingetrocknet gelegen hatten, quollen viel langsamer auf, als frisch gezogene Fäden. Ein solcher Faden von Nr. 11 verdoppelte sein Volumen in 7 Min.; ein anderer Faden aus Nr. 12 vermehrte sein Volumen auf das $1\frac{1}{2}$ fache in 2 Min.

Die Leimtannatlösung Nr. 1 mit geringerem Gerbsäuregehalt gab etwas andere Erscheinungen. Ich ließ einen Tropfen auf einem Deckglas eintrocknen und legte das Deckglas auf einen uhrglasförmig ausgeschliffenen Objektträger mit Wasser, welchem Methylenblau zugesetzt war.

Die klare Leimlinse von 5,4 mm Durchmesser zeigte nach einiger Zeit 0,05 mm vom Rande entfernt zahlreiche dunkelblaue Hohlkugeln von 0,003—0,01 mm Durchmesser auf hellblauem Grunde (Fig. 133, *a*), während am unteren Teil der Leimlinse zahlreiche blaue Körnchen und Kugeln sichtbar wurden.



Fig. 133.

Nach 7 Stunden war an der in Wasser aufgequollenen Linse von Leimtannat mit gekreuzten Nicolschen Prismen das bekannte Kreuz der Sphärokristalle sichtbar.

Aus Leimtannat mit größerem Gerbsäuregehalt, das unter einem Deckglas auf einem Objektträger mit zwei untergelegten Deckglasstreifen eingetrocknet war, entstanden bei Zubringen von Wasser mit Methylenblau kleine doppeltbrechende Kristalle in der klaren Randzone und zahlreiche blaue Schaumwände. Bei längerer Einwirkung des Wassers sah man oft sechsseitige Tafeln von 0,02 mm Breite, die wie Kristallplatten aussahen, aber keine Doppelbrechung zeigten und wohl aus losgelösten Schaumwänden mit gut erhaltenen Schaumkanten bestanden.

Zufällig vorhandene Luftblasen hören nach $1\frac{1}{2}$ Stunden auf, mit benachbarten Luftblasen Wände mit Randwinkeln von 120° einzuschließen. Die Schaumwände zwischen den Luftblasen erscheinen doppelt konturiert und doppeltbrechend und zeigen sehr feine helle Linien. Die ringförmige Zone einer

Luftblase zeigte zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen das dunkle Kreuz der Sphärrokristalle (Fig. 133, *b*) und einzelne kugelförmige Luftblasen waren auf der ganzen Oberfläche mit vielen kleinen Linsen oder Blasen besetzt (Fig. 133, *c*).

Das ölartige Leimtannat Nr. 4 trocknete auf einem Objektträger zu einer hellbraunen, durchsichtigen, homogenen Masse ein, in der sich mit gekreuzten Nicolschen Prismen zahlreiche Kristalle als helle Pünktchen auf Kreis- und Ellipsenbogen verteilt erkennen ließen. Bringt man einen Splitter dieser festen Masse unter einem Deckglas mit Wasser in Berührung, so zeigen sich nach kurzer Zeit braune Streifen oder Scheidewände von 0,15—0,03 mm oder geringerer Dicke. Ein Teil dieser braunen Scheidewände erscheint anfänglich gerade und unter 90° gegen die benachbarten Scheidewände geneigt, krümmt sich aber bald und bildet dann Randwinkel von 120° mit den benachbarten Scheidewänden. Die ursprünglich festen Scheidewände verwandeln sich also in flüssige ölartige Substanz und schließen micellenartige Hohlräume oder Zellen ein, bilden eine dickwandige Schaummasse.

Ich schließe daraus, daß beim Eintrocknen der Leimtannatmasse sich flüssige ölartige Scheidewände an schon vorher erstarrte Scheidewände festgesetzt und unsichtbare Scheidewände oder Lamellen mit Neigungswinkeln von 90° gebildet hatten, analog dem Verhalten anorganischer und organischer Kolloide, welche beim Eintrocknen auf Glasplatten die Lage der vorhandenen unsichtbaren festen Scheidewände als Risse hervortreten lassen (vgl. § 68, Fig. 93—94; § 70, Fig. 97—99; § 73, Fig. 103; § 78, Fig. 111; § 90, Fig. 125; § 93, Fig. 128). Diese unsichtbaren Scheidewände von erstarrtem ölartigen Leimtannat treten bei Wasseraufnahme unter Farbenänderung wieder hervor und ändern ihre Randwinkel allmählich, indem sie allmählich aus dem festen durch einen sehr klebrigen in den flüssigen Zustand übergehen.

Gleichzeitig mit dem Auftreten der dicken Schaumwände entsteht ölartiges Leimtannat an der äußeren Grenze der leimtannathaltigen Leimmasse mit Wasser, die Ecken und Kanten runden sich ab und haben das Bestreben möglichst kleine Oberfläche anzunehmen. Oft entstehen auch Anschwellungen und Einschnürungen der ölartigen Leimtannat-

masse während des Aufquellens und diese teilt sich in einzelne Tropfen, die zum Teil durch dünne Fäden zusammenhängen.

Durch die zähflüssigen braunen Scheidewände diffundiert Wasser in das Innere der Zellen. Die Zellen vergrößern ihr Volumen. Die Zellen am Rande viel schneller als die Zellen im Innern. Dabei bilden sich Hohlräume und Blasen im Innern der dicken braunen Scheidewände. Diese zerfallen zu dünnwandigen Schaummassen und kugelförmigen Blasen, deren Volumen weiter zunimmt und die Hohlräume der ursprünglichen dickwandigen größeren Zellen ausfüllt.

Diese schwammige Masse trocknet auf einem Objektträger zu einer klaren Leimlamelle ohne sichtbare Scheidewände ein und quillt mit Wasser von neuem auf zu Schaummassen und Blasen von anderer Form und Lage, als vor dem Eintrocknen sichtbar waren.

Dünne Fäden von öltartigem Leimtannat in Wasser können gleichzeitig aufquellen, viele Blasen, Hohlräume und Schaumwände im Innern bilden und dabei durch die Oberflächenspannung der äußeren Oberfläche Anschwellungen und Einschnürungen zeigen, sich an den Enden abrunden und in einzelne langgestreckte oder runde Schaummassen zerfallen, die noch durch dünne Fäden zusammenhängen oder ganz voneinander getrennt sind.

Solange die Schaumwände flüssig sind, können mehrere Schaummassen sich zu einer Schaummasse vereinigen und zusammenfließen, wenn sie durch die verbindenden und sich verkürzenden Fäden oder durch Flüssigkeitsströmungen oder durch andere Ursachen zusammengeführt wurden, sodaß die Außenseiten der Schaummassen sich berühren.

Nach einiger Zeit erstarren die Wände dieser dünnwandigen Schaummassen zuerst an der Außenseite der Randzellen, wo diese mit dem äußeren Wasser in Berührung sind. Wenn durch weitere Aufnahme von diffundierendem, d. h. die flüssigen öltartigen Wände durchdringendem Wasser das Volumen der Zellen zunimmt und ein Teil der Zellwand fest und dünn, der andere Teil der Zellwand noch flüssig, dick und klebrig ist, so kann die feste Wand brechen, während die anderen flüssigen Teile bestehen bleiben. Ein Teil der Zellwände an

der Außenseite der Schaummassen löste sich auch in dem umgebenden Wasser, während die anderen Schaumwände der jetzt nach außen offenen Schaumkammern unter der Einwirkung des Wassers erstarrten. Man sieht dann an der Außenseite der Schaummassen diese nach außen offenen Zellen mit dem Rest der zurückgebliebenen Zellwände, die nach außen in spitze Zacken auslaufen. Diese spitzen Zacken sind ganz ähnlich denen bei den analogen Versuchen mit α -Leimtannat, von denen Fig. 144, § 103 eine photographische Abbildung gibt. Leider konnte ich von den aufquellenden β -Leimtannatfäden mit den braunen Schaumwänden wegen dieser Farbe keine guten Photographien erhalten.

Ob die Außenwand der Randzellen fest und brüchig wird, indem sie sich in unlösliches saures Leimtannat verwandelt unter Abgabe von Leim, oder sich nur außen mit einer unmerklich dicken Haut von saurem Leimtannat bekleidet, oder ob sie von einer dünnen flüssigen Schutzschicht von ölartigem Leimtannat mit kleinerem Gerbsäuregehalt, als die ganze Wandmasse besitzt, bedeckt bleibt, hängt von dem Leimgehalt der Flüssigkeit zu beiden Seiten der Außenwand ab und von der Geschwindigkeit, mit der die frisch gebildete Leimlösung fortgeführt wird durch Diffusion oder Flüssigkeitsströmungen. Ist der Leimgehalt innen gering, so wird unlösliches saures Leimtannat entstehen und durch die gebrochene Zellwand kann Wasser zu den mehr nach innen gelegenen Zellwänden dringen. Dann können bei weiterer Einwirkung des diffundierenden Wassers auch die im Innern der Schaummassen gelegenen Zellwände fest werden. Wächst der Zellinhalt durch Wasser, welches mit Diffusion die noch flüssigen Zellwände durchdringt, so platzen die Zellen. Die stehengebliebenen flüssigen Schaumwände erstarren, und so entsteht ein Netzwerk von zusammenhängenden Schaumzellen mit festen Wänden, d. h. eine *Niederschlagsmembran*.

Nach dem eben Gesagten bildet sich eine feste Niederschlagsmembran aus dünnen Fäden und Lamellen von Leimtannat leichter aus, als aus dickeren Stücken.

Zuweilen schießen am Rande des Leimtannats Hörner hervor, wie bei den Myelinformen der Olsäureschäume, die sich in dem umgebenden Wasser dann umbilden zu hohlen

Fäden mit Anschwellungen oder aneinander hängenden Blasen, die sich längs der Fäden langsam verschieben oder mit den Fäden nach der Hauptmasse des mit Schaumzellen erfüllten Leimtannats hingezogen werden. Die Leimmasse wird dabei durch heftige Ausbreitungswirbel in die wässrige Flüssigkeit hineingerissen, indem sich eine verdünnte Leimtannatlösung bildet und an der Oberfläche des öltartigen Leimtannats ausbreitet, ähnlich wie bei der unten beschriebenen Abspaltung vieler kleiner Leimkügelchen und der Bildung einer Emulsion von Leim.

Der Vorgang ist analog dem früher von mir¹⁾ beschriebenen bei der Einwirkung von Wasser auf fette Öle oder seifenhaltige Ölsäure, wo im Innern des Öles auch kugelförmige mit wässriger Seifenlösung gefüllte Hohlräume oder Schaumzellen entstehen.

Durch Aufnahme von Wasser scheiden sich aus der homogenen Leimtannatlösung zwei Flüssigkeiten aus, die öltartige klebrige dunkelbraune Leimtannatlösung *A* und die wasserreiche gelbliche Leimtannatlösung *B* mit merklicher Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze.

Aus der seifenhaltigen Ölsäure entsteht bei Einwirkung des Wassers wasserarme seifenhaltige Ölsäure (öltartige Flüssigkeit *A*) und eine wasserreiche, Seife und Ölsäure enthaltende Flüssigkeit *B*, mit Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze der Lösungen *A* und *B*.

Bei den Versuchen mit Öl oder seifenhaltiger Ölsäure ist das Volumen der abgeschiedenen wässrigen Flüssigkeit *B* kleiner, als das Volumen der öltartigen Flüssigkeit *A*, bei den Versuchen mit Leimtannat ist es größer. In beiden Fällen sind die Grenzflächen der Flüssigkeiten *A* und *B* Kugelflächen.

Haben die Flüssigkeiten *A* und *B* geringe Klebrigkeit wie bei seifenhaltiger Ölsäure und wässriger Seifenlösung, so nimmt die Grenzfläche beider Flüssigkeiten schnell die durch die Oberflächenspannung bedingte Gleichgewichtslage an und es entstehen einzelne voneinander getrennte Kugelflächen. Haben die Flüssigkeiten *A* und *B* große Klebrigkeit, wie bei dem öltartigen wasserarmen Leimtannat *A* und dem wasser-

1) G. Quincke, Wied. Ann. 35. p. 622 und 631. 1888; 53. p. 601. 1894.

reicherer Leimtannat *B*, so bleiben die ausgeschiedenen Massen der Flüssigkeit *A* in Zusammenhang, und bilden zusammenhängende Schaumwände, die langsam die von der Oberflächenspannung geforderte Gleichgewichtslage annehmen, sich unter Winkeln von 120° schneiden und mit der wasserreicheren Leimtannatlösung *B* gefüllte Zellen umschließen.

Wurden eingetrocknete Fäden oder Stückchen der Leimtannatlösung Nr. 6 oder 7 auf einem Objektträger unter einem Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen in Berührung gebracht mit Wasser, so bildeten sich zusammenhängende Schaumwände im Innern des Leimtannats unter Aufquellen desselben und außen eine Emulsion oder Milch von Leimkügelchen in Wasser.

Unter dem Mikroskop sieht man die Fäden sofort aufquellen und flüssig werden. Das entstehende öltartige Leimtannat zieht sich wie ein langer Quecksilberfaden zusammen, rundet sich an den Ecken ab, zeigt Anschwellungen und Einschnürungen, indem die Oberfläche der Leimmasse Kugelform annehmen will, ähnlich wie die Ölfäden einer Ölsäuremasse in alkalischer wässriger Flüssigkeit.

In der Nähe der Grenzfläche von öltartigem Leimtannat und Wasser ist die Flüssigkeit in heftiger wirbelnder Bewegung. Indem verdünnte Leimlösung ohne oder mit geringem Gerbsäuregehalt an der Oberfläche des öltartigen Leimtannats periodisch entsteht und sich ausbreitet, wird das zähe Leimtannat nach dem Ausbreitungszentrum hin und in Fäden in die wässrige Flüssigkeit hineingerissen, um dort in tausende von kleinen Leimtannatkugeln zu zerfallen. Es entsteht durch periodische Ausbreitung eine Milch oder Emulsion von Leimkügelchen, ähnlich wie bei der Einwirkung alkalischer Flüssigkeiten auf ölsäurehaltige fette Öle durch periodische Bildung und Ausbreitung von Seifenlösung.¹⁾

In dem öltartigen Leimtannat Nr. 6—8 entstanden durch weitere Einwirkung des Wassers Hohlräume, von Kugelflächen begrenzt, und Schaumzellen mit Randwinkeln von 120° , deren Volumen durch diffundierendes Wasser zunahm, indem die Wände aus öltartigem Leimtannat Wasser von außen aufnahmen und an

1) Vgl. G. Quincke, Pfügers Archiv 19. p. 136. 1879.

den Inhalt der Hohlräume abgaben. Durch diese Diffusion wuchsen die Randzellen wieder viel schneller als die Zellen im Innern der Leimmasse. Schließlich bildete das öltartige Leimtannat eine Reihe aneinander hängender Hohlkugeln und Schaumzellen, die durch braune Schaumwände mit Randwinkeln von 120° getrennt sind und nach einiger Zeit fest werden.

Aus Wasser mit Methylenblau ($1/5000$) speichern die Schaumwände den blauen Farbstoff auf, färben sich tiefblau und werden unlöslich in Wasser.

Bringt man das feste Leimtannat Nr. 6 in Wasser mit Methylenblau ($1/5000$), statt in reines Wasser, so bleiben die eben beschriebenen Erscheinungen aus, da das Methylenblau das öltartige Leimtannat zerstört, zum Erstarren bringt, und dann die Oberflächenspannung fehlt, unter deren Einfluß die Schaumwände und die Leimkügelchen der Emulsion sich bilden. Außerordentlich geringe Mengen Methylenblau können schon die Bildung der Schaumzellen modifizieren oder ganz hindern.

§ 99. *Niederschlagmembranen aus Lösungen von β -Leim und Gerbsäure. Röhrchenmethode.* Man kann Niederschlagmembranen und Schaumwände aus Lösungen von Gerbsäure und Leim auch in dünnwandigen Glasröhren entstehen lassen und nach der oben in § 25 beschriebenen Röhrchenmethode untersuchen.

Zwei Glasröhrchen von 8×1 mm wurden mit 5proz. Lösung von Gerbsäure oder 17proz. Lösung von β -Leim gefüllt, in 6 mm Abstand nebeneinander auf einen Objektträger unter ein großes Deckglas gelegt, das Deckglas mit der Präpariernadel festgehalten und mit einer Pipette ein Tropfen Leim- oder Gerbsäurelösung unter das Deckglas gebracht (Fig. 134). Der Inhalt der Röhrchen konnte dann mit den stärksten Objektivsystemen eines gewöhnlichen Mikroskopes untersucht werden.



Fig. 134.

Wegen des Unterschiedes des spezifischen Gewichtes von Gerbsäurelösung (1,017) und der β -Leimlösung (1,052) mischen sich beide Flüssigkeiten langsam miteinander. In den mit Gerbsäure gefüllten Röhrchen entsteht am Ende eine kugelförmige Scheidewand von flüssigem öltartigen Leimtannat. Im Innern

bilden sich eine Reihe von ebenen oder kugelförmigen Scheidewänden in gleichen Abständen voneinander (Fig. 135, a). In den mit Leim oder Gerbsäure gefüllten Röhrchen bemerkt man eine Reihe hohler Fäden mit langgestreckten oder kugelförmigen Anschwellungen, die in größere oder kleinere kugelförmige Blasen von 0,25—0,025 mm oder noch weniger zerfallen. Diese

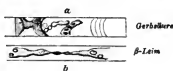


Fig. 135.

Blasen vergrößern ihr Volumen, fließen ineinander oder bilden Schaummassen mit zusammenhängenden flüssigen Scheidewänden, die später teilweise fest werden.

Oft bemerkt man in den mit β -Leim gefüllten Röhrchen nach mehreren Stunden große Schläuche mit Anschwellungen von abnehmender Größe, die durch ein dünnes Schlauchstück zusammenhängen und an einzelnen Stellen Luftblasen enthalten (Fig. 135, b).

Alle diese Erscheinungen erklären sich durch die Bildung von öligem Leimtannat *A*, das sich bei der Einwirkung von Gerbsäure und β -Leim in Zwischenräumen oder periodisch abscheidet (§ 23). An der Grenze von öligem Leimtannat *A* mit der umgebenden wässerigen Lösung *B* herrscht eine Oberflächenspannung und scheidet sich die absorbierte Luft in Blasen ab, wie man dies stets an der Grenze zweier heterogener Flüssigkeiten wahrnehmen kann. Durch die Flüssigkeiten *A* und *B* kann das Wasser diffundieren und das Volumen der gebildeten Blasen und Schaumzellen ändern.

Zellen aus Leim und Gerbsäure.

§ 100. *Zellen aus festem Leim in Gerbsäurelösung (Traubische Zellen).* Trockener β -Leim in verdünnte Gerbsäurelösung gebracht, nimmt Wasser und Gerbsäurelösung auf. Durch die Einwirkung der Gerbsäure auf konzentrierte Leimlösung entsteht das in § 96 beschriebene ölige Leimtannat; zunächst an der Oberfläche, dann auch im Innern der Leimmasse.

Das Wasser diffundiert schneller in das Innere der Leimmasse als die Gerbsäure, und es entsteht konzentrierte Leimlösung mit einer Hülle von öligem Leimtannat, dessen Gerbsäuregehalt außen am größten ist. Die Oberflächenspannung

an der Grenze von öltartigem Leimtannat und Gerbsäurelösung will der Grenzfläche Kugelgestalt geben. Es bildet sich eine hohle Blase von öltartigem Leimtannat mit Leimlösung gefüllt. Indem gleichzeitig die Schwere die Blase mit ihrem klebrigen Inhalt nach unten zieht und einen Hohlzylinder bildet, durch dessen flüssige Hülle von öltartigem Leimtannat weiter Wasser und Gerbsäure zu der Leimlösung im Innern des Zylinders diffundieren, entstehen die zuerst von M. Traube beschriebenen Zellen (vgl. § 24).

Dieselben lassen sich in folgender Weise bequem erhalten.

Ein schmaler Trog aus zusammengeschmolzenen Spiegelglasplatten von $10 \times 10 \times 1$ cm enthält 5 proz. wässrige Lösung von Gerbsäure über einer dünnen Schicht Quecksilber, die

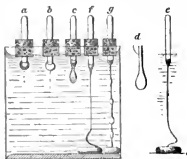


Fig. 136.

eben den Boden des Troges bedeckt (Fig. 136). Das Quecksilber verhindert das Anlagern der gebildeten Zellen am Boden des Glas troges und erleichtert die Reinigung nach Beendigung der Versuche.

Das abgeschmolzene Ende eines Glasstabes von 5 mm Durchmesser wird schwach erwärmt und in eine warme 20 proz. Lösung von β -Leim

getaucht. Nach einer Stunde bringt man den am Glasstabe erstarrten Leimtropfen in die Gerbsäurelösung und befestigt den Glasstab mit einem durchbohrten Kork am oberen Rande des Troges, sodaß der Leimtropfen 5–10 mm unter der Gerbsäureoberfläche liegt.

Nach einigen Minuten bildet sich durch Auflösung des Leimes in der Gerbsäurelösung an der Oberfläche des Leimtropfens ein Strom zäher Flüssigkeit (wässrige Leimtannatlösung), der längs der Oberfläche nach der unteren Tropfenkuppe hinströmt und in einen vertikalen Faden schwerer Flüssigkeit übergeht, als Schlierenstrom von der Tropfenkuppe herabsinkt, Anschwellungen und am unteren Ende Wirbel zeigt und am Boden der klaren Gerbsäurelösung sich ausbreitet.

Gleichzeitig quillt der Leimtropfen auf, indem Wasser

und Gerbsäure mit Diffusion eindringen. Am oberen Rande erscheinen auf der Tropfenoberfläche Falten (von dünnen Lamellen von festem, saurem Leimtannat) und im Innern braune Stellen von wasserhaltigem Leimtannat. Am unteren Ende des Leimtropfens entsteht ein durchsichtiges Säckchen, von dessen unterer Kuppe stetig ein Strom schwerer Flüssigkeit mit kleinerer Lichtbrechung als die umgebende Gerbsäurelösung abwärts fließt. Das Säckchen enthält an der Wand zähe, in der Mitte leichter bewegliche Flüssigkeit, hat die Gestalt eines hängenden Flüssigkeitstropfens, vergrößert sich und sinkt dabei langsam in der Gerbsäurelösung herab, während es durch einen dünnen hohlen Schlauch mit der Leimmasse am Glasstab verbunden bleibt. Der Schlauch verlängert sich, Volumen von Schlauch und Säckchen wachsen stetig, das Säckchen sinkt langsam auf die Quecksilberfläche herab, und bildet hier einen flachen dunkelbraunen Tropfen, während es mit seinem unteren Teile langsam hin- und herpendelt. In Fig. 136 sind die einzelnen aufeinander folgenden Formen der Zelle dargestellt und mit *a, b, c, d, e, f, g* bezeichnet.

Die Wellenlinie am unteren Ende des Schlauches beweist eine wechselnde Oberflächenspannung einer eben entstehenden öartigen Flüssigkeit an der Grenzfläche von Schlauch und Gerbsäurelösung (§ 23, 96). Die Anschwellungen zeigen, daß diese Oberflächenspannung längere Zeit gewirkt hat.

Tages- und besonders Sonnenlicht beeinflussen wesentlich die Anbildung des hohlen Schlauches, indem er auf der einen Seite massive Wände mit wenigen kleinen Hohlblasen, auf der anderen Seite eine schaumige Hülle mit Kammern zeigt, deren Wände normal stehen zur äußeren Wandfläche, die also aus fester Substanz besteht.

Wahrscheinlich bildet sich unter dem Einfluß des Lichtes aus der Gerbsäure Gallussäure, welche sich in dem öartigen Leimtannat auflöst, dadurch dessen Klebrigkeit vermindert und die Diffusion des Wassers und dadurch die Bildung der Schaumwände beschleunigt (vgl. unten § 104).

Bei höherer Temperatur (wenn man die Erscheinungen für Vorlesungszwecke auf einen Schirm projiziert, die Flüssigkeit stark beleuchtet und dadurch erwärmt) bleibt die Oberfläche des unteren Teiles des Säckchens, des Schlauches und

des flachen Tropfens während der ganzen Entwicklung der Zelle glatt, Wellenlinien und Anschwellungen des Schlauches treten in einem früheren Stadium der Entwicklung auf, die Zellenbildung verläuft schneller.

Bei gewöhnlicher Temperatur entstehen aber dunkle Stellen und Streifen in der Hülle von Schlauch und Säckchen, die Hülle des Schlauches zeigt Falten, im Innern des Schlauches und Säckchens sammelt sich eine helle Flüssigkeit, in der mit bloßem Auge oder dem Mikroskop ein Regen feiner Teilchen (von basischem Leimtannat) zu erkennen ist.

Lange Strecken Schlauch mit flüssigen und festen Wänden, mit flüssigem und festem Inhalt versinken langsam in dem flachen Tropfen auf dem Quecksilber und lösen sich zu einer homogenen dunkelbraunen sehr zähen Flüssigkeit, öltartigem Leimtannat des § 97.

Nach einer Stunde oder längerer Zeit ist ein flacher Tropfen entstanden von 10—20 mm Durchmesser, dessen Höhe zwischen Kuppe und Bauch 1,75—0,75 mm beträgt. Nimmt man das spezifische Gewicht dieses öltartigen Leimtannats zu 1,2, das der Gerbsäurelösung zu 1,02 an, so würde die Oberflächenspannung des öltartigen Leimtannats gegen 5proz. Gerbsäurelösung 0,275—0,051 mg/mm betragen, in Übereinstimmung mit den Messungen des § 97.

Während des langsamen Herabsinkens bilden sich auf dem Schlauch Blasen oder hohle kugelige Anschwellungen aus, die langsam mit ihm herabsinken und in dem unteren flachen Tropfen versinken (Fig. 136, *g*). Beispielsweise beobachtete ich einmal auf einer Schlauchlänge von 45 mm 15 längliche Anschwellungen, jede von 2,5 mm Länge und 0,31 mm Durchmesser, die durch dünne zylindrische Schlauchstücke von 0,12 mm verbunden waren. Der Schlauch senkte sich anfangs langsam. Die Fallgeschwindigkeit nahm zu bis zu einem Maximum, das bedeutend schwankte (zwischen 1 und 30 mm in der Sekunde) und sank dann wieder auf Null.

Die feste Haut der Säckchen und der Schlauchoberfläche besteht aus saurem Leimtannat, welches sich später in der allmählich entstehenden Lösung von β -Leim auflöst (vgl. § 97) und ein flüssiges öltartiges Leimtannat bildet mit Oberflächenspannung an der Grenze mit Gerbsäurelösung. Die feste Haut

löst sich um so eher, die Oberflächenspannung an der Außenseite des Schlauches tritt um so eher in Wirksamkeit, je höher die Temperatur ist, und bildet die kugelförmigen Anschwellungen des Schlauches (Fig. 136, g).

Die Oberflächenspannung wechselt mit der Dicke der in kurzen Zwischenräumen oder periodisch gebildeten ölartigen Leimtannatschicht, sobald deren Dicke kleiner als die doppelte Wirkungsweite der Molekularkräfte ist. Der Schlauch oder hohle abwärts fließende Strahl wird an den Stellen größerer Oberflächenspannung konkav, an den Stellen kleinerer Oberflächenspannung konvex, und bildet Wellenlinien oder pendelt hin und her, wie ein Strahl von Alkohol im Wasser (Fig. 64, § 44) oder von wässerigen Salzlösungen in Alkohol (§ 47 ff.).

Die herabsinkenden Massen von verdünnter Leim- und Leimtannatlösung und von festem basischen und sauren Leimtannat lösen sich in der auf dem Quecksilber ruhenden konzentrierten β -Leimlösung auf zu einer homogenen ölartigen Flüssigkeit, dem braunen Tropfen von ölartigem Leimtannat am Boden des Troges.

Das ölartige Leimtannat nimmt später weiteres Wasser aus der Gerbsäurelösung auf, wird weniger konzentriert, bildet wieder Schaumzellen im Innern und Lamellen von festem sauren Leimtannat außen.

Zunächst wird die vorher glatte und zähflüssige Oberfläche des Schlauches und der Anschwellungen fest und runzlig, wie die Oberfläche einer Wallnuß (Fig. 137).

Auch im Innern der Schlauchwände bilden sich Blasen oder Hohlräume mit brauner zähflüssiger Wand, die bei dem langsamen Herabsinken zu Hohlzylindern mit braunen oder dunkelbraunen zähflüssigen Wänden ausgezogen werden. Diese braunen Schläuche, in deren klarem flüssigen Inhalt mit dem Mikroskope ein Regen feiner Teilchen, von basischem Leimtannat, sichtbar ist, bilden wieder, während ihr Volumen durch



Fig. 137.



Fig. 138.

Wasseraufnahme wächst, kugelförmige und längliche durch dünne hohle Kanäle oder Schläuche zusammenhängende Anschwellungen mit Wandlinsen (Fig. 138) oder sie zerfallen in einzelne getrennte Hohlblasen, die allmählich kugel-

förmige Gestalt annehmen. Die Wand der zusammenhängenden langgestreckten Hohlräume und der Hohlkugeln geht durch weitere Einwirkung der Gerbsäurelösung in feste Substanz (sauerer Leimtannat) über und ändert dann die Gestalt gar nicht mehr, oder unbedeutend. Die verschiedenen Stadien der Gestalt, welche die zähen flüssigen Wände aus Leimtannat langsam durchlaufen, werden dadurch festgehalten und fixiert. In den außen festgewordenen Wänden fließt dann an der Innenseite die braune noch flüssige Masse der Wände herab, die dünnen Kanäle verstopfen sich durch festwerdende Wandsubstanz, der

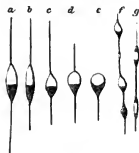


Fig. 139.

untere Teil der langgestreckten oder kugelförmigen Hohlräume füllt sich mit brauner zäher Flüssigkeit, die auch allmählich fest wird. So bilden sich längliche, an beiden Enden zugespitzte oder kugelförmige Zellen mit fester runzlicher Hülle aus dem Schlauche und in der Schlauchwand. Die flüssige dunkelbraune Masse der Schlauch- und Zellenwände wird bei dem Festwerden lichter, an der Oberfläche faltig und runzlig, der Schlauch

schrumpft zu einem dünnen festen bröcklichen Faden zusammen. Fig. 139, a—g stellt eine Reihe Formen des Schlauches mit Anschwellungen dar.

Auch der Inhalt des flachen Tropfens aus ölartigem Leimtannat am Boden der Gerbsäurelösung wird nach 2—3 Tagen dünnflüssig und heller. Der flache Tropfen verwandelt sich in eine oder mehrere halbkugelförmige oder kolbenartige „Boden-



Fig. 140.

blasen“ von 5—10 mm Höhe (Fig. 140), die mit einer dünnen festen Membran (von saurem Leimtannat) eine klare helle Flüssigkeit von geringerem spezifischen Gewicht als 1,01 (wässrige Leimtannatlösung) einschließen und wochenlang unverändert bestehen können. Bei Beleuchtung mit Sonnenlicht und starker Vergrößerung sieht man in der durchsichtigen Membran kleine (runde) Körnchen. Dieselben bilden Kurven, die sich unter Winkeln von 120° schneiden, sind also aus flüssigem ölartigen Leimtannat entstanden.

Beim Anstoßen bildet die feste Membran der Blase Falten oder die Blase platzt, der klare Inhalt steigt in der umgebenden Gerbsäurelösung in die Höhe und bildet einen Regen von zahllosen feinen flüssigen Teilchen, die sich zu zusammenhängenden mikroskopischen Blasen und größeren Schaumflocken vereinigen und mit positiver Photodromie an der Lichtseite der Trogwände festsetzen oder auf den Boden der Gerbsäurelösung herabfallen, dort wochenlang scheinbar unverändert bleiben und wohl aus derselben Substanz bestehen, wie die feste Membran der Bodenblasen, aus sauerem Leimtannat. Das saure Leimtannat wird, wie alle Niederschläge, als flüssiger Niederschlag ausgefällt, da es nur so Schaumflocken bilden und an der Glaswand sich festsetzen kann, und wird später fest.

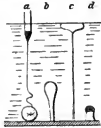


Fig. 141.

Die Bodenblasen können auch Kugelform (Fig. 141, a) annehmen, aus der umgebenden Gerbsäurelösung Wasser aufnehmen, mit Diffusion durch flüssig gebliebene Teile ihrer Hülle, und aufquellen, dadurch spezifisch leichter werden, aufsteigen (Fig. 141, b, c) und an der Oberfläche flache oder kugelförmige Blasen bilden. Fig. 142, a, b, c gibt drei aufeinander folgende Formen dieser *Oberflächenblasen*.



Fig. 142.

Wurde der klare Inhalt der emporgestiegenen Blasen in einem hohlen Glasfaden aufgesogen, mit welchem die Membran an der Oberseite der Blase durchstochen wurde, so gab die aufgesogene Flüssigkeit mit Eisenchlorid eine blauschwarze Tinte, weniger tief gefärbt, als die mit 5 proz. Gerbsäurelösung erhaltene. Die Flüssigkeit der Blasen oder Zellen enthält also merkliche Mengen Gerbsäure. Dies beweist die Unhaltbarkeit der alten Traubeschen Auffassung, nach welcher die Hülle der Säckchen oder Blasen eine Niederschlagsmembran von unlöslichem gerbsauren Leim sein sollte; ein Netz mit so engen Maschen, daß durch dieselben die großen Gerbsäureteilchen nicht hindurchschlüpfen könnten, wohl aber die kleinen Wasser- teilchen (vgl. § 24).

Die Fäden mit länglichen oder kugelförmigen Anschwellungen aus ölartigem Leimtannat können mit dem Glasstab

aus der Gerbsäurelösung herausgezogen, in Wasser gehängt, von der anhängenden Gerbsäure befreit und getrocknet werden. Sie erhärten dann in 1—3 Tagen vollständig, zeigen unter dem Polarisationsmikroskop im allgemeinen keine Doppelbrechung, aber bei sehr starker Vergrößerung viele helle Pünktchen oder kleine Kristalle im dunklen Gesichtsfeld.

In dem schmalen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm wurden Gerbsäurelösungen verschiedener Konzentration mit 10—2 Proz. Gerbsäure übereinander geschichtet. In den Trog wurde ein schräger Glasstreifen eingesetzt, an dessen ganzer Länge kleine Tropfen β -Leim, getrennt voneinander, angetrocknet waren. Die ersten und größten Leimsäckchen oder Zellen bildeten sich an den Leimtropfen in 5proz. Gerbsäurelösung. In 10proz. Gerbsäurelösung erschienen etwas später viele kleine Leimsäckchen.

Die Leimsäckchen sanken in der umgebenden Gerbsäurelösung noch unter, wenn man ihr durch Zusatz von Zucker das spezifische Gewicht 1,06 gegeben hatte. Sie enthielten also mehr als 25 Proz. Leim.

5proz. Gerbsäurelösung ist also für die Entwicklung der Traubeschen Zellen aus β -Leim am geeignetsten.

Die Bodenblasen (Fig. 140) haben kurz nach ihrer Entstehung Kugelgestalt oder die Form eines flachen Schwefelkohlenstofftropfens in Wasser, sind von einer Haut aus ölartigem Leimtannat bekleidet. In dieser Haut liegen flüssige Schaumwände, da man mit einer Nadel aus ihr Fäden ziehen kann. Bringt man diese Fäden auf einen Objektträger unter einem Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen in Wasser oder in 5proz. Gerbsäurelösung, so quellen sie auf, indem in ihrem Innern neue dicke dunkelbraune Schaumwände mit Randwinkeln von 120° entstehen. Das Wasser dringt mit Diffusion in das Innere des flüssigen Leimtannats ein, Inhalt und Wände der Schaumkammern werden durch Wasseraufnahme größer. Die Schaumkammern wachsen am Rande des Leimfadens schneller, als im Innern. Die ganze klebrige schaumige Leimmasse hat das Bestreben, unter dem Einfluß der wirkenden Oberflächenspannung Kugelgestalt anzunehmen, und einzelne kugelförmige Schaumflocken zu bilden. Fig. 143 a [Photographie] zeigt sehr schön einen solchen aufgequollenen Faden mit großen Rand-

zellen, von dem sich eine Schaumkugel abspalten will. Gleichzeitig bilden sich in den dicken dunkelbraunen Schaumwänden



Fig. 143a.

Aufgequollener Leimtannat-
faden.

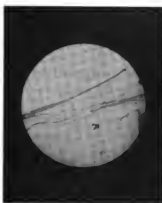


Fig. 143b.

Aufgequollener Leimtannat-
flocken mit Kugeln und Rand-
zelle.

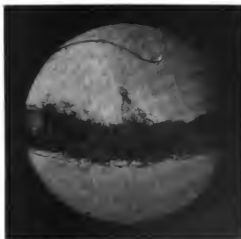


Fig. 144.

Aufgequollener Faden mit zerstörten Randzellenwänden. α -Leim.

neue Blasen und aneinander hängende geschlossene Schaum-
kammern.

Bei dem Zusammenziehen zu kugelförmigen Schaumflocken bleiben die einzelnen Teile der klebrigen flüssigen Schaummasse durch dünne Fäden verbunden, die wieder aus aufquellenden Schaummassen bestehen, dabei sehr fein oder unsichtbar sein können und erst beim Aufquellen oder durch Anlagerung anderer Teilchen sichtbar werden. Fig. 143 b [Photographie] zeigt solche dünne Fäden von ölartigem Leimtannat. Die Schaummassen zeigen große Ähnlichkeit mit denen in Figg. 132 a u. 132 b § 98 dargestellten.

Wurden die aus der Hülle einer Bodenblase gezogenen Fäden von β -Leimtannat statt in Wasser in 17proz. β -Leimlösung gelegt, so bildeten sie im Laufe eines Tages unter dem Deckglas aneinander hängende Blasen und Schanzzellen von 0,25 mm, deren dicke braune flüssige Wände von 0,015 bis 0,03 mm unter Randwinkeln von 120° aneinander stießen, und



Fig. 145.

im Innern braune Kugeln und kugelförmige Schaumblasen mit braunen Wänden zeigten. In Fig. 145, *a*, *b* habe ich einige aneinander hängende Blasen gezeichnet, die aus dickwandigen Schläuchen entstanden und teilweise durch dünnere Schläuche verbunden sind.

§ 101. *Zellen aus wässerigen Lösungen von Gerbsäure und β -Leim.* Statt festen β -Leim in den schmalen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm mit 5proz. Gerbsäurelösung einzuführen, sich auflösen und Zellen aus Leimtannat bilden zu lassen, kann man auch Tropfen aus wässriger Lösung von β -Leim von einem Glasstab oder einer Pipette auf die Oberfläche der Gerbsäure tropfen lassen und bei diesen an der Oberfläche hängenden Leimtropfen die Zellenbildung beobachten.

Die Zellenbildung wird dann nicht durch die verschiedene Konzentration der aus festem Leim entstandenen Leimlösungen gestört. Das erste von ölartigem Leimtannat umhüllte Leimsäckchen hat die regelmäßige Gestalt eines hängenden Tropfens

und die Umbildungen der Zelle zeigen größere Regelmäßigkeit, als bei Leimtannatzellen aus festem β -Leim.

Ich brachte fünf Tropfen gleicher Größe von

wässriger Lösung von β -Leim	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
vom spezifischen Gewicht	1,010	1,017	1,023	1,035	1,050
mit dem Prozentgehalt	8,92	5,84	7,75	11,49	17,00

auf die Oberfläche einer 5proz. Gerbsäurelösung vom spezifischen Gewicht 1,019. 69 Tropfen hatten ein Volumen von 2 ccm. Jeder Tropfen würde eine Kugel von 3,81 mm Durchmesser gebildet haben.

Der Tropfen der leichtesten Leimlösung *a* schwebte an der Oberfläche der spezifisch schwereren Gerbsäurelösung als flache Blase, deren Volumen schnell zunahm und eine kugelförmige Blase von 3,8 mm Durchmesser bildete, ähnlich wie die Oberflächenblasen (Fig. 140, *a*, *b*, *c*). Diese Kugel sank herab, nahm also Gerbsäure auf und setzte sich auf dem Boden des Glastroges am Quecksilber fest und verwandelte sich in ein nach oben geschlossenes Säckchen, eine kolbenartige Bodenblase (Ballon), die langsam weiter nach oben wuchs, und mit Flüssigkeit von kleinerem spezifischen Gewicht als 1,019 gefüllt war (vgl. Fig. 141, *b*).

Aus den Tropfen der anderen β -Leimlösungen *b*—*e* bildeten sich kolbenartige Säckchen von 5 mm Höhe, die langsam herabsanken, ihr Volumen vergrößerten und durch einen dünnen Schlauch mit dem Rest des Leimtropfens an der Oberfläche der Gerbsäure in Verbindung blieben. Die Säckchen sanken um so schneller, der Verbindungsschlauch war um so länger, je schwerer die Leimlösung war. Aus dem Säckchen der Leimlösung *b* (1,017) entstand sehr bald, wenige Zentimeter unter der Gerbsäureoberfläche eine kugelförmige Blase von 3,8 mm Durchmesser, die einige Millimeter in der schwereren Gerbsäurelösung (1,019) emporstieg, kurze Zeit in einiger Entfernung von der Flüssigkeitsoberfläche schweben blieb und dann zu Boden sank. Die Blase war größer und schwerer



Fig. 146.



Fig. 147.

geworden, mußte also aus der umgebenden Flüssigkeit Gerbsäure und nicht Wasser aufgenommen haben. Die zu Boden gesunkene Blase verwandelte sich hier in eine kolbenartige Bodenblase, die mit spezifisch leichterer Flüssigkeit, als die umgebende Gerbsäurelösung gefüllt war, aber höher stand, als die analoge Bodenblase aus Leimlösung *a*.

Wurde eine größere Menge β -Leimlösung *b* an die Gerbsäureoberfläche gebracht, so entstand ein länglicher Sack mit Anschwellungen und Einschnürungen (Fig. 148, *a*), der nach 1—2 Minuten auf den Boden der Gerbsäure herabsank und dort kugelförmige Bodenblasen bildete.

Das Säckchen der β -Leimlösung *c* war zuerst mit klarer Flüssigkeit gefüllt, zeigte im oberen Teile eine glatte, nach unten konvexe kolbenartige Scheidewand und nach weiterem

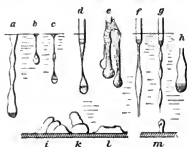


Fig. 148.

Aufquellen im oberen Teile viele feine Körnchen, die im Sonnenlicht sichtbar wurden (Fig. 148, *b*, *c*). Das Säckchen stand durch einen dünnen Schlauch mit dem Rest der Leimlösung an der Gerbsäureoberfläche in Verbindung, der auf der Mitte eine zylindrische Anschwellung von 8 mm Länge und 1 mm Durchmesser hatte. Das später auf den Boden herabgesunkene Säckchen bildete auf dem Quecksilber einen flachen Tropfen mit glatter Oberfläche, von der Form eines flachen Chloroformtropfens in Wasser. An dem dünnen Verbindungsschlauch zwischen dem flachen Bodentropfen und dem Rest des oberen Leimtropfens waren mit einem Mikroskop zahlreiche kleine Anschwellungen oder Blasen zu erkennen.

Aus der β -Leimlösung *d* entstand in ähnlicher Weise, aber früher als aus Leimlösung *c*, ein flacher Bodentropfen mit glatter Oberfläche und einem Verbindungsschlauch mit größeren langgestreckten Anschwellungen, als bei Leimlösung *c*. Der Bodentropfen und die Anschwellungen vergrößerten ihr Volumen. Nach einiger Zeit hatte der Bodentropfen 6,2 mm Durchmesser und 2 mm Höhe (von Kuppe bis Bauch gemessen)

und war durch einen dünnen Schlauch mit zwei größeren eiertigen Anschwellungen von 2—3 mm Durchmesser und Höhe, sowie mehreren kleineren Anschwellungen mit dem Leimrest an der Gerbsäureoberfläche verbunden. Fig. 146, *a*, *b*, *c*, *d* gibt die verschiedenen Formen dieser Leimtannatzelle aus β -Leimlösung *d* in 5 proz. Gerbsäurelösung.

Ans der Wand der frisch entstandenen Säckchen oder Blasen ließen sich mit einer Nadel feine Fäden ziehen. Bei Berührung mit Wasser oder wässriger Lösung von Gerbsäure oder β -Leim entstanden im Innern dieser Fäden hohle Blasen oder aneinander hängende Schaumblasen mit flüssigen Wänden, welche die in § 98 beschriebenen Erscheinungen zeigten.

Ein Faden von der Wand einer Bodenblase aus Leimlösung *d* bildete unter einem Deckglas in Wasser vier Anschwellungen, welche mit kugelförmigen Blasen von 0,045 mm bedeckt waren. Die mit klarer Flüssigkeit gefüllten Blasen verdoppelten ihren Durchmesser in kurzer Zeit, indem durch die Hülle von öltartigem Leimtannat Wasser in das Innere diffundierte. Zwischen Nicolschen Prismen erschien die Hülle doppeltbrechend, mit optischer Achse parallel dem Radius, wie bei Sphärokristallen. Nach einiger Zeit platzte ein Teil der Blasen und aus dem Faden wurden Gebilde mit 3 bis 5 aneinander hängenden Hohlkugeln.

§ 102. *Öltartiges Leimtannat aus α -Leim* (Gelatine) hat ähnliche Eigenschaften wie das aus β -Leim hergestellte.

27 g trockene Gerbsäure, unter Umrühren in eine Lösung von 100 g α -Leim (gewöhnliche Gelatine) in 90 g Wasser bei 100° eingeführt, lösten sich langsam zu einer dunkelbraunen Faden ziehenden, bei gewöhnlicher Temperatur sehr klebrigen Flüssigkeit. Die Fäden bewiesen, daß in der zähen Flüssigkeit unsichtbare flüssige Schaumwände enthalten waren. Die Fäden waren in der Peripherie doppeltbrechend mit optischer Achse normal zur Oberfläche, quollen in Wasser mit Methylenblau schnell auf zu einer Schaummasse mit blauen Wänden.

Ein Tropfen dieses α -Leimtannats auf einem Objektträger unter einem Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen quoll in Berührung mit Wasser auf zu einer gallertartigen Masse mit einzelnen Luftblasen, deren Umgebung doppeltbrechend war und zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen das dunkle

Kreuz der Sphärrokristalle zeigte. Bei weiterer Wasseraufnahme verschwand die Doppelbrechung und es entstanden rings um die Luftblase radiale Fäden einer öartigen braunen Flüssigkeit mit kugelförmigen Anschwellungen, die in wässriger Flüssigkeit in einem Ringe zwischen der dicken öartigen Hülle der Luftblase und einer ringförmigen Schaummasse mit dicken und dünnen Schaumwänden angespannt lagen (Fig. 147). Die radialen Fäden rissen allmählich und verwandelten sich in aneinander hängende Schaumblasen. Das Volumen der Blasen und Schaumzellen nahm zu, indem Wasser durch die öartigen Wände nach Innen diffundierte, bei den Schaumzellen am Rande schneller, als im Innern des Leimtannattropfens.

§ 103. *Zellen aus α -Leim (Gelatine), Tischlerleim, Hausenblase, Fischleim in Gerbsäurelösung.* Statt β -Leim kann man auch eingetrocknete Lösung von α -Leim (gewöhnlicher Gelatine), Tischlerleim, Hausenblase oder Fischleim mit dem Glasstab in die Gerbsäurelösung bringen oder in kleinen Stückchen auf der Flüssigkeitsoberfläche schwimmen lassen und damit Leimsäckchen und künstliche Zellen erhalten. Die Zellen entstehen dabei im allgemeinen langsamer als mit β -Leim, weil die Wände des Säckchens und des Schlauches durch die in ihnen reichlicher auftretenden flüssigen und festen Bänder und Fäden schwerer beweglich sind. Es ist dies mit den Resultaten des § 86 in Übereinstimmung, wonach in Gallerte aus α -Leim sich flüssige unsichtbare Lamellen abgeschieden haben und später fest geworden sind.

Durch diese festen Lamellen in den Wänden aus öartigem Leimtannat bilden sich auch mehr Falten in diesen Wänden. Die reine Tropfen-Kugel- und Zylinderform der flüssigen Wand wird umgewandelt in kolbenartige Formen (Fig. 148, *c*). Die länglichen, nach oben und unten spitzen Anschwellungen der Schläuche werden gestreckter (Fig. 139, *g*), haben größere Dimensionen und sinken langsamer, wie bei reinem β -Leim. Mehrere Anschwellungen an demselben Schlauch übereinander sind nun so länger und dicker, je tiefer sie liegen (Fig. 148, *g*). So beobachtete ich beispielsweise an einem Schlauch aus α -Leim von 0,4 mm Durchmesser eine Anschwellung von 12 mm Länge und 1,08 mm Durchmesser in der Mitte. Die aus α -Leimtannat gezogenen Fäden quellen ebenso wie die aus

β -Leimtannat gezogenen in Wasser auf und zeigen dieselben Erscheinungen, bilden Blasen und zahlreiche zusammenhängende Schaumwände von klebrigem öltartigen Leimtannat im Innern des Fadens, welche geschlossene Schaumzellen umschließen. Die Randzellen quellen durch Wasseraufnahme schneller auf, als die Schaumzellen im Innern des Fadens. Durch längere Einwirkung des Wassers geht das öltartige Leimtannat in festes unlösliches Leimtannat über. Die Außenwand der Randzellen wird aufgelöst und verschwindet, die Seitenwände bleiben stehen als spitze feste Zacken (Fig. 144 [Photographie]) und die Hinterwände der Randzellen bilden eine dünne feste Haut (von saurem Leimtannat?), welche das Innere des Leimtannatfadens vor weiterer Einwirkung des Wassers schützt.

Bei Zellen aus *Tischlerleim* und Gerbsäure waren die Falten und festen Bänder in den flüssigen Wänden des öltartigen Leimtannats noch zahlreicher, das Leimtannat selbst noch dunkler gefärbt, als bei Gelatine. Die Anschwellungen des Verbindungsschlauches waren langgestreckt (Fig. 149, *b*) oder kugelförmig mit spitzen Enden, in deren unterem Teil sich dunkelbraunes öltartiges Leimtannat ansammelte und den Verbindungsschlauch verstopfte (Fig. 139, *f*). Die Schläuche sanken sehr langsam, höchstens 1 mm in 40 Sek. Einzelne Säckchen mit Anschwellungen und braunem öltartigen Leimtannat im unteren Teile erstarrten schon, ehe sie den Boden des Troges erreicht hatten (Fig. 148, *h*).

Nach vier Tagen hatten sich einzelne Schläuche mit Anschwellungen und gallertartigen gezackten Wänden gebildet, die ganz mit braunem Leimtannat gefüllt waren (Fig. 149, *a*), oder halb mit braunem Leimtannat gefüllte kugelförmige und elliptische Blasen, die in festgewordenen Schaumwänden einer steifen Gallerte hingen (Fig. 149, *c*). Die Bodenblasen waren erstarrt, ehe sie die von der Oberflächenspannung geforderte Kugelform erreicht hatten (Fig. 148, *i, k, l, m*).

Die zackigen Formen der Gallerte Fig. 149, *a* hatten große Ähnlichkeit mit den Metallsalzvegetationen von Nickelsulfat in Wasserglaslösung (Fig. 31, *a*, § 29).



Fig. 149.

Bei Zerstörung der mit leicht beweglicher Flüssigkeit gefüllten Bodenblasen im letzten Stadium der Zellenbildung aus α -Leim entsteht, wie bei β -Leim, in der Gerbsäurelösung ein Regen von festen Körnchen und Schaumflocken. Die letzteren bestanden, wie das Mikroskop bei starker Beleuchtung zeigte, aus kleinen Hohlkugeln, in deren Oberfläche viele Leimlinsen wie Stacheln verteilt waren, analog den Erscheinungen bei ölsauren Alkalien in Wasser.¹⁾

Bei Tropfen aus eingetrockneter Lösung von *Hausenblase* in 5proz. Gerbsäurelösung zeigten sich in der Wand des Leimsäckchens und der Schläuche sehr viele feine Linien und Kanäle. Die Blasenbildung war reichlicher, wie bei Leim und die flachen Tropfen aus öltartigem Leimtannat hatten 0,75 bis 0,65 mm Höhe zwischen Kuppe und Bauch, oder eine Höhe und Oberflächenspannung, wie ich sie auch bei flachen Tropfen aus β -Leim und Gerbsäure beobachtet habe.

Bei *Fischleim* in Gerbsäure haben die Säckchen im ersten Stadium der Zellenbildung die in Fig. 149, *d* gezeichnete Gestalt. Die Schläuche bestehen oft aus mehreren konzentrischen Röhren oder vielen nebeneinander liegenden Röhren, und zerfallen später in zusammenhängende Hohlkugeln, oder einzelne Leimkugeln, oder kugelförmige Blasen. Die Leimkugeln fallen bei gleicher Größe mit verschiedener Geschwindigkeit, haben also verschiedenes spezifisches Gewicht. Die mit klarer Flüssigkeit gefüllten Bodenblasen scheinen von einer halbdurchsichtigen Haut bedeckt, aus der man mit einer Nadel Fäden ziehen kann, die sich in tuchähnliche Membranen verwandeln, von denen viele dünne Fäden nach unten sinken. Der Inhalt der hellen Bodenblasen bildet mit der Gerbsäure unlösliche Flocken, die unter dem Mikroskop aus kugelförmigen Blasen oder Stücken von Schaumwänden bestehend erscheinen.

Bringt man Stückchen α -Leim (Gelatine), Tischlerleim, Fischleim, welche lange trocken gelegen haben, mit Gerbsäurelösung zusammen, so bilden sich keine künstlichen Zellen. Aber nach 6—8 Tagen wird die Leimmasse am Rande weich und öltartig, zieht Fäden und zeigt unter dem Mikroskop Hohlkugeln und Schaumwände, die doppeltbrechend sind.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 53. p. 598 u. Taf. VIII, Fig. 3. 1894.

Es scheint, daß der Leim schwerer Wasser aufnimmt, wenn er lange eingetrocknet gelegen hat, und daß sich beim Auflösen des Leimes in warmem Wasser Leimhydrate bilden, die nach dem Eintrocknen noch bestehen bleiben. Aus diesem Leimhydrat werden dann schneller, als aus wasserfreiem Leim, die Leimlösung und das ölarartige Leimtannat gebildet, welche bei der Zellenbildung eine so bedeutende Rolle spielen.

Bei unseren geringen Kenntnissen über die eigentliche Natur des Leimes und der Gerbsäure, auf die ich schon in §§ 86 und 92 hingewiesen habe, halte ich es nicht für ausgeschlossen, daß dieselben meist ein Gemisch zweier oder mehrerer chemischer Verbindungen sind.

§ 104. *Einfluß von Gallussäure und fremden Beimengungen auf die Bildung von Blasen, Schaumwänden und Traubescellen und auf die Oberflächenspannung des ölarartigen Leimtannats.* Je nach der Art der benutzten Gerbsäure ist die Neigung Fäden zu ziehen, die Klebrigkeit des daraus entstandenen Leimtannats, und die Wachstumsgeschwindigkeit der Schaumwände verschieden. Kleine Mengen fremder Substanzen können Bildung, Beständigkeit, Klebrigkeit und Erstarren des ölarartigen Leimtannats wesentlich beeinflussen.

Bringt man unter das Deckglas zu einem in Wasser aufgequollenen Faden von Leimtannat wässerige Lösung von Gallussäure ($\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{1000}$), so werden die Schaumwände, selbst wenn sie schon fest und brüchig sind, flüssig und leichter beweglich. Einzelne Schaumwände platzen. Es bilden sich größere Hohlkugeln und Schaummassen mit größeren Hohlräumen in der Leimtannatmasse, als ohne Gallussäure und dicke braune Scheidewände, in denen dann später von neuem kugelförmige Hohlräume oder hohle Kammern mit flüssigen Schaumwänden entstehen.

Aus Wasser mit Methylenblau speichern diese brannen Schaumwände den Farbstoff auf und werden unlöslich in Wasser. Zuweilen gelingt es, diese Schaumwände so zu trocknen und in Kanadabalsam einzulegen, daß die Schaumstruktur erhalten bleibt.

Sehr kleine Mengen Methylenblau können also das Aufquellen des Leimtannats bei Zutritt von Wasser und das Ent-

stehen neuer Schaummassen hinderu, wie ich dies schon oben § 98 beschrieben habe.

In früher brauchbarer 5 proz. Gerbsäurelösung bildete β -Leim nach 6 Monaten keine Zellen oder Verbiidungsschläuche mit Anschwellungen. Das öartige Leimtannat, welches entstand, war zu wenig klebrig, die Schläuche bildeten sich zu schnell.

Tropfen von β -Leimlösung mit $\frac{1}{500}$ Methylenblau gaben andere Zellen und Schläuche als Tropfen ohne Farbstoff in derselben Gerbsäure. Es bildet sich ein Schlierenstrom mit blauen Rändern und negativer Photodromie, während sonst die Flocken von Leimtannat in Gerbsäure positive Photodromie zeigten.

Wurde ein Glasfaden mit einzelnen an ihm angetrockneten Tropfen von β -Leim schräg in einen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm gestellt, in welchem kalt bereitete Lösungen mit 5, 3 und 2,5 Proz. reinem α -Tannin übereinander geschichtet waren, so entwickelten sich birnförmige Leimtaunatzellen zuerst in der 4,5 proz. Tanninlösung, sanken langsam abwärts und stiegen,

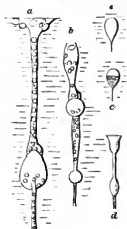


Fig. 150.

ohne den Boden des Glastroges berührt zu haben, nach $\frac{1}{2}$ oder 1 Stunde, wenn ihr Volumen größer und der Inhalt spezifisch leichter geworden war, in der Tanninlösung empor. Die aufsteigenden Blasen waren in 2,5 proz. Tanninlösung klar, in den anderen Tanninlösungen oben klar, unten mit weißlichen Massen gefüllt (Fig. 150 e, c). Bei Zusatz von Gallussäurelösung ($\frac{1}{30000}$) zur Tanninlösung werden die Blasen klar und ihre Hülle leichter beweglich. Der Inhalt der Blasen nimmt schneller an Volumen zu, als ohne Gallussäure, die kolbenartigen Blasen steigen an die Oberfläche der

Tanninlösung, breiten sich hier aus (Fig. 141, c) und platzen. Es bilden sich zahlreiche Teilchen und Flocken von saurem Leimtannat, die als Regen herabsinken und zickzackförmige Schichten bilden und in einzelnen horizontalen Schichten

längere Zeit schweben bleiben, wie sie auch bei Kaoliu- oder Kieselsäuretrübungen (§§ 6, 31, 20) auftreten. An den schmalen Trogwänden waren die horizontalen Flockenschichten konvex, wie eine Quecksilberfläche. Wenn der dünne Glasfaden schräg in den Glastrog gestellt war, so lag über dem unteren Teil des Glasfadens ein flockenfreier Raum.

Bringt man auf eine ältere Bodenblase, die sich aus β -Leim in 5proz. Tanninlösung gebildet hat, ein Körnchen feste Gallussäure, so quillt die Blase bald auf und wird höher.

Teilchen von β -Leimtaunat in wässriger Lösung von Gallussäure ($1/_{130}$) zeigten nach 4 Stunden Brownsche Molekularbewegung.

In 5proz. β -Gerbsäure vom spezifischen Gewicht 1,0164, welche durch fünfständiges Kochen der Lösung von α -Gerbsäure in einem Kolben mit Rückflußkühler erhalten war, gab β -Leim auch hängende Tropfen und Schläuche, wie in 5proz. Lösung von α -Gerbsäure. Aber das öartige Leimtaunat war bei β -Gerbsäure leichter flüssig unter sonst gleichen Bedingungen. Die Schläuche rissen, ehe sich die Anschwellungen ausgebildet hatten und wurden mit ihrem unteren Ende häufig nach der Lichtseite des Glastroges hingezogen.

Andererseits bleiben bei reiner α -Gerbsäure die oben beschriebenen Erscheinungen häufig aus, indem sich bloß ein Säckchen, oder ein Säckchen mit einem kurzen Schlauch und einer größeren Anschwellung bildet (Fig. 150, d), deren Wandsubstanz aus öartigem Leimtaunat so viele feste Lamellen enthält, daß sich kein langer Schlauch mit kugelförmigen Anschwellungen bilden kann.

Während die aus β -Leim entstandenen birnförmigen Blasen in 5proz. Lösung von reinem α -Tannin schon nach 1 Stunde aufsteigen, stiegen sie in 5proz. Lösung von gewöhnlicher Gerbsäure erst nach mehreren Tagen auf. Die Gerbsäurelösungen bildeten öartiges Leimtaunat mit Anschwellungen des Verbindungsschlauhes und flüssigen Zellwänden um so leichter, je besser die Gerbsäurelösung den elektrischen Strom leitete (§ 92). In warm bereiteter Tanninlösung bildeten sich die Anschwellungen und Zellen aus β -Leim schneller und mit spezifisch schwererem Inhalt aus, als in kalt bereiteter Tanninlösung. Die Zellen sanken in der ersteren schneller, als in der letzteren.

In 5 proz. wässriger Lösung von β -Tannin (das also längere Zeit auf 100° erhitzt war, § 92) bildete β -Leim birnförmige Zellen, die langsam herabsanken, mit kugeligen oder länglichen Anschwellungen auf dem Verbindungsschlauch.

Bei Zusatz von Gallussäurelösung ($\frac{1}{100}$) zu 5 proz. Tanninlösung bildete β -Leim Schläuche mit einer Reihe Hohlkugeln übereinander und von nahezu demselben Durchmesser, wie der Schlauch (Fig. 150, a, b). Es war ein ähnliches Gebilde, wie die leiterähnlichen Gebilde von Benzoylcholesterin, welche ich früher beschrieben habe.¹⁾ Nur waren bei letzterem die Blasen ein wenig größer geworden, als der Durchmesser des Schlauches, und hatten Querwände normal zur Schlauchwand gebildet.

Sollen Zellen und Anschwellungen des Verbindungsschlauches aus β -Leim in 5 proz. Gerbsäurelösung während einer Vorlesung in kurzer Zeit entstehen, so empfiehlt es sich, die Gerbsäurelösung unter Ersatz des verdampften Wassers längere Zeit zu kochen oder ein wenig Gallussäure in passender Menge zuzusetzen.

Eine kalt bereitete 5 proz. Lösung von reiner Gerbsäure (α -Gerbsäure) wurde durch 5 stündiges Kochen in β -Gerbsäure verwandelt. In der β -Gerbsäure bildeten sich aus einem an einen Glasstab angetrockneten Tropfen von β -Leim ein wenig klebriges öartiges Leimtannat und dadurch feine Fäden (Verbindungsschläuche) mit Anschwellungen. Bei Sonnenlicht setzten sich diese feinen Fäden an der Lichtseite des Glastropfes fest, zeigten positive Photodromie.

1 Vol. β -Gerbsäure und 9 Vol. α -Gerbsäure gaben eine gute Mischung für die Ausbildung Traubescer Zellen aus β -Leim. Der flache Bodentropfen aus sehr klebrigem öartigem Leimtannat, der sich auf dem Quecksilber bildete, hatte 2,3 bis 2,6 mm Höhe (von Kuppe bis Bauch gemessen). Das spezifische Gewicht wurde nicht bestimmt. Nimmt man es aber wieder, wie in § 99, zu 1,20 und das der Gerbsäure zu 1,02 an, so würde die Oberflächenspannung für dieses Leimtannat an der Grenze mit dem Gemisch von α - und β -Gerbsäure 0,48—0,61 mg/mm gewesen sein, also doppelt so groß, wie bei den Messungen §§ 96 und 99.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 53. p. 613 u. Taf. VII, Fig. 26. 1894.

Sehr kleine Mengen fremder Substanz ändern die Oberflächenspannung und Klebrigkeit des öartigen Leimtannats, und damit die Entwicklung der Zellen und Schaumwände in erheblichem Maße.

§ 105. *Gerbung.* In § 97 wurde gezeigt, daß öartiges Leimtannat in Wasser lange Zeit scheinbar ungeändert bleibt, indem sich eine dünne Schutzschicht von öartigem Leimtannat oder unlöslichem sauren Leimtannat bildet, welches in merklicher oder unmerklicher Dicke die Leimmasse vor der weiteren Einwirkung des Wassers schützt.

Bei der Lederbereitung wird wahrscheinlich mit dem technischen Prozeß des Gerbens an der Oberfläche der tierischen Häute, der sogenannten Blöße, durch Einwirkung von Wasser und Luft öartiges Leimtannat gebildet, das in dünnen Schichten von unmerklicher Dicke die Haut überzieht und vor weiterer Einwirkung des Wassers etc. schützt.

§ 106. *Typische Eigenschaften des Leimtannats. Quellung und Schrumpfung.* Konzentrierte Lösungen von Leimtannat werden bei starker Verdünnung mit Wasser durch Hydrolyse in unlösliches saures Leimtannat und Leimlösung gespalten, ähnlich wie konzentrierte Lösungen von ölsauren Alkalien durch Einwirkung des Wassers in unlösliches saures Alkaliöleat und Lösung von freiem Alkali zerfallen (§ 96).

Leimtannat bildet mit Wasser eine dunkelbraune öartige wasserarme Lösung *A* und eine hellbraune wasserreiche Lösung *B* mit Oberflächenspannung α_{AB} an der gemeinsamen Grenzfläche. Die verschiedene Färbung beider Flüssigkeiten erleichtert das Studium der Erscheinungen, welche von der Oberflächenspannung α_{AB} und deren Änderung abhängen.

Jede dieser Lösungen *A* und *B* enthält Wasser, Leim und Gerbsäure, aber in verschiedener Menge, wie die alkoholreichen und alkoholarmen wässerigen Salzlösungen *A* und *B* mit Oberflächenspannung in der gemeinsamen Grenzfläche (§§ 47—58).

Die wasserarme Leimtannatlösung *A* entsteht aus scheinbar homogener dunkelbrauner Flüssigkeit bei Zutritt von Wasser, ist ein flüssiger Niederschlag, der sich periodisch bildet und periodisch abscheidet aus der übersättigten wässerigen Lösung des Niederschlages als öartige Flüssigkeit mit Oberflächen-

spannung gegen die umgebende wässerige Lösung (§ 23). Dieses wasserarme ölarartige Leimtannat kann nach einiger Zeit erstarren, ähnlich den periodisch gebildeten und periodisch abgeschiedenen Niederschlägen von Ferrocyankupfer, Ferrocyaneisen etc. (§§ 22—28), von Silicaten (§§ 29—34) oder Calciumkarbonat (§§ 35—42); von ölarartigen wässerigen Lösungen anorganischer und organischer Kolloide, wie Kieselsäure ohne und mit Alkali (§§ 63—72), Eisenoxydhydrat und Eisenoxychlorid (§§ 73—77), Arseniktrisulfid (§ 78), Schwefel (§ 79); wie Leim (§§ 85—87), Eiweiß (§§ 88—91), Gerbsäure (§§ 92 bis 93), Stärke (§ 94), wie alkalihaltige Ölsäure¹⁾ oder wie alkoholhaltige wässerige Salzlösungen (§§ 47—58).

Alle diese Substanzen bilden zum Teil bei Wasserverlust, zum Teil bei Wasseraufnahme Blasen und Schaummassen mit sichtbaren oder unsichtbaren Wänden, die aus dem flüssigen Niederschlag oder der ölarartigen Flüssigkeit *A* bestehen.

Auch der Schaum bildet sich, wie der ölarartige Niederschlag, periodisch.

Schaummassen mit flüssigen Wänden, die bei Wasseraufnahme ihr Volumen vergrößern und *aufquellen*, oder bei Wasserabgabe ihr Volumen verkleinern und *eingehen* oder *schrumpfen*, die bei kleiner oder unsichtbarer Größe der Schaumzellen *flüssige Gallerte* bilden, können zusammenfließen, indem die Wände aus ölarartiger Flüssigkeit *A* zusammenfließen und der Zellinhalt von wässriger Flüssigkeit *B* zusammenfließt. Erstarren die Schaumwände aus ölarartiger Flüssigkeit *A* — durch Kontakt oder Impfung mit schon erstarrter Substanz oder durch Wasserverlust oder Wasseraufnahme, oder durch Abgabe oder Aufnahme kleiner Mengen fremder löslicher Substanz, oder durch chemische Veränderungen —, so wird aus der *flüssigen Schaummasse* oder *flüssigen Gallerte* eine *feste Schaummasse* oder *steife Gallerte*.

Entstehen beim Aufquellen oder Schrumpfen Spannungen in den flüssigen oder festen Schaumwänden, so werden die Schaumwände oder Gallerte doppeltbrechend. Die Spannungen haben die Richtung der Schaumwände, stehen normal gegen die (feste oder erstarrte) Oberfläche der Schaummasse oder

1) G. Quincke, Wied. Ann. 53. p. 594—617. 1894.

Gallerte (vgl. Fig. 147), sind positiv beim Aufquellen und negativ beim Schrumpfen. Dementsprechend ist die Doppelbrechung der Schaumwände, Schaummassen und Gallerte, je nach Größe der Spannung, von wechselnder Größe. Sie kann negativ, oder positiv sein, hat aber immer die optische Achse normal zur Oberfläche.

Während des Aufquellens oder Schrumpfens werden die Schaummassen, unter dem Einfluß der Oberflächenspannung der Schaumwände, an der Außenseite abgerundet, haben das Bestreben, sich zu kugelförmigen Schaummassen zusammen zu ziehen. Andere Teile der flüssigen Schaummassen werden dabei zu sehr feinen oder unsichtbaren Fäden ausgezogen, deren Schaumzellen wieder durch Wasseraufnahme oder -abgabe ihr Volumen vergrößern oder verkleinern, die wieder aufquellen oder schrumpfen können.

Feste Schaummassen oder feste Gallerte können noch aufquellen oder schrumpfen, nachdem ihre Schaumwände wieder flüssig geworden sind und dem diffundierenden Wasser den Durchgang gestatten.

Die dunkelbraune Farbe der wasserarmen Leimtannatlösung *A* läßt das allmähliche Flüssigwerden der festen Schaumwände im Innern der erstarrten Gallerte gut erkennen, indem dabei der Randwinkel von 90° der festen Schaumwände in den Randwinkel 120° der flüssigen Schaumwände übergeht.

Je nach der Menge und Oberfläche der unsichtbaren flüssigen und festen Schaumwände zeigen die kolloidalen Lösungen von Kieselsäure (§ 81) oder Leimtannat (§ 96) verschiedene Viskosität.

Die mit ölartigen Niederschlägen bedeckten Schläuche bilden kugelförmige Querwände oder Anschwellungen und zerfallen in einzelne Hohlkugeln, in deren Wänden wieder Hohlinsen oder Schaummassen verteilt sind, bei alkalihaltiger Ölsäure, bei den Metallsalzvegetationen mit Ferrocyankalium und Wasserglas (§§ 22—34) oder Calciumkarbonat (§ 35), bei alkoholhaltigen wässerigen Salzlösungen (§ 49), beim Eintrocknen der oben erwähnten anorganischen und organischen Kolloide (§§ 63—80) und bei den Zellen und Verbindungsschläuchen von Leimtannat (§ 100).

Wechselt die Oberflächenspannung des frisch gebildeten

ölartigen Niederschlages *A* an der Oberfläche eines Strahles oder Schlanthes, so wird die Oberfläche konkav an der Stelle mit größerer Oberflächenspannung (§ 23), der Schlauch bildet Wellenlinien oder Schraubenwindungen bei den Metallsalzevegetationen und allen oben erwähnten Substanzen, auch bei Leimtannat (§ 97, Fig. 132 b, bei *s*; § 99, Fig. 136, *e*, *f*).

Die Oberflächenspannung α_{AB} der Grenze der wasserarmen ölartigen Lösung *A* in der wasserreichen angrenzenden Flüssigkeit *B* hängt ab von der Zusammensetzung oder Konzentration der Lösungen *A* und *B*. Wird letztere durch Wasser oder eine Lösung *C* von geringerer oder größerer Konzentration ersetzt, so kann die Oberflächenspannung α_{AB} abnehmen oder zunehmen. Die Flüssigkeit *C* muß sich an der Oberfläche der ölartigen Lösung *A* in einer dünnen Schicht ausbreiten, wenn dadurch die ursprüngliche Oberflächenspannung der Oberfläche von *A* verkleinert wird. Gleichzeitig werden Ausbreitungswirbel erzeugt, welche die ölartige Flüssigkeit *A* in die wässrige Flüssigkeit *B* hereinreißen und Myelinformen oder Schaumflocken oder eine flüssige Emulsion oder Milch von Kugeln oder Blasen aus Flüssigkeit *A* in Flüssigkeit *B* bilden bei alkalihaltigen Ölen¹⁾, flüssigem Calciumkarbonat (§ 35); bei alkoholhaltigen Salzlösungen (§§ 50—52), Schwefel (§ 79) oder Leimtannat (§ 97).

Bei den Ausbreitungswirbeln der wässrigen Salzlösungen in Alkohol oder der alkalihaltigen Ölmassen in Wasser oder der ölartigen Leimtannatmassen in Wasser ist die in dünner Schicht ausgebreitete Flüssigkeit *C* durch Einwirkung des Wassers auf Bestandteile der ölartigen Flüssigkeit *A* gebildet worden, und besteht aus wasserreicherer Salzlösung (§§ 49—52) oder aus Seifenlösung²⁾ oder aus konzentrierter Leimlösung oder gerbsäurearmer Leimtannatlösung (§ 97).

Die Ausbreitungswirbel können einzelne Blasen und flüssige Schaumflocken zu größeren Schaumflocken vereinigen und mit positiver oder negativer Photodromie an die Wand kleben, wie bei der Klärung trüber Lösungen von Kaolin, Mastix, β -Eiweiß, Silber (§§ 1—18) oder der Gewinnung von kolloidalen

1) G. Quincke, Pflügers Archiv, 19. p. 136. 1879.

2) G. Quincke, l. c.

Kieselsäurelösungen durch Alkalien oder Kalksalze (§ 81), oder den Trübungen von flüssigem Calciumkarbonat (§ 40) oder den Flocken von saurem Leimtannat in Gerbsäure (§ 100).

Aber die Ausbreitungswirbel können auch umgekehrt die flüssigen Schaumwände eines Schaumes zerstören und Schaum mit größeren Kammern erzeugen, wie bei den Schaummassen von Mastixtrübungen durch Kupfersulfatlösung (§ 7), den Schaumwänden von Arsentrisulfid durch verschiedene Salzlösungen (§ 78) und bei den Schaumwänden von Leimtannat durch Lösungen von Leim (§ 99) oder Gallussäure (§ 103).

Kleine Mengen fremder Substanz können die Erstarrung der ölartigen Schaumwände herbeiführen, wie bei den flüssigen Niederschlägen von Ferrocyan kupfer ein unbekanntes Agens oder bei den flüssigen Schaumwänden von Leimtannat das Methylenblau (§ 98), oder können umgekehrt schon erstarrte Schaumwände verflüssigen, wie Salzlösungen die Schaumwände von steifer Leimgallerte (§ 85) oder Gallussäure die festen Schaumwände von Leimtannat (§ 103).

Kleine Mengen fremder Substanz können also steife Schaummassen oder steife Gallerte mit festen Schaumwänden in flüssige Schaummassen oder flüssige Gallerte verwandeln, oder umgekehrt, und das Aufquellen oder Schrumpfen der Gallerte einleiten oder verhindern.

Anorganische und organische Kolloide zeigten dieselben Erscheinungen.

Dem früheren und dem jetzigen Assistenten am hiesigen physikalischen Institut, Hrn. Professor Dr. J. Precht und Hrn. Privatdozenten Dr. Rudolf Weber, spreche ich für die stets bereite und aufopfernde Unterstützung bei der Herstellung der Photographien für diese Untersuchungen meinen besten Dank aus.

Heidelberg, den 12. Oktober 1902.

(Eingegangen 9. Dezember 1902.)

4. *Über ein Integral*
der Gleichungen für die Wellenbewegung, welches
dem Dopplerschen Prinzip entspricht;
von Emil Kohl.

Die Begründung, welche Doppler¹⁾ dem von ihm aufgestellten Prinzip gegeben hat, gilt im wesentlichen noch heute als grundlegend. Doppler verwandte zur Ableitung desselben nicht die Gleichungen für die Wellenbewegung, sondern schöpfte sie aus der Betrachtung des Bewegungsvorganges, welcher sich am Orte des Beschauers abspielt, wenn sich das die Schwingungen einer vorhandenen Quelle fortpflanzende Mittel bewegt. Naturgemäß läßt sich hieraus überhaupt nur das periodische Glied dieser Bewegung, nicht aber auch die Amplitude, gewinnen. Diese Darstellung hat, ganz abgesehen von der geänderten Art und Weise, wie dieses Prinzip in der Regel angewendet wird, das Mißliche, daß der Beweis, ob die so gefundenen Ausdrücke auch wirklich mit den Bewegungsgleichungen des Mittels in Übereinstimmung stehen, also tatsächlich eine mögliche Bewegung beschreiben, nicht in voller

1) Ch. Doppler, Abhandl. d. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 5. p. 294—306. 1847.

Besondere theoretische Untersuchungen über dieses Prinzip haben ferner E. Mach (Zeitschr. f. Mathematik u. Physik p. 120—126. 1861), W. Voigt (Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen aus dem Jahre 1887, p. 41—51), W. Michelson (Astrophys. Journ. 13. p. 192 bis 198. 1901) durchgeführt.

Strenge erbracht werden kann. Andererseits spielt aber gerade die Amplitude eine wichtige Rolle, wenn es sich um Aufgaben handelt, bei welchen die im Mittel vorhandene Energie in Betracht kommt. Aus diesem Grunde dürfte eine Ableitung des Dopplerschen Prinzipes, welche außer dem periodischen Gliede auch auf die Amplitude Rücksicht nimmt und sich auf die Gleichungen für die Wellenbewegung stützt, nicht überflüssig erscheinen. Was die Aufstellung der periodischen Funktion betrifft, so mußte auch hier, wie es ja in der Natur der Sache liegt, auf die Betrachtung des Vorganges näher eingegangen werden; dieser wird aber insofern anders aufgefaßt, als eine schwingende Quelle angenommen wird, welche sich in einem ruhend gedachten Mittel fortbewegt. Da sich unter diesem Gesichtspunkte die Entwicklungen vielfach von jenen Dopplers unterscheiden, konnte eine nähere Auseinandersetzung der geometrischen und rechnerischen Verhältnisse nicht vermieden werden.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, einen genauen Ausdruck für die Komponenten der an einer bestimmten Stelle eines gegebenen Mittels vorhandenen Bewegung abzuleiten, wenn sich in demselben eine harmonisch schwingende Quelle mit der gleichförmigen Geschwindigkeit c geradlinig fortbewegt; von der Größe c soll angenommen werden, daß sie kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit \mathfrak{B} einer Erregung in dem betreffenden Mittel sei. Für diese Aufgabe ist nötig, daß die Funktionen für die Komponenten nicht nur das periodische, die Phase der Bewegung kennzeichnende Glied, sondern auch die Amplituden in ihrer Abhängigkeit von der Entfernung der gewählten Stelle und der Quelle enthalten, ferner, daß sie den bekannten Gleichungen für die Wellenbewegung

$$(1) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \mathfrak{B}^2 \Delta u, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = \mathfrak{B}^2 \Delta v, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = \mathfrak{B}^2 \Delta w$$

Genüge leisten. Diese Gleichungen können sowohl für die longitudinale wie auch für die transversale Schwingungsform als Differentialquotienten einer einzigen Funktion dargestellt werden, und zwar in der allgemeinsten, sich an die bekannte Hertz'sche Darstellung anschließenden Gestalt

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \text{a) } u &= \sum_{i=1,2,\dots} A_i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{m+n+p} \bar{V}}{\partial x^m \partial y^n \partial x^p}, \\
 v &= \sum_{i=1,2,\dots} B_i \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{m+n+p} \bar{V}}{\partial x^m \partial y^n \partial x^p}, \\
 w &= \sum_{i=1,2,\dots} C_i \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{m+n+p} \bar{V}}{\partial x^m \partial y^n \partial x^p},
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für longitudinale} \\ \text{Schwingungen,} \end{array} \\
 \\
 & (2) \left. \begin{aligned}
 \text{b) } u &= \sum_{i=1,2,\dots} A'_i \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^p \bar{V}}{\partial x^p} - \sum_{i=1,2,\dots} C'_i \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^n \bar{V}}{\partial y^n}, \\
 v &= \sum_{i=1,2,\dots} B'_i \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^n \bar{V}}{\partial x^n} - \sum_{i=1,2,\dots} A'_i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^p \bar{V}}{\partial x^p}, \\
 w &= \sum_{i=1,2,\dots} C'_i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^n \bar{V}}{\partial y^n} - \sum_{i=1,2,\dots} B'_i \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^n \bar{V}}{\partial x^n},
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für trans-} \\ \text{versale} \\ \text{Schwingungen,} \end{array}
 \end{aligned}$$

wobei \bar{V} der Kürze wegen für

$$\bar{V} = \sum_{k=0,1,\dots} a_k \frac{d^k V}{dt^k}$$

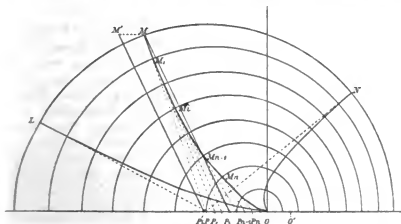
gesetzt wurde und V die Gleichung

$$(3) \quad \frac{d^3 V}{dt^3} = \mathfrak{B}^2 \Delta V$$

erfüllen muß. Die Aufgabe ist nunmehr die, für V eine Funktion zu finden, welche durch diese Gleichungen festgelegt wird und gleichzeitig auf die gleichförmige, geradlinige Fortbewegung der Quelle Rücksicht nimmt. Der zur Lösung eingeschlagene Weg ist rein synthetisch, insofern aus den Bedingungen der Aufgabe auf die Form derselben geschlossen werden wird. Diesem Untersuchungsgang entsprechend sind die Aussagen über die Gestalt der Phasenfunktion und der Amplitude, welche auf diesem Wege abgeleitet werden, zunächst hypothetischer Natur; aus der Tatsache, daß sie die Differentialgleichungen für die Wellenbewegung erfüllen, wird erst auf ihre wirkliche Geltung geschlossen werden.

Es werde also in der nachstehenden Figur eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig fortschreitende Quelle Q angenommen, welche harmonische Schwingungen von der Gestalt $\sin 2\pi t/\tau_0$ ausführt. Die Bahn der Quelle werde als X -Achse gewählt und jene Stelle O , wo sich Q zur betrach-

teten Zeit $t = 0$ befindet, als Koordinatenanfangspunkt angesehen. Die Quelle hat während ihrer Bewegung aus dem Unendlichen in jedem Punkte ihrer Bahn Veranlassung zu einer unendlich kurz dauernden Erregung gegeben, welche sich im Raume fortpflanzt. Man betrachte z. B. einen Punkt P der Bahn, welcher vor t Zeiteinheiten der Ort der Quelle war; dann hat sich die daselbst hervorgerufene Erregung während des Fortschreitens der Quelle bis zum Nullpunkt auf eine Kugeloberfläche fortgepflanzt, deren Mittelpunkt P und deren Halbmesser $\mathfrak{B}t$ ist. Es ist ja naheliegend anzunehmen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erregung in einem ge-



gebenen Mittel ganz unabhängig davon ist, ob die nächste Erregung an derselben oder an einer benachbarten Stelle stattfindet. Denkt man sich für alle Punkte der negativen Abszissenachse die entsprechenden Kugelflächen gezeichnet, so erhält man das System der von Q während der Zeit $t = -\infty$ bis $t = 0$ ausgesendeten Wellenflächen. Da die Bewegung in jedem Punkte eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der X -Achse liegt und dessen Ebene auf ihr senkrecht steht, die gleiche ist, so kann man die Betrachtungen auf die Zeichenebene beschränken und die Ordinaten mit $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ bezeichnen. Was die Konstruktion der Wellenflächen betrifft, so hat man dabei in folgender Art vorzugehen, wobei in der Figur behufs Raumersparnis nur die obere Hälfte gezeichnet wurde. Es

werde z. B. der Punkt P als Ausgangspunkt gewählt und angenommen, daß t Zeiteinheiten verfließen, bis die schwingende Quelle von P nach dem Nullpunkt vorgerückt ist. Um P als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis, sodaß

$$PM:PO = \mathfrak{B}:c$$

ist; c/\mathfrak{B} wurde in der Zeichnung gleich $1/3$ gewählt. Den Zwischenraum PO teile man in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (hier in acht Teile), welche durch $P_1, \dots, P_i, \dots, P_{n-1}, P_n, \dots$ gekennzeichnet sind. Von diesen Punkten als Mittelpunkten aus errichte man Kreise, deren Halbmesser zu den Abszissen in dem Verhältnisse

$$\begin{aligned} P_1 M_1 : P_1 O &= \dots P_i M_i : P_i O = \dots P_{n-1} M : P_{n-1} O \dots \\ &= P_n M_n : P_n O \dots = \mathfrak{B}:c \end{aligned}$$

stehen. In entsprechender Weise läßt sich die Figur durch die Einführung weiterer Punkte hinter P beliebig weit ergänzen. Aus dieser Konstruktion ersieht man, daß jeder Punkt M auf einem erzeugenden Kreise liegt, dessen Mittelpunkt aus der sofort zu besprechenden Konstruktion der Strahlenkurven leicht bestimmt werden kann. Was diese Strahlenkurven betrifft, so lassen sie sich ohne Schwierigkeit aus diesem Systeme der Wellenflächen durch Betrachtungen gewinnen, welche jenen bei einer ruhenden Quelle ähnlich sind. Man hat nämlich zu diesem Systeme das System der orthogonalen Trajektorien zu zeichnen; die durch einen Punkt M gehende Trajektorie stellt dann den scheinbaren Strahl dar, welcher von Q zu M geht; hierbei ist die Größe t als variabler Parameter anzusehen. Um z. B. in der vorliegenden Figur die Strahlenkurven zu erhalten, werde M mit P verbunden; die Verbindungsgerade MP schneidet den nächsten, aus P_1 gezeichneten Kreis in einem Punkte M_1 , welcher wieder mit P_1 durch eine Gerade verbunden werde; diese Konstruktion führe man bis zum letzten Kreise in unmittelbarer Nähe des Nullpunktes durch. Nimmt man die Anzahl der Teile als unendlich groß an, so erhält man eine stetige Folge von Punkten, deren Verbindungslinie die gesuchte Kurve ist. In der Figur wurde die Kurve in Form einer gebrochenen Geraden gezeichnet, um die Verhältnisse möglichst sinnfällig zu machen; der Gang im letzten Kreise ergibt sich aus dieser Konstruk-

tion nicht, sondern man müßte eigentlich die Zahl der Kreise gegen den Nullpunkt hin unbegrenzt wachsen lassen; dies wurde dadurch angedeutet, daß die Strecke innerhalb des letzten Kreises gebrochen und gegen den Nullpunkt hin geführt wurde. Aus dieser Konstruktion folgt sofort, daß man zu jedem Punkte M den erzeugenden Kreis erhält, indem man in dem Punkte M die Tangente an die durch ihn gelegte Strahlenkurve legt und ihren Schnittpunkt mit der Abszissenachse bestimmt.

Es werde nunmehr zur mathematischen Behandlung der Aufgabe übergegangen.

Die Gleichung eines erzeugenden Kreises lautet:

$$(4) \quad \varrho^2 + (x - ct)^2 = \mathfrak{B}^2 t^2,$$

woraus man die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien in der Gestalt

$$(5) \quad \frac{d\varrho}{dx} = \frac{\varrho}{x - ct}$$

erhält. Die Elimination des Parameters t liefert, wenn man die Größe c/\mathfrak{B} mit k bezeichnet,

$$(6) \quad ct = -\frac{1}{1-k^2} (k^2 x \pm k \sqrt{(1-k^2)\varrho^2 + x^2}),$$

und demnach

$$(7) \quad x - ct = \frac{x + k \sqrt{(1-k^2)\varrho^2 + x^2}}{1-k^2},$$

da wegen des wesentlich negativen Wertes von t hier bloß die positive Wurzel brauchbar ist. Man erhält so

$$(5) \quad \frac{d\varrho}{dx} = \frac{(1-k^2)\varrho}{x + k \sqrt{(1-k^2)\varrho^2 + x^2}}.$$

Man führe die neue Unbekannte $u = x/\varrho$ ein, sodaß man aus (5) die Gleichung für die Strahlenkurven in der Gestalt

$$(5') \quad x \frac{du}{dx} = ku \frac{ku + \sqrt{(1-k^2) + u^2}}{u + k \sqrt{(1-k^2) + u^2}}$$

bekommt. Diese Gleichung liefert nach einigen einfachen Rechnungen den Ausdruck

$$(8) \quad x = \frac{Cu}{ku + \sqrt{(1-k^2) + u^2}} [u + \sqrt{(1-k^2) + u^2}]^{\frac{1}{2k}}$$

als Gleichung der gesuchten Strahlenkurven. Die Konstante C ist etwa dadurch bestimmt, daß man einer bestimmten Kurve

die Bedingung auferlegt, durch einen gegebenen Punkt mit den Koordinaten x, ϱ zu gehen.

Man kann diese Strahlenkurven als scheinbaren Weg der von der Quelle gegen den Punkt M ausgesendeten Strahlen auffassen, wenn man berücksichtigt, daß sich ihre Form in jedem Zeiteilchen ändert und daß die scheinbare Geschwindigkeit auf ihr eine Funktion der Zeit und der Koordinaten ist. Gemäß den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich nämlich, daß die wahre Fortpflanzung der Bewegung von jeder einzelnen Stelle der Quelle zu M längs der betreffenden Verbindungsgeraden mit der konstanten Geschwindigkeit \mathfrak{B} stattfindet. Die Zeit, welche die Bewegung braucht, um z. B. von P nach M zu gelangen, ist demnach PM/\mathfrak{B} ; die scheinbare Geschwindigkeit muß daher so beschaffen sein, daß

$$\int_0^M \frac{dS}{\mathfrak{B}'} = \frac{PM}{\mathfrak{B}}$$

ist, worin dS das Bogenteilchen der Kurve OM , \mathfrak{B}' die scheinbare Geschwindigkeit in den einzelnen Kurvenpunkten darstellt. Hierbei muß wegen der stetigen Formveränderung der Strahlenkurven mit der Zeit die Größe PM nach Art der später zu entwickelnden Gleichung (10') als Funktion der Koordinaten x, ϱ so dargestellt werden, daß hierin die Zeit nicht mehr explizit vorkommt. Da jedoch die scheinbare Geschwindigkeit auf den Strahlenkurven nicht weiter verwendet werden wird, soll auf diese Rechnungen nicht weiter eingegangen werden.

Der Begriff Strahl ist hier zunächst rein geometrisch festgelegt und wurde auf dem Satze aufgebaut, daß bei gleichartigen Mitteln die Wellenflächen auf den Strahlen senkrecht stehen. Dieser Begriff hat jedoch eine auch reale Bedeutung; ein in M befindliches Auge versetzt nämlich den Ort der Quelle Q in jene Richtung, welche durch die Tangente an die Strahlenkurve im Punkte M dargestellt wird. Der scheinbare Ort der Quelle liegt daher zur Zeit $t = 0$ für alle Punkte des Kreises $(x - ct)^2 + \varrho^2 = \mathfrak{B}^2 t^2$ (z. B. für L, M, N) in dessen Mittelpunkt P , also an einer um die Strecke ct weiter nach

rückwärts gelegenen Stellung, eine Erscheinung, welche als Aberration bekannt ist.

Es soll jetzt zunächst die Form der Phasenfunktion für die Bewegung in M untersucht werden.

Wenn man sich die Punkte $P, P_1 \dots P_i \dots P_{n-1}, P_n \dots$ so gewählt denkt, daß die Phasen daselbst ganze Vielfache von 2π sind, so wird in diesen Punkten die Quelle jeweilig eine neue Schwingung beginnen. Entsprechend dem Begriffe der Wellenfläche werden diese Phasen nach den Zeiten

$$\frac{PM}{g}, \frac{P_1 M}{g} + \tau_0, \dots, \frac{P_i M}{g} + i\tau_0 \dots \frac{P_{n-1} M}{g} + (n-1)\tau_0, \\ \frac{P_n M}{g} + n\tau_0 \dots$$

bis zum Punkte M fortgeschritten sein, d. h. für diese Zeiten wird das Teilchen in M immer gerade eine neue Schwingung beginnen und für einen Augenblick in Ruhe sein. Wenn es nun erlaubt wäre, diese Betrachtung nicht bloß für die Punkte $P \dots P_n \dots$, welche den jeweiligen Schwingungsanfängen der Quelle Q entsprechen, sondern auf jeden Punkt der X -Achse, somit auf alle Phasen von Q , anzuwenden und wenn man ferner annehmen darf, daß sich die Phasenfunktion im Punkte M durch eine harmonische Funktion darstellen läßt, so wäre sie nach Unterdrückung eines willkürlichen Phasengliedes im Argumente durch

$$(9) \quad \sin \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{PM}{g} \right)$$

gegeben, worin ganz allgemein

$$(10) \quad PM = \sqrt{(x - ct)^2 + \varrho^2}$$

ist. Hierbei bedeutet t die Zeit, welche verflossen ist, bis die Quelle von P nach dem Nullpunkt O des Koordinatensystems fortgeschritten ist.

Es ist jedoch zu erwägen, daß die gezeichnete Figur dem Falle entspricht, daß die Bewegung von P gerade nach M gelangt ist, während sich gleichzeitig die Quelle von P nach O bewegt hat; ferner wurde das Koordinatensystem so gewählt, daß sein Nullpunkt mit dem jeweiligen Orte der Quelle zusammenfällt. Das Bild der Wellenflächen und der Strahlenkurven ändert sich also in jedem Augenblicke, da die einzelnen

Abszissen wegen der Änderung des Nullpunktes Funktionen der Zeit sind. Will man nun etwa die Verhältnisse zu jener Zeit graphisch darstellen, während welcher die Bewegung des Punktes P_i nach M gelangt ist, so ist zu berücksichtigen, daß sich während derselben die Quelle um die Strecke

$$O O' = \left(\frac{P_i M}{\mathfrak{g}} - \frac{P_i M_i}{\mathfrak{g}} \right) c = (P_i M - P_i M_i) k$$

nach O' weiter vorwärts bewegt hat und daß der Halbmesser jedes Kreises hierbei um

$$\left(\frac{P_i M}{\mathfrak{g}} - \frac{P_i M_i}{\mathfrak{g}} \right) \mathfrak{g} = P_i M - P_i M_i$$

größer geworden ist. Hierbei bedeutet $P_i M_i$ den (auf der Figur übrigens nicht weiter gezeichneten) Schnittpunkt von $P_i M$ und dem aus P_i mit dem Halbmesser $P_i M_i$ errichteten Kreise. Geht man auf die anfangs erwähnte Konstruktion der Wellenflächen und Strahlenkurven zurück, ergibt sich leicht folgende Regel, um die Zeichnung für jede beliebige spätere Zeit t zu finden:

Man verschiebe die Mittelpunkte der einzelnen Kreise P einschließlich des Punktes O um die Strecke ct nach rückwärts und vergrößere jeden Halbmesser der zugehörigen erzeugenden Kreise um $\mathfrak{g}t$; desgleichen verschiebe man jeden Punkt M so in einer Parallelen zur X -Achse nach rückwärts, daß ρ ungeändert bleibt, dagegen jede Abszisse in negativer Richtung um ct vergrößert wird. Die zwischen dem verschobenen Nullpunkte O und dem neuen Nullpunkt O' liegende Strecke $O O'$ ist schließlich durch neue Kreise in der früher erwähnten Art zu ergänzen.

Wendet man diese Regel z. B. auf die in Frage stehende, vom Punkte P_i ausgehende Bewegung an, so hat man den Punkt P_i und ebenso M parallel zur X -Achse um die Strecke

$$O O' = (P_i M - P_i \bar{M}) k$$

nach rückwärts zu verschieben, wodurch man die neuen Punkte P'_i und M' erhält; wie sich sofort ergibt, ist

$$P'_i M' = P_i M.$$

Der Ausdruck (10) hat gemäß diesen Darlegungen die Unbequemlichkeit, daß darin nicht nur t , sondern auch x mit der Zeit veränderlich ist. Die Gleichung (4) liefert nun für jede gegebene Zeit, für welche eine bestimmte Figur gilt, eine

Beziehung zwischen den Koordinaten x, ϱ des Punktes M und dieser Zeit t , da nach früheren Bemerkungen jeder Punkt M auf einem erzeugenden Kreise M liegt, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $x - ct, 0$ besitzt. Man kann daher die Größe t gänzlich aus (10) eliminieren und so den Halbmesser PM des erzeugenden Kreises in x und ϱ allein ausdrücken. Hierdurch ergibt sich ein Ausdruck für PM , in welchem die Zeit nicht mehr explizit vorkommt, sondern implizit insofern enthalten ist, als sich jedes x mit t in dem mit der Quelle fest verbundenen Koordinatensystem stetig ändert.

Setzt man in Gleichung (10) für t den in (6) gefundenen Wert ein, so bekommt man

$$(10') \quad PM = \frac{kx + \sqrt{(1-k^2)\varrho^2 + x^2}}{1-k^2},$$

sodaß die Phasenfunktion demnach die Form

$$(9) \quad \sin \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{kx + \sqrt{(1-k^2)\varrho^2 + x^2}}{(1-k^2)\mathfrak{B}} \right)$$

annimmt. Für die weiteren Untersuchungen soll das Koordinatensystem geändert werden, indem ein zweites verwendet werden wird, welches mit dem Punkte M fest verbunden ist. Legt man das in der beigegebenen Figur eingeführte System als festes zu Grunde, indem man die Koordinaten zu einer späteren Zeit auf dasselbe bezieht, bezeichnet man ferner mit x_0, ϱ_0 die auf dieses System bezogenen Koordinaten des Punktes M (also zur Zeit $t=0$), so erhält man für eine spätere Zeit t folgende Beziehungen zwischen den Koordinaten des festen und des beweglichen Systems:

$$(11) \quad \begin{cases} x = x_0 - ct, \\ \varrho = \varrho_0. \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar durch Vergleichung der gezeichneten und der aus ihr für die Zeit t hervorgehenden Figur. Es ist hierbei aber zu bemerken, daß die Größe $x_0 - ct$ wesentlich positiv bez. negativ ist, je nachdem sich die Quelle dem Punkte M nähert oder sich von ihm entfernt, d. h., je nachdem sein Abszissenpunkt vor oder hinter der Quelle liegt. Führt man diese Werte ein, so erhält man schließlich als vermutliches periodisches Glied der Funktion

$$(9'') \quad \sin \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{k(x_0 - ct) + \sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}}{(1-k^2)\mathfrak{B}} \right).$$

Hierin ist t von $t = -\infty$ bis $t = \infty$ unbeschränkt veränderlich. Es ist klar, daß man statt der Funktion \sin auch die Funktion \cos hätte wählen können.

Es handelt sich weiter darnm, die wahrscheinliche Form der Funktion für die Amplitude zu bestimmen. Über diese liefert folgende Überlegung einen Aufschluß. Es werde vorausgesetzt, daß man die Lösung der Differentialgleichung (3) in der Gestalt der beiden partikulären Integrale

$$R \sin \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{S}{\tau_0} \right), \quad R \cos \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{S}{\tau_0} \right)$$

erhalten habe, worin τ_0 eine sonst beliebig zu wählende Konstante sei und R sowie S gewisse Funktionen von x_0 , y_0 , z_0 , t bedenten. Man kann sich nun die Frage stellen, welche physikalische Bedeutung der Wahl $\tau_0 = \infty$ entspricht. Es heißt dies offenbar, daß in diesem Falle die Schwingungen unendlich langsam vor sich gehen, bez. daß die Quelle keine Schwingungen ansführt, sondern bloß Zug- oder Druckkräfte auf das Mittel ausübt. Die partikulären Integrale nehmen dann die Form O , R an, d. h., wenn die Quelle bloß Zug- oder Druckkräfte ausübt, ohne Schwingungen auszusenden, stellt die Amplitude R für sich allein die Lösung der Gleichung (3) dar. Nun ist die Lösung für diesen Fall durch die Untersuchungen von Heaviside¹⁾, Lorentz²⁾, Morton³⁾ und anderen genau bekannt und spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung der elektrischen und magnetischen Kräfte, welche ein mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig fortschreitendes geladenes Teilchen auf seine Umgebung ausübt. Die Amplitude erscheint dann nämlich in der Gestalt

$$(12) \quad R = \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2) \varrho^2 + (x - ct)^2}},$$

worin R der Gleichung

$$(13) \quad \Delta R = \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 R}{dt^2} = k^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$$

genügt.

1) O. Heaviside, Phil. Mag. 27. p. 324—339. 1889.

2) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, p. 35—39. Leiden 1895.

3) W. B. Morton, Phil. Mag. 41. p. 488—494. 1896.

Aus diesen Betrachtungen kann man schließen, daß die gesuchte Funktion V , welche zugleich den Bedingungen des Dopplerschen Prinzips entspricht, die Gestalt

$$(14) \quad \left\{ F = \frac{1}{V(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2} \frac{\sin \frac{2\pi}{\tau_0}}{\cos \frac{2\pi}{\tau_0}} \right. \\ \left. \left(t - \frac{k(x_0 - ct) + \sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}}{(1-k^2)\mathfrak{B}} \right) \right\}$$

besitzen wird.¹⁾

Es sei jedoch nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß diese Entwicklungen nur dazu dienen, um die wahrscheinliche Form der Funktion V zu bestimmen, ohne daß sich natürlich aus ihnen die tatsächliche Geltung der Gleichung (14) beweisen läßt. Dies wird erst durch den Nachweis erzielt, daß dieser Ausdruck wirklich die Differentialgleichung (3) erfüllt, was im folgenden geschehen soll.

Es werde angenommen, daß V die Gestalt

$$V = R(\varrho_0, x_0 - ct) \frac{\sin \frac{2\pi}{\tau_0}}{\cos \frac{2\pi}{\tau_0}} \left(t - \frac{S(\varrho_0, x_0 - ct)}{\mathfrak{B}} \right)$$

besitzt, wobei

$$\varrho_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$$

ist; x_0, y_0, z_0 seien die Koordinaten eines Punktes M in einem mit ihm fest verbundenen System, sodaß also die nach (2) gebildeten Abgeleiteten bei festgehaltenem x_0, y_0, z_0 die Schwingungskomponenten im Punkte M angeben sollen. Es ist nun vor allem zu beachten, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x_0}$$

ist; unter Berücksichtigung dieser Beziehung liefert die Gleichung (3), wenn der Kürze wegen

$$\frac{2\pi}{\tau_0 \mathfrak{B}} = \mu, \quad \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{S(\varrho_0, x_0 - ct)}{\mathfrak{B}} \right) = \Omega$$

gesetzt wird,

1) Die leicht zu deutende GröÙe

$$\frac{\mathfrak{B}(1-k^2)\sqrt{\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}}{k(x_0 - ct) + \sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}}$$

tritt bei Doppler in einer anderen Form als scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung auf [l. c. p. 298, Gleichung (2)].

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \Delta R - \mu^2 R \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_0} \right)^2 \right] \right\} \sin \Omega \\ & - \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial R}{\partial x_0} \frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{\partial R}{\partial y_0} \frac{\partial S}{\partial y_0} + \frac{\partial R}{\partial z_0} \frac{\partial S}{\partial z_0} \right) + R \Delta S \right\} \cos \Omega \\ & = \left\{ k^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2} - \mu^2 R \left(1 + k \frac{\partial S}{\partial x_0} \right)^2 \right\} \sin \Omega \\ & - \mu \left\{ 2 \frac{\partial R}{\partial x_0} \left(1 + k \frac{\partial S}{\partial x_0} \right) k + R \frac{\partial^2 S}{\partial x_0^2} k^2 \right\} \cos \Omega. \end{aligned} \right.$$

Man kann dieser Gleichung genügen, wenn man festsetzt, daß die Koeffizienten von $\sin \Omega$ und $\cos \Omega$ für sich verschwinden sollen; man erhält so die beiden folgenden Gleichungen:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \text{a) } & \Delta R - k^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2} - \mu^2 R \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_0} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \left(1 + k \frac{\partial S}{\partial x_0} \right)^2 \right] = 0, \\ \text{b) } & 2 \left[\frac{\partial R}{\partial x_0} \frac{\partial S}{\partial x_0} + \frac{\partial R}{\partial y_0} \frac{\partial S}{\partial y_0} + \frac{\partial R}{\partial z_0} \frac{\partial S}{\partial z_0} \right] \\ & + R \Delta S - 2 \frac{\partial R}{\partial x_0} \left(1 + k \frac{\partial S}{\partial x_0} \right) k - R \frac{\partial^2 S}{\partial x_0^2} k^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Betrachtet man die Gleichung (16a), so sieht man, daß sowohl das Glied ohne μ^2 wie auch jenes mit μ^2 für sich verschwinden muß, da sonst R und S von μ abhängig wären, was nach den vorhergegangenen Betrachtungen nicht der Fall ist. Nach (13) wird das Glied ohne μ^2 durch

$$R = \frac{1}{V(1 - k^2) \varrho_0^2 + (x_0 - c t)^2}$$

identisch Null; berücksichtigt man ferner die Beziehungen

$$\frac{\partial \cdot}{\partial y_0} = \frac{\partial \cdot}{\partial \varrho} \frac{y_0}{\varrho}, \quad \frac{\partial \cdot}{\partial z_0} = \frac{\partial \cdot}{\partial \varrho} \frac{z_0}{\varrho},$$

so überzeugt man sich leicht durch Ausrechnung, daß auch der Faktor von μ^2 für sich identisch verschwindet, wenn man

$$R = \frac{1}{V(1 - k^2) \varrho_0^2 + (x_0 - c t)^2},$$

$$S = \frac{k(x_0 - c t) + V(1 - k^2) \varrho_0^2 + (x_0 - c t)^2}{1 - k^2}$$

setzt; da die Rechnungen in keiner Weise eine besondere Besprechung verlangen, sollen sie nicht weiter durchgeführt werden.

Man kann das Ergebnis der Einsetzung von R und S in (16) dahin aussprechen, daß V die Gleichung (16a) erfüllt. Desgleichen überzeugt man sich durch Einführung der Funktionen R und S , bez. von V in die Gleichung (16b) ohne jede rechnerische Schwierigkeit, daß auch ihr durch die gewählte Form von V entsprochen wird. Da diese außerdem unmittelbar durch Verfolgung des Vorganges, welcher dem Dopplerschen Prinzipie zu Grunde liegt, entwickelt wurde, so muß der Ausdruck (14) als das diesem Prinzipie entsprechende Integral der Gleichung (3) aufgefaßt werden.

Die Lösung (14) soll zum Schlusse noch bezüglich ihrer wichtigsten Aussagen kurz erörtert werden.

Es sollen zuerst die Schwingungsvorgänge in einem Punkte der X -Achse besprochen werden, für welchen also $\varrho_0 = 0$ ist. Beachtet man gemäß der Bemerkung bei Gleichung (11), daß für Punkte hinter der schwingenden Quelle $x_0 - ct$ wesentlich negativ, für Punkte vor der Quelle aber wesentlich positiv ist, so erhält man im ersten Falle den periodischen Ausdruck in der Gestalt

$$(17a) \quad \frac{\sin \frac{2\pi}{\cos(1+k)\tau_0} \left(t + \frac{x_0}{\mathfrak{B}}\right)}{\cos(1+k)\tau_0},$$

während er im zweiten Falle die Form

$$(17b) \quad \frac{\sin \frac{2\pi}{\cos(1-k)\tau_0} \left(t - \frac{x_0}{\mathfrak{B}}\right)}{\cos(1-k)\tau_0}$$

annimmt. Diese Gleichungen drücken zunächst die von vornherein eingeführte Tatsache aus, daß die Fortpflanzung der Erregung sowohl in positiver wie in negativer Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit \mathfrak{B} erfolgt.

Weiter kann man sich fragen, wo sich zu einer gegebenen Zeit t gleiche Schwingungszustände auf der X -Achse vorfinden. Dann muß offenbar

$$\frac{2\pi x_0}{(1+k)\tau_0 \mathfrak{B}} = 2\pi p \quad (p=1, 2, 3, \dots) \text{ für Punkte hinter der Quelle,}$$

$$\frac{2\pi x_0}{(1-k)\tau_0 \mathfrak{B}} = 2\pi q \quad (q=1, 2, 3, \dots) \text{ für Punkte vor der Quelle}$$

sein, wobei p und q ganze Zahlen darstellen. Die Entfernung zweier solcher Punkte x_0 und x'_0 kann man dadurch berechnen, daß man in jeden dieser Ausdrücke die Werte $p+1$ und p ,

bez. $q + 1$ und q einsetzt und die Differenz eines solchen Wertepaares bildet; es ergibt sich

$$(18) \quad \begin{cases} x'_0 - x_0 = (1 + k)\lambda_0 & \text{für Punkte hinter der Quelle,} \\ x' - x_0 = (1 - k)\lambda_0 & \text{für Punkte vor der Quelle.} \end{cases}$$

Die Differenzen $x'_0 - x_0$ stellen nun offenbar die Wellenlängen längs der X -Achse dar, da sie die Strecken angeben, innerhalb welcher sich derselbe Schwingungszustand wiederholt. Man erkennt, daß sie gegenüber der Wellenlänge λ_0 bei ruhender Quelle eine Änderung erfahren haben und für Punkte hinter der Quelle größer, für solche vor der Quelle kleiner sind.

Ferner läßt sich aus (17) leicht die Frage nach der Änderung der Schwingungsdauer für die Punkte der X -Achse ableiten. Man hat zu diesem Zwecke x_0 festzuhalten und zwei aufeinander folgende Werte für t zu suchen, für welche in dem betrachteten Punkte gleiche Phase herrscht. Die Betrachtungen können in derselben Weise wie früher durchgeführt werden und ergeben für die geänderte Schwingungsdauer τ'_0

$$(19) \quad \begin{cases} \tau'_0 = (1 + k)\tau_0 & \text{für Punkte hinter der Quelle,} \\ \tau'_0 = (1 - k)\tau_0 & \text{für Punkte vor der Quelle.} \end{cases}$$

Statt zu sagen, daß sich ein Punkt hinter, bez. vor der schwingenden Quelle befindet, kann man auch sagen, daß sich die Quelle von dem Punkte entfernt, bez. sich ihm nähert.

Die Gleichungen (18) und (19) stellen das Dopplersche Prinzip in der bekannten, gewöhnlich angewendeten Form dar, wobei nämlich Punkte in Betracht gezogen werden, welche in der Bahn der Quelle selbst liegen.

Endlich mögen noch die Verhältnisse für einen beliebigen Punkt M des Mittels erörtert werden. Die periodische Funktion kann in diesem Falle in der Form

$$(20) \quad \frac{\sin}{\cos} \frac{2\pi}{(1 - k^2)\tau_0} \left(t - \frac{kx_0 + \sqrt{(1 - k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}}{c} \right)$$

geschrieben werden. Die veränderte Schwingungszahl τ'_0 wird gefunden, indem man bei festgehaltenem x_0 , ϱ_0 zwei aufeinander folgende Werte t , t' sucht, bei welchen sich das Argument der Sinusfunktion um 2π unterscheidet; die Differenz $t' - t$ liefert

die gesuchte Größe τ_0' . Die Gleichung (20) ergibt hierfür die Beziehung

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} t - t - \frac{1}{g} \left(\sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2} - \sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct')^2} \right) \\ = (1 - k^2)\tau_0. \end{aligned} \right.$$

Das Ergebnis ist einer einfachen Darstellung fähig, wenn die Entfernung des Punktes M von P , bez. O , so groß ist, daß die Quadrate und höheren Potenzen des Verhältnisses der während einer Schwingungsdauer τ_0 von der Quelle zurückgelegten Strecke $c\tau_0$ zu einer Entfernung gegenüber der ersten Potenz vernachlässigt werden können; in diesem Falle liefert die Taylorsche Reihenentwicklung

$$(22) \quad \tau_0' \left(1 + k \frac{x_0 - ct}{\sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}} \right) = (1 - k^2)\tau_0,$$

und daraus folgt

$$\tau_0' = (1 + k^2)\tau_0 \frac{k(x_0 - ct) + \sqrt{(1-k^2)\varrho_0^2 + (x_0 - ct)^2}}{x_0 - ct},$$

ein Ausdruck, welcher mit dem von Doppler gefundenen übereinstimmt.

Schließlich soll noch auf zwei Folgerungen aus den bisherigen Rechnungsergebnissen hingewiesen werden.

Denkt man sich die Quelle vom Unendlichen her kommend ins Unendliche hin sich fortbewegen und betrachtet man einen Punkt M , welcher im Endlichen liegt, so erkennt man leicht, daß die Schwingungsdauer daselbst während der Zeit $t = -\infty$ bis $t = \infty$ stetig von $(1+k)\tau_0$ auf $(1-k)\tau_0$ sinkt. Der Sinnes-eindruck entspricht daher nicht mehr jenem einer harmonischen Schwingung, sondern jenem eines Schwingungsspektrums, da die mathematische Form der periodischen Funktion eine Fouriersche Reihenentwicklung zwischen den Grenzen $t = -\infty$, $t = \infty$ zuläßt. Eine solche Quelle würde daher, um bei einer sehr schnellen Bewegung derselben ein drastisches Beispiel in die Sprache der Optik zu übersetzen, bei genügend hoher Schwingungszahl zunächst etwa eine violette Spektrallinie erzeugen, diese Linie würde sich im Verlaufe der Zeit allmählich zu einem Streifen verbreitern, welcher, je nach der Größe von k mehr oder minder verwaschen, stetig gegen das rote Ende hin vorrückt, um schließlich etwa in eine rote Spektrallinie

überzugehen. Es bietet keine Schwierigkeit, diese Verhältnisse auf jede andere Form der Schwingungswahrnehmung sinngemäß zu übertragen.

Gleichzeitig ersieht man, daß die Schwingungen des Punktes in M nicht mehr wie bei einer ruhenden Quelle in geraden Linien vor sich gehen, sondern daß das Teilchen in M eine im allgemeinen komplizierte Kurve beschreibt, wie sich dies aus den Ausdrücken (2) für die Amplituden der Bewegung leicht ergibt.

Die Gleichungen (7) und (10') lassen eine interessante Umformung des Ausdruckes (14) zu, welche die physikalische Bedeutung desselben näher beleuchtet. Wenn man nämlich die Differenz $PM - k(x - ct)$ bildet, so ist dieselbe gleich $\sqrt{(1-k^2)\varrho^2 + x^2}$, wie eine einfache Ausrechnung zeigt. Demnach läßt sich (14) auch in der Gestalt

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{1}{PM \left[1 - k \frac{x-ct}{PM} \right]} \frac{\sin 2\pi}{\cos \iota_0} \left(t - \frac{PM}{\mathfrak{B}} \right) \\ &= \frac{1}{r \left(1 - \frac{c}{\mathfrak{B}} \cos \theta \right)} \frac{\sin 2\pi}{\cos \iota_0} \left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \\ &= \frac{1}{r \left[1 - \frac{v(\widehat{rc})}{\mathfrak{B}} \right]} \frac{\sin 2\pi}{\cos \iota_0} \left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) \end{aligned} \right.$$

schreiben. Es werde die Zeit von jenem Augenblicke an gezählt, wo die Quelle im Punkte O angelangt ist; dann bedeutet r den Abstand des Punktes M von jenem früheren Orte der Quelle, den sie vor jener Zeit eingenommen hat, innerhalb welcher die Wellenbewegung von diesem Orte nach M und die Quelle gleichzeitig bis zu ihrer gegenwärtigen Lage fortgeschritten ist; θ stellt den Winkel zwischen der Fortschreitungsrichtung der Quelle und der Richtung von r dar, und $v(\widehat{rc})$ ist daher die Projektion der Geschwindigkeit c auf die Richtung von r . Man fasse nun die Schwingung als einen elektromagnetischen Vorgang auf und berücksichtige den Ausdruck

$$V = \frac{1}{r \cos \iota_0} \left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right),$$

wenn die Quelle in Ruhe ist. Die Amplitudenfunktion $1/r$ ist in diesem Falle das elektrostatische Potential eines elektrischen

Teilchens von der Masse 1, bezogen auf den Punkt M . Wie man sieht, gilt auch bei bewegter Quelle eine ähnliche Beziehung, nur tritt als Wirkungsfunktion des bewegten Teilchens der leicht zu deutende Ausdruck

$$V_{(r_0 = \infty)} = \frac{1}{r \left[1 - \frac{v(\widehat{r\hat{c}})}{c} \right]}$$

auf. Diese Form der Wirkungsfunktion hat zuerst Wiechert¹⁾ in weit größerer Allgemeinheit entwickelt und später Levi-Civita²⁾ weiter behandelt.

Wien, im Januar 1903.

1) E. Wiechert, Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, série II. 5. p. 549—573. 1900.

2) T. Levi-Civita, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse 4. I^{ère} fascicule, p. 1—44. 1902.

(Eingegangen 14. Januar 1903.)

5. *Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen mit elektrischen Wellen;*
von W. Schmidt.

(II. Abhandlung.)

Bei festen Körpern, die eine Dielektrizitätskonstante größer als die vom Wasser ($\epsilon = 81$) haben, konnte man mit der in diesen Annalen¹⁾ beschriebenen Methode nur indirekt und ziemlich umständlich die Dielektrizitätskonstante bestimmen. Bei Kristallen nun, die in zwei Richtungen eine Dielektrizitätskonstante kleiner als 81 haben, ist es unter Umständen möglich, die Dielektrizitätskonstante in der dritten Richtung auf ziemlich einfache Weise zu ermitteln.

Sind die Dielektrizitätskonstanten eines Kristalles gleich ϵ_a , ϵ_b , ϵ_c , so wird ein aus dem Kristall mechanisch hergestelltes feines Pulver sich wie ein homogener Körper verhalten. Das Pulver besteht nämlich aus sehr vielen sehr kleinen — praktisch unendlich vielen unendlich kleinen — Teilchen, die nach allen möglichen Richtungen orientiert sein werden. Da nun keine bestimmte Richtung bevorzugt ist, sondern der größten Wahrscheinlichkeit nach in jedem Punkte des Pulvers alle Richtungen gleichmäßig vertreten sind, so wird eine mittlere Dielektrizitätskonstante resultieren, die sich aus der Auswertung des folgenden über den Kugeloktanten zu nehmenden Integrals ergibt:

$$(1) \quad \epsilon_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \epsilon \cos \varphi \, d\varphi \, d\omega,$$

wo φ die Breite, ω die Länge in Kugelkoordinaten bedeutet und ϵ nach früherem (I, p. 935) gegeben ist durch:

$$(2) \quad \epsilon = \epsilon_a \cos^2 \alpha + \epsilon_b \cos^2 \beta + \epsilon_c \cos^2 \gamma.$$

1) W. Schmidt, Ann. d. Phys. 9. p. 919. 1902; fortan mit I zitiert.

Drückt man α , β , γ , die Winkel der Kristallhauptachsen mit einer beliebigen, im Pulver festliegenden Geraden, durch φ und ω aus:

$$\cos \alpha = \cos \varphi \cos \omega, \quad \cos \beta = \cos \varphi \sin \omega, \quad \cos \gamma = \sin \varphi,$$

und setzt man den Wert für ε in Gleichung (1) ein, so ergibt sich:

$$(3a) \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3}$$

bez. für einachsige Kristalle:

$$(3b) \quad \varepsilon_m = \frac{2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}}{3}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, daß, wenn ε_m und zwei bez. eine Größe der rechten Seite bekannt sind, die dritte bez. zweite leicht auszuwerten ist.

Um zunächst zu zeigen, daß sich Pulver kristallisierter Substanzen bei unseren Untersuchungen wirklich wie homogene Körper verhalten, wurden Abfälle früher untersuchter Schnitte mechanisch möglichst fein gepulvert und in genau derselben Weise wie die Kristallplatten untersucht, d. h. das Pulver mit den Eichflüssigkeiten in ein auf I, p. 922 abgebildetes Kölbchen gefüllt. Es zeigte sich nun, daß die Punkte der Kurve *B* (I, p. 920, Fig. 2) ebenso regelmäßig wie bei Kristallplatten gefunden wurden, wenn man nur darauf achtete, daß das Pulver jedesmal in genau derselben Weise in das Kölbchen gefüllt wurde. Am praktischsten erwies sich, wenn man erst in das Kölbchen die Eichflüssigkeit füllte und dann das Pulver in einem feinen Strahl hineinfallen ließ und ein regelmäßiges Sedimentieren durch Aufklopfen des Kölbchens auf die Tischplatte beförderte. Nach der Messung schüttete man das nasse Pulver auf ein Uhrgläschen, trocknete es auf diesem sorgfältig und legte dann einen weiteren Punkt der Kurve *B* fest. — Unvorteilhaft war es, erst das Pulver in das Kölbchen zu füllen und dann Flüssigkeit zuzugießen, weil sich so nur schwierig die kleinen Luftbläschen entfernen ließen. Ebenfalls genügte es nicht, nach einer Messung das nasse Pulver mehrere Male mit der neuen Flüssigkeit durchzuspülen; denn immer blieb dann noch so viel von der erst gebrauchten

Mischung zurück, daß der so festgelegte Punkt sich zu weit von der Kurve *B* der Fig. 2 entfernte.

Untersucht wurden auf diese Weise *Baryt I* und *Cölestin II* (I, p. 933, Tab. 3). Es ergab sich:

	ϵ_m gefunden	ϵ_m berechnet
Baryt I	9,4	9,2
Cölestin II	11,4	11,5

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist der Genauigkeit der Methode entsprechend kleiner als 3 Proz. (I, p. 921).

Nachdem so nachgewiesen war, daß die Dielektrizitätskonstante eines Kristallpulvers wirklich der Mittelwert aus den Dielektrizitätskonstanten in Richtung der Symmetrieachsen ist, wurde Pulver von *Pyromorphit* untersucht, der in der einen Richtung eine Dielektrizitätskonstante größer als 81 besitzt. Leider waren von den untersuchten Schnitten (I, p. 932, Tab. 2) keine Abfälle mehr vorhanden, wohl aber noch Material vom selben Fundort (Zschopau), das freilich nicht so rein wie das erst benutzte war. Es ergab sich:

$$\epsilon_m = 47,5,$$

also, wenn man nach früherem

$$\epsilon_{\perp} = 26$$

setzt, aus Gleichung (3b):

$$\epsilon_{\parallel} = 90,5.$$

Dieser Wert ist kleiner als der ursprünglich angegebene ca. 150. Letztere sollte jedoch, wie dort betont (I, p. 930), mehr den Charakter einer Größenordnung haben; außerdem war, wie bereits gesagt, das Material nicht völlig rein, und es ist wohl anzunehmen, daß für völlig reines Material die Konstante etwas größer ausfällt. — *Pyromorphit* von anderem Fundort (Ems), die Schnitte aus einem kleinen, aber sehr klaren Kristall von helllila Farbe herausgeschnitten, ergab die Konstante:

$$\epsilon_{\perp} = 24.$$

ϵ_{\parallel} fand sich ebenfalls größer wie 81, jedoch offenbar etwas kleiner als ϵ_{\parallel} beim untersuchten Kristall aus Zschopau. Der untersuchte Schnitt \perp zur Achse war leider zu klein, um eine genauere Bestimmung nach der I, p. 926 angegebenen Methode

vorzunehmen; auch war nicht genügend Material vorhanden, um das Pulver untersuchen zu können. Anderer Pyromorphit aus Ems, der in stengligen, traubenförmigen Aggregaten kristallisiert und offenbar mit Cerussit untermischt und überhaupt nicht sehr rein war, hatte als Pulver untersucht, die Konstante:

$$\epsilon_m = 38.$$

Die ziemlichlichen Verschiedenheiten in den Dielektrizitätskonstanten erklären sich auch durch die wechselnde chemische Zusammensetzung dieses Mineralies.

Die Methode, die Dielektrizitätskonstante eines Kristalles in *einer* Richtung aus den Dielektrizitätskonstanten in den beiden anderen Richtungen und aus der Dielektrizitätskonstante des Pulvers zu bestimmen, wird sich auch bei solchen Mineralien vorteilhaft anwenden lassen, von denen Schnitte in bestimmter Richtung schwer oder gar nicht herzustellen sind. So gibt es doch viele Mineralien, die nur in dünnen Tafeln oder Platten kristallisieren. Man kann dann von solchen unter Umständen direkt einen natürlichen Kristall untersuchen, ohne ihn vorher bearbeiten zu müssen, und dann aus der Dielektrizitätskonstante des Pulvers die zweite bez. dritte Konstante des Kristalles bestimmen. Und auch bei seltenen *regulären* Kristallen und bei chemischen Produkten wird sich zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante vorteilhaft Pulver anwenden lassen, da einesteils nicht viel davon nötig ist (bei den hier benutzten Kondensatoren etwa $\frac{3}{4}$ ccm; doch hindert ja nichts, noch kleinere Kondensatoren zu benutzen), andernteils ein Pulver viel leichter als eine Platte zu beschaffen ist. Freilich sind auf jeden Fall Platten vorzuziehen. Einesteils ist die Untersuchung von Pulvern bedeutend zeitraubender. Namentlich wenn man viele Platten zu untersuchen hat, kann man durch eine flüchtige Vorbestimmung (die ungefähren Werte der Dielektrizitätskonstante festlegen und dann gleich drei bis fünf Platten mit denselben Kölbchenfüllungen untersuchen. Andernteils ist die Kurve *B* zur Kurve *A* (vgl. I, p. 920, Fig. 2) bei genügend dicken Platten steiler geneigt als bei Pulvern. Der Schnittpunkt α läßt sich also im ersteren Fall sicherer und aus weniger Beobachtungen bestimmen (vgl. I, p. 921).

Dielektrizitätskonstanten von Elementen.

Unter den Hauptresultaten der Abhandlung I war angeführt, daß *Schwefel* allein von den untersuchten Kristallen die sogenannte Maxwellsche Regel $\epsilon = \nu^2$ befolgt. Es ist dies vielleicht eine etwas ungenaue Ausdrucksweise; besser hieße es, daß beim Schwefel allein der Brechungsindex für unendlich lange Wellen sich aus den Brechungsindizes im Bereich der sichtbaren Strahlen ohne die Annahme von Absorptionsstreifen im Ultrarot mit Hilfe der üblichen Dispersionsformeln berechnen läßt. Nun ist auffallend, daß Schwefel das einzige *Element* unter den untersuchten Kristallen ist. Es fragt sich deshalb, ob wohl auch die anderen Elemente so einfache Verhältnisse zeigen.

Vor allem werden uns hier die kristallisiert auftretenden Elemente interessieren. Es kommen außer *Bor*, von dem zur Untersuchung geeignete Präparate nicht vorlagen, und dem bereits besprochenen *Schwefel* (rhombisch) eigentlich nur *Kohlenstoff* als *Diamant*, *Phosphor* in seiner *gelben* Modifikation (beide regulär) und *Jod* (rhombisch) in Betracht. Auch das *glasige Selen* (amorph) könnte man eventuell mit hierher rechnen.

Von *Diamant* war ein dünner Splitter von ca. 4–5 mm Durchmesser vorhanden, der, wie später Gelbbleierz und Brookit, in einem Kondensatorkölbchen untersucht wurde ähnlich denen, wie sie Coolidge¹⁾ beschrieben hat.²⁾ Dieses Kölbchen hatte den Vorteil, daß sich die Platinplatten (*pp* in der Fig. 3 l. c.) möglichst dicht an die Kristallplatten herانبiegen ließen. Freilich mußte man bei jeder Bestimmung sich der zeitraubenden Festlegung einer neuen Eichkurve *A* (I, p. 920, Fig. 2) unterziehen.

Es wurde so die Dielektrizitätskonstante des Diamants zu 5,50 gefunden. Dieser Wert ist nicht so genau, wie die der früher bestimmten Kristallplatten, denn es war kaum möglich, das Splitterchen, das nur 35 mg wog, jedesmal in genau derselben Stellung zwischen die Kondensatorplatten zu bringen.

1) W. D. Coolidge, Wied. Ann. 69. p. 126, Fig. 3. 1899.

2) Der Diamantsplitter war gütigst zur Untersuchung von der Firma L. Houy-Hanau überlassen, Gelbbleierz und Brookit von Hrn. Prof. Dr. Brauns.

Da sehr viele Beobachtungen gemacht wurden, wird der Fehler kaum mehr als 5 Proz. betragen. Es ist dies bei der Kleinheit des Präparates eine relativ große Genauigkeit und zugleich ein Beweis für die Leistungsfähigkeit der hier benutzten Drudeschen Methode und für ihre Überlegenheit gegenüber anderen Methoden.

Martens¹⁾ hat mit Hilfe der Ketteler-Helmholtz-schen Dispersionsformel aus Beobachtungen im Gebiet der sichtbaren und ultravioletten Strahlen

$$\nu_{\infty}^2 = 5,66$$

also einen Wert berechnet, der mit dem hier gefundenen ϵ gut übereinstimmt.

Da anzunehmen ist, daß *gelber Phosphor* als Kristall und in gegossenem Zustande keine prinzipiellen Unterschiede zeigt, wurde das Kondensatorkölbchen unter Benzol²⁾ mit geschmolzenem Phosphor gefüllt. Nachdem dieser langsam erstarrt war, zeigte er die Dielektrizitätskonstante 3,60. Unter Benützung der Gladstone-Daleschen Werte³⁾ ergibt sich mit Hilfe der Ketteler-Helmholtz-schen Dispersionsformel:

$$\nu_{\infty}^2 = 4,22,$$

also ein Wert wesentlich größer als die gefundene Dielektrizitätskonstante. Da nur drei Brechungsindizes im sichtbaren Gebiet beobachtet und zur Berechnung benützt wurden, so ist sehr die Frage, ob sich nicht ein anderer Wert ergibt, wenn man die wohl noch nicht bestimmte Dispersion im ultravioletten Gebiete berücksichtigt. Entschieden ist interessant, daß ϵ kleiner als ν_{∞}^2 ist, ein Beweis, daß beim Phosphor sowohl, wie beim Diamant und Schwefel, keine Absorptionsbanden im Ultraroten zu erwarten sind.

Für *Selen*, von dem ein schönes Präparat untersucht werden konnte, ist der Unterschied zwischen $\epsilon = 6,60$ und

1) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 8. p. 464. 1902.

2) Diese Vorsicht mußte man anwenden, da bei Füllung unter Wasser das Kondensatorkölbchen leitend wurde. Wahrscheinlich hatte sich an der inneren Glaswand eine dünne Schicht Wasser mit phosphoriger Säure gebildet.

3) Vgl. F. F. Martens, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 4. p. 152. 1902.

$\nu_{\infty}^2 = 6,02$ (nach Wood¹⁾) bedeutend kleiner, als bei Benutzung des von Romich und Nowack gefundenen Wertes $\epsilon = 10,2$. Der immerhin außerhalb der Beobachtungsfehler liegende Unterschied erklärt sich wohl viel einfacher dadurch, daß das Selen nicht durchweg glasigen Charakter angenommen hatte, als durch Absorptionsbanden im Ultraroten, die Wood (l. c.) bis zu Wellenlängen $2,3 \mu$ nicht hat finden können.

Von Jod konnten dünne, tafelförmige Kristalle untersucht werden. Von diesen wurden mehrere zwischen die Kondensatorplatten geklemmt, dann die Eichflüssigkeit zugegossen und nun sofort eine Beobachtung gemacht. Bei genügender Schnelligkeit im Beobachten löste sich nämlich dann in den Aceton-Benzolmischungen so wenig Jod auf, daß der Wert der jeweiligen Eichflüssigkeit sich nicht merklich änderte. Es wurde so mit ziemlicher Sicherheit der Wert $\epsilon_s = 4,00$ festgestellt. Leider sind Brechungsindizes von Jod wegen seiner geringen Durchlässigkeit für die sichtbaren Strahlen bisher nicht bestimmt worden; doch scheint der Brechungsexponent für rote Strahlen größer als 2 zu sein, da nämlich eine konzentrierte Lösung von Jod in Amylalkohol den Wert 2,0 besitzt (Martens, l. c.). Das würde zu dem beobachteten Wert der Dielektrizitätskonstante gut passen.

Der Vollständigkeit halber wurde noch flüssiges *Brom* untersucht und $\epsilon = 3,10$ gefunden. Hier ist der Unterschied mit $\nu_{\infty}^2 = 2,53^2$) zu groß, um durch Ungenauigkeiten in den Messungen erklärt zu werden.

Dagegen scheint beim flüssigen *Chlor* (Temperatur 14°) das Maxwellsche Gesetz bestätigt zu sein. Coolidge³⁾ fand (ebenfalls mit Hilfe von elektrischen Wellen) $\epsilon = 1,88$, während Bleekrode⁴⁾ ν^2 (für Natriumlicht) $= 1,87$ bestimmt hatte.

Wie bekannt, stimmen bei den gasförmigen Elementen, Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff (wenigstens bei der Mischung der beiden letzteren, der atmosphärischen Luft),

1) R. W. Wood, Phil. Mag. (6) 3. p. 619. 1902.

2) Aus den Rivièreschen Werten berechnet. Vgl. F. F. Martens, l. c. p. 140.

3) W. D. Coolidge, l. c. p. 131.

4) L. Bleekrode, Proc. Roy. Soc. 37. p. 339. 1884; Beibl. 9. p. 419. 1885.

ebenfalls Dielektrizitätskonstante und Quadrat des Brechungsindex überein.¹⁾

In der folgenden Tab. 6²⁾ sind zur besseren Übersicht die Resultate vom Verfasser mit denen der anderen Beobachter zusammengestellt.

Tabelle 6.
Elemente.

Bezeichnung	Chem. Zeichen	ϵ	ν_{∞}^2
Schwefel	S	$\left\{ \begin{array}{l} 3,59 \\ 3,83 \\ 4,62 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 3,59 \\ 3,89 \\ 4,60 \end{array} \right.$
Diamant	C	5,50	5,66
Gelber Phosphor .	P	3,60	4,22
Glasiges Selen . .	Se	6,60	6,02
Jod	J	4,00	?
Brom	Br	3,10	2,53
Chlor	Cl	1,88	1,87 (Na-Licht)
Wasserstoff . . .	H	1,00026	1,00028
Luft	O + N	1,00059	1,00059

Diese Tabelle spricht dafür, daß in den Elementen die Moleküle einen besonders einfachen Bau haben. Denn auch da, wo das Maxwellsche Gesetz nicht erfüllt ist, sind die Unterschiede zwischen ϵ und ν_{∞}^2 relativ kleiner, als bei jedem anderen der hier untersuchten festen Körper.

Dielektrizitätskonstante und chemische Zusammensetzung.

Die ungewöhnlich hohe mittlere Dielektrizitätskonstante der beiden untersuchten *Bleimineralien*, Pyromorphit und Cerussit, ließ vermuten, daß das *Metall* gerade so die hohe Dielektrizitätskonstante bedingte, wie bei bleihaltigen Glasflüssen den hohen Brechungsindex. Es wurden deshalb noch verschiedene Bleiverbindungen untersucht, die in folgender Tab. 7 zusammengefaßt sind.

1) Vgl. A. Winkelmann, Handbuch der Physik III, 1. p. 90. 1893

2) Im Anschluß an die Tabellen in I weiter numeriert.

Tabelle 7.

Bleihaltige Mineralien bez. Verbindungen.¹⁾

Bezeichnung	Chemische Formel	Farbe etc.	Dielektrizitätskonstante
Cerussit (Grube Friedrichsegen)	PbCO_3	Vgl. I, p. 953, Tab. 3	$\epsilon_m = 22,6$
Pyromorphit (Zschopau)	$\text{Pb}_3\text{Cl}(\text{PO}_4)_3$	Vgl. II, p. 116.	$\epsilon_m = 47,5$
Gelbbleierz (Wulfenit), (Red Clond Mine, Yuma County, Arizona)	PbMoO_4	hellrot, durchsichtig; natürlicher tafelförmiger Kristall	$\epsilon_{ } = 26,8$
Bleimolybdänat	PbMoO_4	{Chemisch hergestelltes weißes Pulver}	$\epsilon = 23,8$
Mennige	Pb_3O_4	{Chemisch hergestelltes rotes Pulver}	$\epsilon = 17,8$
Bleisulfat	PbSO_4	{Chemisch hergestelltes weißes Pulver}	$\epsilon = 28$
Bleichlorid	PbCl_2	Weißes Pulver M	$\epsilon = 42$
Bleinitrat	$\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$	Durchsichtige Platte M	$\epsilon = 16$

Bei Gläsern bedingen außer *Blei-* auch *Thalliumzusätze* einen hohen Brechungsindex. Wir sehen nun aus Tab. 8, daß auch *Thalliumsalze* — geeignete Thalliummineralien existieren leider nicht — eine verhältnismäßig hohe Dielektrizitätskonstante besitzen.

Tabelle 8.
Thalliumsalze.

Bezeichnung	Chemische Formel	Farbe etc.	Dielektrizitätskonstante
Thallokarbonat	Tl_2CO_3	Weißes Pulver M	17
Thallosulfat	Tl_2SO_4	" " M	ca. 28
Thallochlorid	TlCl	" " M	ca. 30
Thallonitrat	TlNO_3	" " M	16,5

1) Bei der Herstellung einiger der hier und später untersuchten Verbindungen waren mir in liebenswürdigster Weise Hr. Dr. Münch und Hr. cand. r. n. Stein behülflich. Ersterem Herrn verdanke ich auch die Analyse der beiden Titanoxyde (vgl. Tab. 9). — Die mit M bezeichneten Produkte sind von Merck-Darmstadt bezogen.

2) Diese Salze konnten wegen ihrer Löslichkeit nicht in wasserhaltigen Eichflüssigkeiten untersucht werden. Doch ließ sich aus der

Ein Vergleich mit den Bleiverbindungen zeigt, daß die Dielektrizitätskonstante in beiden Gruppen vom Nitrat über das Karbonat und Sulfat zum Chlorid zunimmt. Eine bestimmte Gesetzmäßigkeit ist freilich nicht zu erkennen.

Die höchste bisher bekannte Dielektrizitätskonstante hatte *Rutil* (*Titanoxyd*) gezeigt. Es wurden deshalb noch andere Körper von gleicher Zusammensetzung untersucht. Die Resultate sind in Tab. 9 vereinigt.

Tabelle 9.
Titanoxyd TiO_2 .

Bezeichnung	Farbe etc.	Dielektrizitätskonstante
Rutil	Vgl. I, p. 932, Tab. 2	$\epsilon_{\infty} = 117$
Rutil (Snarum, Norwegen)	Hellrotes Pulver ¹⁾	$\epsilon = 110$
Brookit (Tavetsch)	Hellbraun, durchsichtig; natürl. tafelförmiger Kristall	$\epsilon_a = 78$
Brookit (Arkansit, Arkansas)	Graues Pulver; stark ver- unreinigt	$\epsilon = 12$
Titanoxyd I ²⁾	Chem. Anal.: 84,62 % TiO_2 ; 14,90 % H_2O	$\epsilon = 31$
Titanoxyd II (elektrochemisch dargestellt)	Chem. Anal.: 96,40 % TiO_2 ; 8,58 % H_2O ; 0,15 % SiO_2	$\epsilon = 7,7$

Kurve *B* (vgl. I, p. 920, Fig. 2) im Gebiet der Aceton-Benzolmischungen (I, p. 926) im Vergleich mit Kurven, wie man sie für Pulver mit bekannter Dielektrizitätskonstante (z. B. Bleisulfat) erhält, der Wert der Dielektrizitätskonstante ziemlich genau bestimmen.

1) Die hohe Dielektrizitätskonstante des Rutilpulvers wurde wieder nicht direkt bestimmt, vielmehr mußte eine Hilfsbestimmung gemacht werden, ähnlich wie bei der einen Rutilplatte (I, p. 926 ff.). Die Messung war hier jedoch bedeutend vereinfacht, da man zur Festlegung einer geeigneten Kurve der Fig. 7 (vgl. I, p. 928) irgend ein anderes auf gleiche Weise hergestelltes Pulver (in diesem Falle Cölestinpulver) benutzen konnte.

2) Ursprung unbekannt. Von Merck bezogenes Titanoxyd zeigte dieselbe Konstante.

Die Übereinstimmung bei den verschiedenen Rutilen ist gut; auch paßt der beim ersten Brookit gefundene Wert — vom Arkansitpulver wollen wir wegen seiner starken Verunreinigung hier ganz absehen — der Größenordnung nach zu den beiden vorhergehenden. Dagegen sind die Dielektrizitätskonstanten der chemisch hergestellten Titanoxyde unter sich sehr verschieden und außerdem viel kleiner als die Dielektrizitätskonstanten des kristallisierten Titanoxyds. Ob das an dem physikalischen oder chemischen Unterschied liegt, muß vorläufig dahingestellt bleiben. Natürlicher Brookit und Rutil enthalten immer Eisen; auch ist bekannt, daß Rutil oft mit Eisenglanz nach einem ganz bestimmten Gesetze verwachsen vorkommt. Man nahm bisher an, daß man es mit einer festen Lösung zu tun habe. Sollte sich nun zeigen, daß künstlicher, eisenfreier Rutil eine Dielektrizitätskonstante von der Größe der Dielektrizitätskonstante des amorphen Titanoxyds hat, so würden die hier gefundenen Resultate dafür sprechen, daß leitende Teilchen gesetzmäßig in nicht leitende (Titanoxyd)-Moleküle eingebettet sind.

Zum Schluß sind noch einige Substanzen von gleicher chemischer Zusammensetzung in der Tab. 10 untereinandergestellt.

Tabelle 10.
Substanzen von gleicher chemischer Zusammensetzung.

Bezeichnung	Chem. Formel	Besondere Bemerkungen	D.-K.
1. Baryt	} BaSO_4 }	Vgl. II, p. 116	$\epsilon_m = 9,3$
Baryumsulfat		Chem. hergest. weißes Pulver	$\epsilon = 10,2$
2. Cölestin	} SrSO_4 }	Vgl. II, p. 116	$\epsilon_m = 11,4$
Strontiumsulfat		Chem. hergest. weißes Pulver	$\epsilon = 11,3$
3. Marmor (Carrara)	} CaCO_3 }	Weißer durchscheinende Platte	$\epsilon = 8,3^b$
Kalkspat		Vgl. I, p. 932, Tab. 2	$\epsilon_m = 8,3^a$
Aragonit		Vgl. I, p. 933, Tab. 3	$\epsilon_m = 8,0^a$

Namentlich in der zweiten und dritten Gruppe ist die geringe Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstante bei den physikalisch verschiedenen Substanzen auffallend. Es scheint also, als ob die Dielektrizitätskonstante oft mehr durch die chemische Zusammensetzung, als durch die sonstigen physi-

kalischen Eigenschaften beeinflußt wird. Natürlich werden sich erst Schlüsse von größerer Tragweite und Sicherheit ziehen lassen, wenn mehr Beobachtungsmaterial vorliegt.

Während aus den bisherigen Untersuchungen nicht mit Sicherheit hervorgeht, ob kleine Verunreinigungen die Größe der Dielektrizitätskonstanten wirklich wesentlich beeinflussen, so kann man dagegen wohl ziemlich bestimmt behaupten, daß sie unter Umständen eine deutliche Absorption bedingen können. Zum Beispiel hatten die untersuchten Rutilplatten (I, p. 932, Tab. 2) keine merkliche Absorption gezeigt; dagegen absorbierte das Pulver ebenso wie der Brookitkristall (vgl. p. 123) ziemlich stark. — Auch ein zweites Pyromorphitpräparat aus Zschopau, parallel zur Achse geschnitten, hatte wohl dieselbe Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{\perp} = 26$, wie der früher untersuchte Schnitt (I, p. 932, Tab. 2), zeigte aber auffallend starke Absorption. Man wird also zu unterscheiden haben zwischen der anomalen elektrischen Absorption, die dem Körper als solchem zukommt, und zwischen der Absorption, die wahrscheinlich durch die Leitfähigkeit fremder Bestandteile bedingt wird. Eine Analogie zu den zweierlei Arten Absorption bieten die zweierlei Arten Leitfähigkeit, wie wir sie bei Metallen und Elektrolyten haben.¹⁾

Die Absorption läßt sich mit dem I, p. 923, Fig. 5 abgebildeten Apparat sehr leicht nachweisen und ihrer Größenordnung nach bestimmen. Füllt man nämlich das Kölbchen *c* mit der Eichflüssigkeit, die ungefähr dieselbe Dielektrizitätskonstante hat, wie der untersuchte feste Körper, so kann man die Sekundärleitung so weit von der Primärleitung entfernen, daß die über die Drähte *l* gelegte Zehnderröhre gerade noch aufleuchtet. Bringt man jetzt außer der Eichflüssigkeit noch die Platte bez. das Pulver in das Kölbchen, so wird das Aufleuchten der Röhre erst wieder eintreten, wenn man die Sekundärleitung näher an die Primärleitung herangebracht hat. Die Größe der Verschiebung gibt uns unmittelbar ein Maß für die Absorptionsfähigkeit der untersuchten Substanz.

1) Eine Absorption trat übrigens bei Pulvern auch manchmal dann ein, wenn die Eichflüssigkeit (gewöhnlich Wasser) geringe Mengen fremder Bestandteile dissoziierte. Diese Absorption konnte man durch Auswaschen des Pulvers in heißem destillierten Wasser beseitigen.

Zusammenfassung der Hauptresultate.¹⁾

5. Aus Kristallen hergestellte Pulver lassen sich zur Ermittlung der Dielektrizitätskonstante in einer bestimmten Richtung oftmals vorteilhaft verwenden.

6. Die kristallisiert auftretenden Elemente Schwefel und Kohlenstoff folgen dem Maxwellschen Gesetze $\epsilon = \nu_{\infty}^2$. Daß dies auch Phosphor und Selen tun, ist wahrscheinlich, aber vorläufig nicht mit Sicherheit zu entscheiden.

7. Die hohen Dielektrizitätskonstanten sind bei Blei- und Thalliumverbindungen durch das Metall bedingt, bei den natürlichen Titanoxyden dagegen durch noch unbekannte Ursachen.

8. Absorptionsfähigkeit für elektrische Schwingungen kann oftmals durch geringe fremde Beimischungen bedingt werden.
Gießen, Physik. Inst. d. Univ.

1) Im Anschluß an die Hauptresultate von I weiter numeriert.

(Eingegangen 23. Januar 1903.)

6. *Über das Kathodengefälle der Alkalimetalle; von K. Mey.*

(Gekürzte Inaugural-Dissertation, Berlin 1902.)

I. Einleitung.

Eine gelegentliche Beobachtung von Prof. Warburg¹⁾ schien darauf hinzuweisen, daß die Alkalimetalle ein besonders kleines Kathodengefälle besäßen. Aus dieser Veranlassung habe ich die normalen Kathodengefälle an reinen Oberflächen der Alkalimetalle in Stickstoff, Wasserstoff und Helium bestimmt.

II. Herstellung der Entladungsröhren. Apparat.

Es wurden meist zylindrische Röhren von 2,5—5,5 cm Durchmesser und 14—18 cm Länge benutzt (Fig. 1).

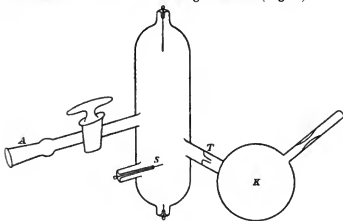


Fig. 1.

Die Elektroden, meist aus Aluminium bestehend, waren mittels Platindrähten in das Glas eingeschmolzen, ebenso die zur Messung des Kathodengefalles dienende Sonde *S* aus dünnem Platindraht. Letztere war außerdem bis auf eine Strecke von 5 mm an der Spitze zur Isolation mit Glas überzogen. In der Kugel *K* befand sich das zu untersuchende Metall. Es

1) E. Warburg, Wied. Ann. 40. p. 10. 1890.

konnte durch Drehen des ganzen Gefäßes in dem horizontal-liegenden Schiffe *A* nach Bedürfnis in die Entladungsröhre übergeschüttet werden, wobei der Trichter ¹⁾ *T* oberflächliche Verunreinigungen zurückhielt, und ebenso konnte man es wieder zurückfließen lassen. War verunreinigtes Metall im Entladungsgefäß geblieben, so konnte nach dem Erkalten desselben durch Übergießen frischen Metalles aus *K* stets wieder eine blanke Oberfläche hergestellt werden.

Um richtige und konstante Werte des Kathodengefälles zu erzielen, wurden die Gefäße gut gereinigt und getrocknet, vor allem aber durch stundenlange Anwendung eines Induktionsstromes und starkes Erhitzen Glaswände und Elektroden möglichst gasfrei gemacht. Trotzdem stieg bei manchen Röhren das Kathodengefälle stetig, wenn Strom durchgelassen wurde. Es wurde dann das Gas immer wieder ausgepumpt und frisches zugelassen, bis Konstanz eintrat.

Große Sorgfalt mußte auf die Behandlung von Kalium und Natrium verwandt werden.²⁾ Die käuflichen Stücke, besonders Kalium, enthielten stets in feinen Poren Petroleum. Es genügte nicht, diese Stücke zu einem größeren zusammenzuschmelzen und dieses dann mit blanker Oberfläche in die Kugel zu bringen: im Vakuum, besonders beim Schmelzen gaben die Metalle dann doch noch reichliche Mengen von Kohlenwasserstoffen ab, die auch durch häufiges Auspumpen und Ausspülen mit Stickstoff nicht ganz beseitigt werden konnten. Es wurde deshalb folgendermaßen verfahren:

Das Metall wurde oberflächlich gereinigt und in eine weite Glasröhre *A* gebracht, die in eine engere mit eingeschmolzenem Trichter auslief (Fig. 2). Die weite Röhre wurde dann bei *d*

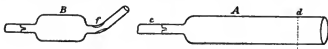


Fig. 2.

zugeschmolzen, bei *c* an die Wasserstrahlpumpe angesetzt, auf 1 cm evakuiert und kräftig erwärmt. Dabei wurde das Metall

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 41. p. 161. 1890.

2) Vgl. E. B. Hagen, Wied. Ann. 19. p. 444. 1883.

weit über seinen Schmelzpunkt erhitzt und gab viel Gas ab. Alsdann wurde wieder Luft zugelassen, bei *c* eine neue entsprechende Röhre *B* angeblasen und nach erneutem Auspumpen das geschmolzene Metall durch den Trichter nach *B* übergossen und die Röhre *A* bei *f* abgeschmolzen. Das Metall in *B* wurde wieder erhitzt etc. Nachdem es noch in einer dritten Röhre ebenso behandelt war, wurde diese Röhre mit dem Metall an die Kugel *K* angeblasen, unter Erwärmen des ganzen Rohres mit der Quecksilberpumpe möglichst weit ausgepumpt und nach dem Übergießen des Metalles in die Kugel die Röhre abgeschmolzen. Das Metall hatte dann eine völlig blanke Oberfläche und gab bei erneutem Erwärmen im Vakuum weder Kohlenwasserstoffe noch andere Gase mehr ab.

Außer den reinen Metallen wurden auch Legierungen von Kalium und Natrium untersucht, die bei Zimmertemperatur flüssig sind. Sie wurden hergestellt durch Zusammenschmelzen von Kalium und Natrium im Verhältnis der Molekulargewichte und ebenso behandelt, wie die festen reinen Metalle.

Der elektrische Strom wurde geliefert von einer Hochspannungsakkumulatorenbatterie von 1200 Volt, ging durch einen veränderlichen Widerstand von Jodkadmiumlösung in Amylalkohol, das Entladungsrohr, Galvanometer und Telephon zur Erde.

Die Potentialdifferenzen wurden mit dem von Graham¹⁾ beschriebenen Thomsonschen Quadrantelektrometer gemessen.

Alle Glasteile des Apparates waren entweder zusammengeschmolzen oder durch Schliffe verbunden, die ebenso wie die Glashähne gefettet waren. Auch die Anwesenheit von Quecksilberdampf in den Entladungsröhren war nicht vermieden. Zum Auspumpen diente eine Sprengelsche Quecksilberluftpumpe. Der Druck des Gases wurde mit einem Bambergischen Kathetometer an einem Quecksilbermanometer von 12 mm Schenkelweite gemessen.

III. Messungen in Stickstoff.

Der Stickstoff wurde dargestellt durch Erwärmen einer wässerigen Lösung von Ammoniumchlorid und Natriumnitrit,

1) W. P. Graham, Wied. Ann. 64. p. 50. 1898.

durch Schwefelsäure, Kalilauge, über Phosphorpentoxyd und glühendes Kupfer geleitet. Letzteres nimmt auch das Stickoxyd fort, von dem sich nach Lord Rayleighs Beobachtungen bei dieser Reaktion, wie überhaupt bei den meisten, wo Stickstoff in größerer Menge in Freiheit gesetzt wird, etwas bildet. Das Kupfer wurde zuvor im Vakuum geglüht, bis es keinen Wasserstoff mehr abgab, alsdann der Gasstrom langsam darüber geleitet und ein Glasballon von ca. 1,5 Liter Inhalt damit bis zu Atmosphärendruck gefüllt. Ehe das Gas von hier in die Entladungsröhren gelassen wurde, ging es noch durch eine Röhre, in welche elektrolytisch Natrium entwickelt wurde. Nach Warburg¹⁾ ist hierbei das Auftreten von gelbem Licht an der Anode ein Zeichen, daß aller Sauerstoff und Wasserdampf vom Natrium aufgezehrt sind. Dieses gelbe Natriumlicht trat oft schon nach einer halben Minute Stromdurchgang auf, ein Zeichen, daß der Stickstoff von jenen Gasen fast frei war. Das Spektrum des Stickstoffs in den Entladungsröhren wurde verglichen mit den Zeichnungen, die Lecocq²⁾ von demselben gibt; es konnten keine fremden Linien gefunden werden.

Bei den im folgenden beschriebenen Messungen sind eine große Anzahl Röhren von verschiedenen Dimensionen bei starken Veränderungen des Druckes und der Stromstärke untersucht worden. Das Kathodengefälle wurde jedoch, wie zu erwarten war, hiervon gar nicht beeinflusst, und ich unterlasse es daher, über diese Größen ausführliche Angaben zu machen. Im allgemeinen wurde der Druck zwischen 0,3 und 2,5 mm, die Stromstärke zwischen 0,1 und $2 \cdot 10^{-3}$ Amp. verändert.

1. Natriumamalgam.

Die benutzten Amalgame enthielten Natrium nur in solchen Mengen, daß sie bei Zimmertemperatur noch flüssig waren. Sobald der Strom einige Minuten durch das Entladungsrohr gegangen war, bemerkte man eine leichte Trübung der Metallfläche, soweit das negative Glimmlicht reichte, und mit der Zeit bildete sich eine dünne feste Kruste, während der Gasdruck sank.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 40. p. 1. 1890.

2) Lecocq de Boisbaudran, Spectres lumineux.

In die Risse der festen Kruste trat aber immer wieder frisches Amalgam, und das scheint der Grund zu sein, weshalb das Kathodengefälle sich mit der Bildung jener Schicht nicht wesentlich änderte, es stieg nur um wenige Volt. Schon bei diesen Versuchen, wie auch bei allen späteren, zeigte es sich, daß eine geringe Veränderung der Kathodenoberfläche das Kathodengefälle viel weniger in die Höhe treibt, als die geringsten Beimengungen fremder Gase, die z. B. unter dem Einfluß der Entladungen sich noch von der Glaswand und den Elektroden ablösen. Es wurde an einer frisch hergestellten Röhre beobachtet:

Druck	Stromstärke	Kathodengefälle
1,34 mm	$1,2 \cdot 10^{-3}$ Amp.	194 Volt
0,95 „	$0,88 \cdot 10^{-3}$ „	195 „ (Oberfläche getrübt)
0,63 „	$0,4 \cdot 10^{-3}$ „	197 „

Nachdem das Rohr wiederholt neu mit Gas gefüllt und eine blanke Oberfläche durch Zurückgießen des Metalles in die Kugel hergestellt war, ging das Kathodengefälle auf 184 Volt zurück. Nach 10 stündigem Stromdurchgang, wobei die Oberfläche sich mit einer dünnen Kruste bedeckt hatte, war es auf 187 Volt gestiegen. Ähnlich waren die Messungen an anderen Röhren, das geringste beobachtete Gefälle betrug 180 Volt, das Mittel der Messungen 185 Volt. Eine beiläufige Messung ergab das Kathodengefälle an Quecksilber in Stickstoff zu 226 Volt. Es tritt also, wie erwartet, durch den Natriumzusatz eine bedeutende Erniedrigung ein.

Im Kathodenlicht an Natriumamalgam war auch bei geringen Stromstärken ($0,4 \cdot 10^{-3}$ Amp.) die gelbe Natriumlinie zu erkennen. Es schien, als ob dieses Natriumlicht nur in der ersten, direkt an der Kathode liegenden Schicht des Glimmlichtes aufträte, nicht auch in der äußeren blauen.

Die durch Stickstoffaufnahme gebildete Oberflächenschicht wurde durch Stromumkehren gar nicht, durch Erhitzen nur wenig merklich wieder zersetzt.

2. Kalium und Natrium.

Die Metalle Kalium und Natrium zeigten nach dem Übergießen stets eine konvexe, blanke Oberfläche und hafteten nicht am Glase. Sie behielten die glänzende Oberfläche auch

bei wiederholtem Schmelzen in Stickstoff. Sobald aber Strom durchgeleitet wurde, trat Bindung von Stickstoff ein, die Oberfläche nahm dabei, soweit das Glimmlicht reichte, eine bläuliche, immer dunkler werdende Farbe an und war nach einigen Minuten ganz von einer dunkeln Haut bedeckt. Wenn dies geschehen war, nahm der Gasdruck nicht mehr ab.

Es trat bisweilen auch ein, daß bei unverändertem weiteren Stromdurchgang diese Oberflächenschicht sich wieder auflöste, das Metall wieder matt zum Vorschein kam und der Druck auf den anfänglichen Wert stieg; oder die Bindung von Stickstoff trat ein, sobald Natrium Anode war, und sobald der Strom umgekehrt wurde, wurde der Stickstoff wieder frei.

In allen diesen Erscheinungen aber eine sichere Regelmäßigkeit, vielleicht eine Abhängigkeit von Stromstärke oder Gasdruck zu finden, ist mir nicht gelungen.

Die Erscheinungen waren an Kalium und Natrium gleich, auch die verschiedenen Röhren mit demselben Metall zeigten keine wesentlichen Unterschiede. Ich beschreibe daher nur das Verhalten einer Röhre mit Natrium genauer.

Das Katbodengefälle betrug gleich nach Stromschluß über 200 Volt, ging sehr rasch auf 185 Volt herab und stellte sich auch nach einer Erneuerung des Stickstoffs wieder auf diesen Wert ein. Der Strom betrug $1,5 \cdot 10^{-3}$ Amp. Die Oberfläche des Metalles lief etwas dunkel an, dann verschwand diese Färbung wieder und das Natrium blieb mit mattem Metallglanz zurück. Alsdann: Druck 1,28 mm. Es wird 60 Min. lang ein Strom von $1,9 \cdot 10^{-3}$ Amp. durchgeschickt, die Oberfläche bleibt unverändert, das Katbodengefälle schwankt während dieser Zeit zwischen 185 und 180 Volt. Am Ende der Stunde ist der Gasdruck 1,26 mm. Am nächsten Tage: Katbodengefälle 176 Volt. 45 Min. lang $2,1 \cdot 10^{-3}$ Amp. durchgeschickt, keine Druckerniedrigung. Darauf 15 Min. Strom eines Induktionsapparates, keine Druckerniedrigung. Gas ausgepumpt, das Katbodengefälle geht auf 178 Volt herab, Oberfläche bleibt blank. Darauf wurde neuer Stickstoff zugelassen, Druck 0,92 mm. Zunächst war das Kathodengefälle 200 Volt, es sank rasch auf 182, die Oberfläche blieb blank. Nach einigen Minuten trat plötzlich dunkle Färbung der Oberfläche ein, der Gasdruck sank in 8 Min. auf 0,44 mm und blieb

dann unverändert. Das Kathodengefälle stieg über 200 Volt und war nicht mehr von der Stromstärke unabhängig, sondern nahm mit steigendem Strome zu. Am nächsten Tage löste sich der Überzug wieder auf, während derselbe Strom von $1,9 \cdot 10^{-3}$ Amp. durchging, die metallische Oberfläche kam wieder zum Vorschein und das Kathodengefälle sank von 230 auf 194 Volt. Nachdem jetzt bei derselben Gasfüllung durch Schmelzen und Zurückschütten des Metalles eine blanke Oberfläche wiederhergestellt war, betrug das Kathodengefälle bei 0,91 mm Druck 175–178 Volt, der Strom wurde dabei zwischen $0,47$ und $1,4 \cdot 10^{-3}$ Amp. verändert. Nach einiger Zeit lief die Oberfläche wieder dunkel an und das Kathodengefälle stieg von neuem.

Im Mittel ist das Kathodengefälle an einer blanken oder nur wenig getrübten Oberfläche von Natrium in Stickstoff 178 Volt, der niedrigste beobachtete Wert war 171. Das Kathodengefälle an metallischem Natrium ist demnach etwas, wenn auch nicht viel, kleiner als an Natriumamalgam. An Kalium war es noch kleiner, nämlich 170 Volt im Mittel, der kleinste von mir beobachtete Wert 162 Volt.

Wenn die Kathode durch Bindung von Stickstoff dunkel anlief, so stieg das Kathodengefälle bis über 230 Volt und war dann meist nicht mehr von der Stromstärke unabhängig, sondern nahm mit wachsendem Strome zu, auch wenn das Glimmlicht die Kathode nur teilweise bedeckte. Kehrt man aber jetzt den Strom eine kurze Zeit, etwa eine halbe Minute um, sodaß Natrium Anode wurde, und ließ ihn dann wieder in der ursprünglichen Richtung gehen, so stellte sich jetzt zunächst das normale Kathodengefälle von ca. 178 Volt ein, um bald von neuem anzusteigen. Diese Erscheinung wurde an verschiedenen Röhren ganz regelmäßig beobachtet. Sie spricht dafür, daß die an der Kathode gebildete Verbindung durch Stromumkehren wieder etwas zersetzt wird, sodaß das frei werdende Natrium zunächst ein normales Kathodengefälle zeigen kann; indessen habe ich nie eine merkliche Zersetzung und Druckzunahme wirklich beobachtet, wenn Natrium Anode wurde.

Das Schmelzen der Metalle hatte keinen Einfluß auf das Kathodengefälle.

Kalium und Natrium zerstäubten nur sehr wenig, wenigstens bei den von mir angewandten Drucken und Stromstärken. Der Beschlag an der Glaswand war schwarz und zeigte keine metallische Spiegelung.

3. Kalium-Natriumlegierung. K_3N und Na_3N .

Die Legierung haftete zunächst nicht an der Glaswand und bildete eine konvexe Oberfläche. Sobald jedoch längere Zeit Strom durch das Rohr gegangen und dadurch etwas Metall an die Glaswand zerstäubt war, haftete die Legierung rings am Glase und stieg an diesem etwas in die Höhe.

Ähnlich wie bei dem Natriumamalgam, aber viel rascher, trat bei der Legierung nach Stromschluß Trübung der metallischen Oberfläche ein, soweit das Glimmlicht reichte. Auf das Kathodengefälle hatte das Entstehen der festen Stickstoffverbindung wenig Einfluß; denn durch die Risse und Poren der Kruste drang immer wieder frisches Metall. Das ist wohl auch der Grund, weshalb die Messungen an der Legierung eine viel bessere Übereinstimmung untereinander zeigten, als an den festen Metallen. Hier war nahezu immer dieselbe Oberflächenbeschaffenheit vorhanden, an den festen Metallen änderte sie sich dagegen sehr häufig.

Das Mittel der Beobachtungen ergab für das normale Kathodengefälle an der Kalium-Natriumlegierung 125 Volt. Es wurden z. B. an einer Röhre gemessen: Druck 1,5 mm, Strom $1,8 \cdot 10^{-3}$ Amp., Kathodengefälle 135 Volt; Gas ausgepumpt, neues zugelassen, Kathodengefälle 128 Volt, nach einigen Minuten auf 125, dann auf 122 Volt zurückgehend. Dieser Wert stellte sich dann dauernd wieder ein, wenn neues Gas zugelassen wurde: Druck 1,6 mm, Strom $1,8 \cdot 10^{-3}$ Amp., Kathodengefälle 122 Volt; nach 20 Min. war durch Stickstoffbindung der Druck auf 0,6 mm zurückgegangen, das Kathodengefälle aber ungeändert geblieben. Neuer Stickstoff wurde zugelassen: 3,83 mm Druck, Strom $1,35 \cdot 10^{-3}$ Amp., nach 50 Min. war der Druck auf 2,13 mm zurückgegangen, das Kathodengefälle blieb währenddessen unverändert 123 Volt etc. Eine andere Röhre zeigte konstant ein Gefälle von 126 Volt. Es wurde auch einmal ein Entladungsgefäß mit atmosphärischem Stick-

stoff gefüllt, der also etwas Argon enthielt: Das Kathodengefälle war unverändert 125 Volt.

Während an den festen Metallen die Bindung von Stickstoff sehr unregelmäßig war, nahm die Legierung stets Gas auf, solange Strom durch das Rohr geleitet wurde. Es ist bereits mehrfach beobachtet worden, daß unter dem Einfluß des elektrischen Stromes der Stickstoff mit den Metallen in Verbindung tritt. So fand Salet¹⁾, daß in Geisslerschen Röhren der Stickstoff rasch verschwindet, wenn bei Gegenwart von etwas Natrium Strom durchgeschickt wird, und Zehnder²⁾ fand, daß die Bindung von Stickstoff viel lebhafter ist, wenn das Natrium Kathode, als wenn es Anode ist. Er vermutet, die entstehende Verbindung sei Na_3N . An einer Röhre, die ungefähr 3 g Legierung enthielt, habe ich einige Messungen über das Entstehen dieser Verbindungen gemacht. Es wurde andauernd Strom durch das Rohr geschickt und nach Bedürfnis neuer Stickstoff zugelassen. Als nun an verschiedenen Tagen die während einer gemessenen Zeit bei einem bestimmten Strome eintretende Druckerniedrigung beobachtet wurde, ergab sich, daß die Stickstoffaufnahme regelmäßig proportional der durchgeschickten Elektrizitätsmenge war, wie die Tabelle zeigt.

Dauer	Stromstärke	Druck	Druck	Druck-	Druckabnahme
Min.	Ampère	anfangs	am Ende	abnahme	Zeit \times Stromstärke
		mm	mm	mm	
20	$1,81 \cdot 10^{-3}$	1,55	0,62	0,93	25,6
15	$1,60 \cdot 10^{-3}$	1,60	1,03	0,57	23,8
44	$0,53 \cdot 10^{-3}$	0,97	0,38	0,59	25,3
50	$1,35 \cdot 10^{-3}$	3,83	2,13	1,70	25,2
15	$1,32 \cdot 10^{-3}$	—	—	0,50	25,2
30	$1,27 \cdot 10^{-3}$	1,66	0,72	0,94	24,7

Es wurde stets durch ein Milliampère in einer Minute 0,000033 g Stickstoff zur Bindung gebracht.

Wenn die Legierung zur Anode gemacht wurde, wurde die gebildete Verbindung nicht wieder zersetzt, sondern weiter

1) G. Salet, Pogg. Ann. 158. p. 332. 1876.

2) L. Zehnder, Wied. Ann. 52. p. 56. 1894.

Stickstoff aufgenommen, aber nur ungefähr der zehnte Teil, nämlich durch ein Milliampère in einer Minute 0,000003 g.

Hiermit steht Zehnders Beobachtung in Einklang, daß Natrium als Kathode viel mehr Stickstoff bindet, denn als Anode.

Bei dem gewöhnlich herrschenden Gasdruck von mehreren Millimetern ging die Entladung nur von einer kleinen Fläche



Fig. 3.

seitlich an der Glaswand aus. Von hier wuchs nun im Laufe mehrerer Wochen gleichsam ein Baum, aus der festen Verbindung bestehend empor. An der Spitze der amorphen, grünlich grauen Masse war das Glimmlicht. Dort wurde die Verbindung gebildet, und die Legierung stieg immer von neuem in den Poren des schwammigen Gebildes nach oben (vgl. Fig. 3). Als schließlich kein Stickstoff mehr aufgenommen

wurde, war auch alle Legierung aus dem unteren Teil des Rohres verschwunden.

Hr. Dr. Hinrichsen hatte die Freundlichkeit, im zweiten chemischen Institut der Universität die entstandene Verbindung zu untersuchen. Er konnte mit Leichtigkeit feststellen, daß die grünschwärze, amorphe Masse teils Kaliumnitrid K_3N , teils Natriumnitrid Na_3N war. Während das Kaliumnitrid eine wohlbekannte Verbindung ist, scheint das Natriumnitrid noch nicht dargestellt worden zu sein.

IV. Versuche in Wasserstoff.

Der Wasserstoff wurde in einem Kippschen Apparat durch Einwirkung verdünnter reiner Schwefelsäure auf chemisch reines Zink dargestellt. Er ging durch eine Lösung von Kaliumpermanganat, über Natronkalk und Phosphorpentoxyd. Bei einigen Versuchen wurde auch elektrolytisch entwickelter Wasserstoff benutzt, die Resultate wichen von den übrigen nicht ab.

Die Erscheinungen an den Alkalikathoden in Wasserstoff entsprachen ganz denjenigen in Stickstoff. In den meisten Fällen lief die Kathode nach Stromschluß dunkel an, und es

trat Erniedrigung des Gadruckes ein ¹⁾; bei Natrium war die Färbung bräunlich, bei Kalium dunkelblau. Wurde dann durch Übergießen frischen Metalles aus der Kugel *K* wieder eine blanke Oberfläche hergestellt, so trat auch jetzt in den meisten Fällen Bindung von Wasserstoff ein; bisweilen aber ging der Strom auch einige Zeit durch das Rohr, ohne die Oberfläche sichtbar zu ändern. Es bleibt hier, ebenso wie bei Stickstoff, unentschieden, von welchen Umständen das Entstehen einer Verbindung von Gas und Metall abhängt.

Wenn dagegen die Legierung als Kathode benutzt wurde, so wurde stets Wasserstoff gebunden, und allmählich entstand eine feste, fast farblose Schicht an der Oberfläche. Welcher Art diese Natriumwasserstoffverbindung ist ²⁾, habe ich nicht weiter untersucht. Hr. Moissan ³⁾ hat kürzlich ein Natrium- und ein Kaliumhydrür beschrieben, die durch Erhitzen der Metalle in Wasserstoff erhalten werden. Von diesen Körpern ist besonders das NaH in geschmolzenem Natrium löslich; im Vakuum können beide Verbindungen durch Erwärmen wieder zersetzt werden.

Einige Beobachtungen machen es wahrscheinlich, daß unter dem Einfluß der elektrischen Entladung dieselben Körper entstehen. War nämlich nach längerem Stromdurchgang an der Legierung eine feste Schicht entstanden, so wurde das übrige flüssige Metall in die Kugel abgegossen und nun das Rohr mit einem Bunsenbrenner erhitzt. Dann zersetzte sich die feste Schicht vollständig, und es blieb nur reines flüssiges Metall zurück. Da aber der Gasdruck hierbei nie wieder auf den anfänglichen Wert stieg, so ist es nicht unwahrscheinlich, daß die fehlende Menge Wasserstoff in Form von NaH sich in der Legierung gelöst hatte und so gebunden blieb.

Ähnlich wie bei den Versuchen in Stickstoff wurde das Kathodengefälle durch eine leichte Trübung der Oberfläche nicht geändert; schritt aber die Bindung von Wasserstoff weiter fort, so stieg es beträchtlich, besonders an den festen Metallen. An Natrium war der höchste beobachtete Wert 198 Volt. Durch häufiges Ausspülen der Röhre mit frischem Gase und

1) Vgl. E. Warburg, Wied. Ann. 40. p. 4. 1890.

2) E. Warburg, l. c.

3) H. Moissan, Compt. rend. 134. p. 18 u. 71. 1902.

Herstellen einer blanken Oberfläche konnte das Gefälle auf 185 Volt heruntergebracht werden, und dieser Wert wurde auch gefunden, wenn die Oberfläche beim Stromdurchgang nicht sichtlich verändert wurde. An Kalium wurden z. B. folgende Werte beobachtet: Gleich nach Füllung 177 Volt, nach einigen Minuten Stromdurchgang, Oberfläche etwas angelaufen, 174, Kathodengefälle steigt bei weiterer Trübung auf 182; frische Oberfläche hergestellt: 173, nach weiterem Stromdurchgang, Oberfläche blank, 171, Kathodengefälle fällt auf 161 Volt und steigt rasch wieder auf 172, wobei die Oberfläche nur wenig getrübt ist. Als Mittel ergab sich für Kalium ein Kathodengefälle von 172 Volt.

Die Legierung hatte fast dasselbe Gefälle. Es wurden gemessen: 171, 172, 169, 168, 166, 166, 171 Volt, das Mittel ist 169 Volt.

Während also an den festen Metallen in Stickstoff und Wasserstoff ungefähr dasselbe Kathodengefälle herrscht, hat die Legierung in Stickstoff ein viel niedrigeres Gefälle als in Wasserstoff, doch liegt auch in Wasserstoff das Gefälle der Legierung noch etwas unterhalb der Werte für die festen Metalle.

V. Versuche in Helium.

1. Darstellung des Heliums. Reinigungsmethode.

Das Helium wurde in bekannter Weise durch Erhitzen von Cleveit dargestellt. Es ging über Natronkalk, Phosphor-pentoxyd, glühendes Kupferoxyd, Kupfer und Magnesium, und wurde mit einer Töplerschen Quecksilberpumpe in eine Glas-kugel gepumpt und dort unter Abschluß einer Quecksilber-säule aufbewahrt. Es konnte in einem Kreislauf aus dieser Kugel herausgepreßt, über die Reinigungsmittel getrieben und wieder zurückgepumpt werden. Doch gelang es auch durch häufiges Überleiten des Gases nicht, das Spektrum frei von fremden Bestandteilen zu bekommen. Das lag wohl zum Teil daran, daß das Helium beim Überleiten nur einen Druck von 20 cm Hg hatte, bei vermindertem Drucke aber kann Wasserstoff durch glühendes Kupferoxyd nicht vollständig verbrannt werden.

Zur völligen Reinigung des Heliums wurde mit Vorteil die bei Wasserstoff und Stickstoff erhaltene Erfahrung benutzt, daß diese Gase durch Kalium-Natriumlegierung beim Strom-

durchgang gebunden werden. Es wurde dazu in den Kreislauf ein Entladungsrohr eingesetzt, welches als Kathode Kalium-Natriumlegierung enthielt und von dem übrigen Röhrensystem durch zwei Hähne abgeschlossen werden konnte. Ließ man in dieses nun durch den einen Hahn Helium bis zu einem Drucke von einigen Zentimetern eintreten, schloß ab und ließ Entladungen eines Induktoriums übergehen, so war nach einigen Minuten das Spektrum des Heliums rein. So gelang es durch eine einzige Operation, das Helium von den gewöhnlichen Gasen O_2 , N_2 , H_2 , H_2O zu befreien.

Da schon sehr geringe Beimengungen von Stickstoff und Wasserstoff im Heliumspektrum¹⁾ deutlich hervortreten, so war die Reinheit des Spektrums wirklich ein Zeichen für die Reinheit des Gases.

Aus dem Reinigungsrohr konnte das Helium entweder in die zur Aufbewahrung dienende Kugel gepumpt oder in die zu den Messungen benutzten Entladungsröhren geleitet werden.

Zur genaueren Beobachtung des Heliumspektrums diente ein Geisslersches Rohr mit gerader Durchsicht. Von dieser Röhre war Quecksilberdampf durch vorgelegtes Blattgold abgehalten. Ein Spektrometer mit Rutherfordschem Prisma diente zur Messung der Linien. Das Spektrum war von ausgezeichnete Helligkeit, insbesondere fielen die violetten Linien durch ihre Stärke im Vergleich zu anderen Gasspektren auf. Bei Drucken bis zu 6 mm wurden nur die folgenden Linien beobachtet, die sämtlich dem Helium zugehören: 706,5, 668, 587,6, 504, 501, 492, 471, 447, 443, 438, 416, 414, 412, 402,5, 396 $\mu\mu$. Herrschte aber ein höherer Gasdruck im Geisslerschen Rohr, so traten noch mehr Linien auf, besonders im Grün, und es zeigte sich, daß diese alle dem Argon zugehörten. Die Argonlinien sind in Helium leicht sichtbar. Da sie hier erst bei höheren Drucken auftraten, so war jedenfalls die Beimengung an Argon gering.

2. Das Kathodengefülle.

Wenn das Helium gut von Stickstoff und Wasserstoff befreit war, so blieben die Alkalimetalle auch bei längerem Stromdurchgang völlig unverändert, die Messungen des Kathoden-

1) Collie u. Ramsay, Proc. Roy. Soc. 59. p. 257. 1896.

gefälles stimmten miteinander sehr gut überein, viel besser als es bei Stickstoff und Wasserstoff erreicht werden konnte. Es ergab sich für Natrium ein Gefälle von 80 Volt, für die Legierung von 78,5 und für Kalium von 69 Volt.

Das positive Glimmlicht bestand bei der Weite der Röhren nur aus einer Lichthaut an der Anode. Erst bei sehr starken Strömen wurden noch einige Schichten sichtbar. Befand sich aber noch etwas Stickstoff im Helium, so war eine schwach rote positive Lichtsäule vorhanden. Das Kathodengefälle betrug dann 100—130 Volt. Mit der Bindung des Stickstoffs an der Alkalikathode verschwand das rote positive Licht und das Kathodengefälle ging auf seinen normalen Wert zurück. Das gesamte Entladungspotential der Röhren betrug dann 120—150 Volt. Wurde eine Platinanode ungefähr 2 cm vor der Kathode angebracht, so gelang es schon mit der Spannung der städtischen Zentrale, 110 Volt, eine Glimmentladung hervorzubringen.

Die beiden folgenden Tabellen geben die Messungen an einer Röhre mit der Legierung als Kathode und an einer Röhre, die festes Kalium enthielt.

Kathodengefälle an Kalium-Natriumlegierung in Helium.

Druck	Abstand der Sonde von der Kathode	Strom	Kathoden- gefälle	
mm	mm	Ampère	Volt	
6,6	4	$1 \cdot 10^{-3}$	78,4	
5	8	—	79	
				Neues Gas und neue Ober- fläche
7	8	$1,5 \cdot 10^{-3}$	78	
				Nachdem 20 Stunden lang Strom durchgegangen.
7	8	$1,5 \cdot 10^{-3}$	78,5	
10,5	10	$8 \cdot 10^{-3}$	79,5	Gas zugelassen.
10,5	5	$8 \cdot 10^{-3}$	78,5	
19,3	5	$1,5-8 \cdot 10^{-3}$	78,8	Gas zugelassen.
19,3	5	$8 \cdot 10^{-3}$	78,8	
26,0	5	$8 \cdot 10^{-3}$	78,8	Gas zugelassen.
26,0	5	bis $20 \cdot 10^{-3}$	78,4	
37,0	5	$35 \cdot 10^{-3}$	78,5	Gas zugelassen.

Kathodengefälle an Kalium in Helium.

Röhrenlänge 14 cm, Weite 4 cm.

Druck mm	Stromstärke Ampère	Kathoden- gefälle Volt	
4	$1,2 \cdot 10^{-3}$	70	
4	$4 \cdot 10^{-3}$	69,6	Neues Gas zugelassen. Kathode durch N_2 -Bindung etwas anlaufend.
5,3	$1,2 \cdot 10^{-3}$	72	Blanke Oberfläche hergestellt.
5,3	$1,2 \cdot 10^{-3}$	68,8	
5,3	$3,4 \cdot 10^{-3}$	69	
5,3	$8,4 \cdot 10^{-3}$	69,2	
5,3	$11,7 \cdot 10^{-3}$	69	
			Ganz ausgepumpt und neues, reines Gas zugelassen.
9	$8,5 \cdot 10^{-3}$	69,4	
9	$8,5 \cdot 10^{-3}$	68,8	Nach $\frac{1}{2}$ Stunde Strom.
			Oberfläche bleibt ganz rein. Gas zugelassen.
15,8	$5 \cdot 10^{-3}$	69	
15,8	$17 \cdot 10^{-3}$	69	
23	$12 \cdot 10^{-3}$	68,9	Gas zugelassen.
32	bis zu $30 \cdot 10^{-3}$	69	Gas zugelassen.

Die Tabellen bestätigen von neuem, daß das normale Kathodengefälle von Stromstärke und Gasdruck gar nicht beeinflusst wird.

Bei der Betrachtung der Glimmentladung fiel sofort die geringe Dicke des negativen Glimmlichtes in die Augen. Es hatte, soweit der Druck von mir verändert wurde, nie eine größere Dicke als ungefähr 2 mm. Das steht mit der bekannten Erscheinung in Einklang, daß das Glimmlicht an einem Metall um so dünner ist, je geringer das Kathodengefälle des Metalles ist.

3. Das Anodengefälle der Legierung.

Es wurden auch einige Messungen des Anodengefalles an der Kalium-Natriumlegierung in Helium angestellt. Hr. Skinner¹⁾

1) C. A. Skinner, Wied. Ann. 68. p. 752. 1899; Phil. Mag. 7. p. 2. 1901.

hat den Satz ausgesprochen, daß von zwei Metallen dasjenige, welches das größere Kathodengefälle besitzt, das geringere Anodengefälle hat. Da für andere Metalle noch keine Messungen des Anodengefalles in Helium gemacht worden sind, so kann aus meinen Messungen nichts Sicheres über jene Behauptung geschlossen werden. Ich fand an der Legierung bei 5 mm Druck ein Anodengefälle von 30 Volt, das bei einer Steigerung des Druckes auf 10,5 mm auf 32,5 Volt stieg. An Platin, das ein Kathodengefälle von 232 Volt hat, ist das Anodengefälle in Stickstoff bei 0,85 mm nur 17 Volt. Man erkennt, daß gegenüber dem niedrigen Kathodengefälle von 78,5 Volt in der Tat ein Anodengefälle von 30 Volt sehr hoch ist, und daß durch diese Beobachtung Skinners Behauptung gestützt wird.

Anodengefälle von Kalium-Natriumlegierung in Helium.

Druck mm	Sondenabstand mm	Strom Ampère	Anodengefälle Volt
5,2	4	$0,8 \cdot 10^{-3}$	30
—	8	bis $5 \cdot 10^{-3}$	30,2
6,6	3	$3,4 \cdot 10^{-3}$	31
10,5	5	$4 \cdot 10^{-3}$	32,8
10,5	5	$8 \cdot 10^{-3}$	32,1
10,5	5	$10 \cdot 10^{-3}$	32,5

Bei diesen Versuchen hatte die Anode eine Oberfläche von ungefähr 7 qcm (der Röhrendurchmesser war ca. 3 cm) und die Lichthaut an der Anode war so schwach, daß sie zumal bei geringerer Stromstärke nur im Dunkeln wahrgenommen werden konnte. Die Sonde stand bei diesen Messungen mehrere Millimeter von der Anode ab, doch kann dadurch kein wesentlicher Fehler begangen worden sein, denn eine positive Lichtsäule war nicht vorhanden und im dunkeln Raum ist der Potentialgradient nur sehr klein. Das zeigte sich auch darin, daß eine Änderung des Sondenabstandes von 8 auf 3 mm durch Zugießen von Metall das Kathodengefälle nur um 0,8 Volt änderte.

VI. Zusammenstellung der bekannten Kathodengefälle. Ergebnisse.

Ich gebe noch eine Zusammenstellung der bisher gemessenen normalen Kathodengefälle. Sie scheint die Behauptung

Normale Kathodengefälle.

	Platin	Kohle	Quecksilber	Silber	Kupfer	Eisen	Zink	Aluminium	Magnesium	Natrium	Kalium	Kalium-Natrium	Kalium
Sauerstoff	369 C	—	—	—	—	—	—	—	310 W	—	—	—	—
Quecksilberdampf	—	—	340 W	—	—	389 H	—	—	—	—	—	—	—
Wasserstoff, schwach feucht	850 W	—	—	—	—	—	—	236 W	207 W	—	—	—	—
Wasserstoff, rein	{ 300 W 298 C	—	—	—	300 ¹⁾ 290 W	290 230 W	280 213 W	190 W	168 W	185 M	169 M	172 M	—
Stickstoff, schwach feucht	260 W	256 W	—	—	252 W	262 W	260 W	224 W	—	—	—	—	—
Stickstoff, rein	232 W	—	226 M	—	—	—	—	—	207 W	178 M	125 M	170 M	—
Helium	226 St	—	—	—	—	—	—	—	—	80 M	78,5 M	69 M	—
Argon	167 St	—	—	—	—	—	—	100 St	—	—	—	—	—
Wasserdampf	469 C	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ammoniak	582 C	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Stickoxyd	873 (?) C	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

W = Warburg,

C = Capstick,

St = Strutt,

H = Heuse,

M = Mey.

Wied. Ann. 31. p. 545. 1887

Proc. Roy. Soc. 63.

Phil. Mag. März 1900.

Inaug.-Diss. Berlin 1901.

40. p. 1. 1900.

p. 356. 1898.

1) Die oberen Zahlen für gebrauchte, durch Zerstäubung gereinigte Metallflächen, die unteren für ungebrauchte.

tung zu bestätigen, daß im allgemeinen die Reihenfolge der Metalle nach abnehmendem Kathodengefälle in jedem Gase dieselbe ist. Platin hat stets das höchste, Aluminium ein niedrigeres, Magnesium noch ein geringeres Gefälle, dann folgt Natrium und mit dem kleinsten Gefälle Kalium. Dieselbe Reihe tritt auf, wenn man die Metalle nach ihren spezifischen Gewichten ordnet oder nach der Verwandtschaft zu Sauerstoff oder nach der Voltaschen Spannungsreihe. Der von Hrn. Heuse gefundene Wert 389 Volt für Stahl in Quecksilberdampf weicht davon ab, indessen bleibt in Quecksilberdampf eine Stahlkathode wohl kaum als solche rein erhalten. Das absonderliche Verhalten der Kalium-Natriumlegierung, die in Stickstoff und Wasserstoff ein niedrigeres Gefälle hat, als die reinen Metalle, hängt wohl mit dem Entstehen der chemischen Verbindungen zusammen. Wo eine chemische Reaktion nicht stattfindet, in Helium, liegt der Wert für die Legierung zwischen denen der reinen Metalle.

Ergebnisse.

1. Unter dem Einfluß der elektrischen Entladungen an Alkalikathoden entstehen in Stickstoff die Verbindungen NK_3 und NNa_3 , in Wasserstoff wahrscheinlich KH und NaH .

2. Die Bindung von Stickstoff ist an der Kathode reichlicher als an der Anode und bei der Legierung proportional dem durchgeschickten Strom.

3. Das Entstehen dieser Verbindungen gibt ein ausgezeichnetes Mittel, die seltenen Gase von Beimengungen der gewöhnlichen zu reinigen, indem man sie elektrischen Entladungen in einer Röhre mit Kalium-Natriumkathode ansetzt.

4. Das Anodengefälle an einer Kalium-Natriumlegierung in Helium ist verhältnismäßig hoch und bestätigt Skinners Behauptung, daß die Metalle mit niedrigem Kathodengefälle ein hohes Anodengefälle haben.

5. Die normalen Kathodengefälle betragen in Volt:

a) in Stickstoff: für Quecksilber 226, Natriumamalgam 185, Natrium 178, Kalium 170, Kalium-Natriumlegierung 125;

b) in Wasserstoff: für Natrium 185, Kalium 172, Kalium-Natriumlegierung 169;

c) in Helium: für Natrium 80, Kalium-Natriumlegierung 78,5, Kalium 69.

6. Demnach zeigen die Alkalimetalle in Helium, gegen welches sie chemisch indifferent sind, die niedrigsten bis jetzt konstant hergestellten Kathodengefälle.¹⁾

Vielleicht besteht ein Zusammenhang zwischen dieser Erscheinung und der von Elster und Geitel gefundenen großen lichtelektrischen Empfindlichkeit dieser Metalle.

Vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Hrn. Prof. Warburg habe ich für vielfache Anregung und Unterstützung bei dieser Untersuchung sehr zu danken.

1) Strutt fand (vgl. Tabelle) das Kathodengefälle an Platin in Helium ungefähr ebenso groß wie in Stickstoff. Dem Helium an sich kommt daher keineswegs ein besonders kleines Kathodengefälle zu.

(Eingegangen 27. Januar 1908.)

7. Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen oder Tordieren von Drähten; von A. Wassmuth.

(Aus den Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien.
Mathem.-naturw. Klasse 111. Abt. IIa. Juli 1902.)

I.

Wird ein Metalldraht gedehnt, so kühlt er sich etwas ab; er erwärmt sich, wenn der dehnende Zng vermindert wird und der Draht sich zusammenzieht. Mit der experimentellen Bestimmung dieser Temperaturänderungen haben sich nach Joule besonders Edlund ¹⁾, Haga ²⁾ und Wassmuth ³⁾ beschäftigt und hierbei auch den Nachweis der Übereinstimmung der Versuche mit der von Thomson aus der mechanischen Wärmetheorie abgeleiteten Formel erbracht. Haga verfuhr dabei so, daß er um den zu dehnenden Hauptdraht einen sehr dünnen Draht eines anderen Metalles wickelte und das so entstandene Thermoelement mit einem hoch astasierten Galvanometer verband; die Stelle der Umwicklung mußte dabei, um die *mittlere* Temperaturänderung des ganzen Drahtes zu erhalten, wiederholt gewechselt werden.

Wassmuth zerschnitt den zu dehnenden Draht in mehrere gleich lange Stücke, brachte an jedes Stück ein Thermoelement an und verband die Drahtstücke durch feste Holzprismen zu einer nun unschwer zu dehnenden Drahtvorrichtung; die Thermoelemente waren durch feinere Drähte verbunden und hintereinandergeschaltet und lieferten gewiß die *mittlere* Temperatur. Die Wirkung war nun auch beträchtlich höher wie bei einem Elemente; so stieg unter Anwendung von

¹⁾ Edlund, Pogg. Ann. 126. p. 539. 1865.

²⁾ H. Haga, Wied. Ann. 15. p. 1. 1882.

³⁾ A. Wassmuth, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 97. p. 52. 1888.

zehn Thermoelementen statt eines der Ausschlag nahe auf das Fünffache.

Ein kleines Kohlrausch-Hartmannsches Galvanometer gab schon unastasiert einige Centimeter als Ablenkung. Auch zur quantitativen Bestimmung, bez. zur Ermittlung des mechanischen Wärmeäquivalentes zeigte sich diese „Drahtvorrichtung“ geeignet, ja es gelang Wassmuth sogar, den Einfluß der *Magnetisierung* solcher Stäbe auf diese Temperaturänderungen ϑ mit Sicherheit festzustellen. So erhielt derselbe für ϑ :

Unmagnetisch	0,1126° C.	
Magnetisiert	0,1148° C.	0,1139° C.
Entgegengesetzt magnetisiert . . .	0,1170° C.	0,1159° C.
Wiederum unmagnetisch	0,1125° C.,	

sodaß ϑ durch das Magnetisieren von 0,1126 auf 0,1154, d. i. um $2\frac{1}{2}$ Proz. erhöht wurde.

So klein demnach diese Änderungen der Temperaturen ϑ waren, so ließen sie sich doch, wie man sieht, mit Sicherheit nachweisen.

Diese Erfolge mit der erwähnten „Drahtvorrichtung“ veranlaßten Prof. A. Naumann einen handlichen Dehnungsapparat herzustellen, der auch zu Demonstrationsversuchen dienen sollte. Die Drahtvorrichtung wurde im wesentlichen beibehalten, doch wurde statt der bisherigen horizontalen Lage derselben die *vertikale* Aufstellung, und zwar in Form von *zwei parallelen Zweigen* gewählt (Fig. 1). An jeden der sechs gleich langen Stahldrähte (von 1,5 mm Dicke) wurden Thermoelemente (aus Konstantan und Eisen) gelötet, die durch feine Drähte verbunden, hintereinander geschaltet waren; die Enden der Stahldrähte wurden umgebogen und fest durch Stäbe aus hartem Holze verbunden. Die zwei Zweige (von je drei Elementen) wurden parallel zueinander in einem stark gebauten Holzrahmen derart untergebracht, daß die beiden oberen Enden an zwei außen am Rahmen stehenden Flügelschrauben festgemacht wurden, während die beiden unteren Enden mit dem Querbalken eines eisernen Winkelhebels verbunden wurden. Deckel aus Pappe, leicht wegnehmbar, schützten die beiden Zweige vor Luftströmungen.

Wurde nun ein Gewicht ($\frac{1}{2}$ kg oder 1 kg) außen an dem Winkelhebel weiter weg verschoben, so wurden beide Zweige gedehnt und der auftretende, in seiner Stärke bald verschwindende Thermostrom machte sich an einem eingeschalteten Galvanometer von kleinem Widerstande sofort bemerkbar.

Vor Beginn des Versuches wurden die drei Thermo-elemente des einen Zweiges *gegen* die drei Thermoelemente

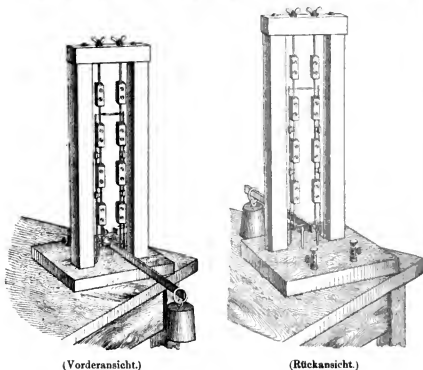


Fig. 1.

des zweiten Zweiges geschaltet und die Flügelschrauben oben so lange angezogen, bez. gelüftet, bis beim Dehnen *kein* Strom hindurchging; man konnte dann annehmen, daß in dieser Stellung der Flügelschrauben beide Zweige gleich stark gespannt waren. Erst hierauf wurden die sechs Thermo-elemente hintereinander geschaltet und mittels eines Kommutators mit dem Galvanometer verbunden.

War das dehnende Gewicht P verschoben worden, so wurde der erste Ausschlag A , dann die ersten, zweiten, dritten . . . Distanzen der Umkehrpunkte, d. i. die Größen $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, $x_3 - x_4$, $x_4 - x_5$ beobachtet; beim Zusammenziehen ergaben sich davon nicht viel verschiedene Ausschläge: Z , $x_1 - x_2$ etc. Außer dem Dämpfungsverhältnisse k , der Schwingungsdauer T der Galvanometernadel mußte auch der Widerstand r der ganzen Leitung ermittelt werden; es geschah dies mit Hilfe eines kleinen, seitlich geschalteten Magnetinduktors, indem unter Anwendung der Multiplikationsmethode die Bögen verglichen wurden, wie sie den Widerständen r und $r + 2$ Ohm entsprachen.

Schließlich war noch eine Konstante E , d. i. jene Ablenkung zu bestimmen, die der Temperaturdifferenz von 1° (an einer Lötstelle) und dem Widerstande von 1 Ohm entsprach. Zu dem Ende wurde ein den übrigen genau gleiches Thermoelement mit seiner einen Lötstelle in schmelzendes Eis gebracht, während die übrigen Stellen die Temperatur der Luft hatten. Bei diesen Versuchen mußte auch die Schwingungsdauer T noch einmal bestimmt werden, da bei einer etwaigen Änderung eine Reduktion — die E sind den T^2 proportional — nötig war. So fand sich z. B. für $T = 1,07''$ bei einer Temperaturdifferenz von $18,4^\circ$ und einem Gesamtwiderstande von $100 + 2,4$ Ohm ein Ausschlag von 294,0 mm, sodaß

$$E = \frac{294,0 \times 102,4}{18,4} = 1634$$

und

$$6 \cdot E = 9804$$

wird.

An der Hand der von Edlund, Haga und Onnes gegebenen strengen Formeln lassen sich dann, wenn noch eine gewisse, stets sehr kleine Abkühlungskonstante k experimentell ermittelt wird, die Resultate zur Berechnung der erzielten Temperaturänderung ϑ gewinnen.

Mit Rücksicht auf den vorliegenden Apparat, wo schon ein dickerer ($d = 1,5$ mm) Stahldraht zur Anwendung kam, kann man, falls nicht die größte Genauigkeit verlangt wird, folgende einfache, aus den allgemeinen Gleichungen durch Reiben-

entwickelungen abgeleitete Regeln verwenden. Man rechne zuerst die stets gegen 1 kleine Größe $z = h T$ als Mittel aus:

$$(1) \quad \begin{aligned} z &= \frac{1}{k^3} \left[\frac{1}{k} \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} - 1 \right], \\ -z &= \frac{1}{k^3} \left[\frac{1}{k} \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} - 1 \right], \\ z &= \frac{1}{k^4} \left[\frac{1}{k} \frac{x_2 - x_4}{x_3 - x_4} - 1 \right]; \end{aligned}$$

bestimme dann mit dem so erhaltenen z die Größe X_0 aus:

$$(2) \quad X_0 = \frac{k}{1+k} \frac{x_1 - x_2}{1+z \left(k^3 - \frac{k}{1+k} \right)},$$

ziehe X_0 vom ersten Ausschlage A , bez. Z ab, sodaß also:

$$(3) \quad X = A - X_0$$

wird, und erhält die Temperaturänderung ϑ aus:

$$(4) \quad \vartheta = \frac{X \cdot r}{(1-z) \cdot 6 E},$$

wo also r den Gesamtwiderstand und E die oben erwähnte Konstante bedeutet.

So findet z. B. Haga (26. September 1880) für

$$h = \frac{z}{T} = 0,0114,$$

während die obige Formel (1 a) für

$$k = 2,39, \quad T = 6,44, \quad x_1 - x_2 = 32,7, \quad x_3 - x_2 = 9,4$$

den Wert:

$$h = 0,0124$$

ergibt.

Desgleichen ergaben Beobachtungen Hagas vom 30. September 1880 als Mittel

$$h = 0,0127,$$

während die Gleichung (1 a) für

$$k = 2,44, \quad T = 6,55, \quad x_2 - x_1 = 22,4, \quad x_3 - x_2 = 6,0$$

den Wert

$$h = 0,0136$$

liefert.

Die Brauchbarkeit der Formeln (2) und (4) wird sich weiter unten erweisen.

Von den mit dem obigen Apparate ausgeführten Versuchen mögen zuerst einige mehr qualitative erwähnt werden, bei denen die verschobenen Gewichte $\frac{1}{2}$ kg und 1 kg waren und sich demnach die Temperaturänderungen nahe wie 1 zu 2 verhalten sollten. Es wurde (10. Dezember 1901) beobachtet:

	Erster Auschlag	Erste	Zweite	Dritte	Vierte
		Distanz der Umkehrpunkte, d. i.			
		$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	$x_4 - x_5$
Dehnen durch Verschieben von $\frac{1}{2}$ kg	$A = 91,1$	74,9	45,5	44,8	23,5
Zusammenziehen durch Verschieben von $\frac{1}{2}$ kg	$Z = 93,2$	72,2	46,8	42,7	—
Dehnen durch Verschieben von 1 kg	$A = 176,2$	147,2	89,2	88,2	47,6
Zusammenziehen durch Verschieben von 1 kg	$Z = 193,9$	159,0	93,5	92,2	47,8

Man findet hieraus im ersten Falle $z = 0,121$ als Mittel aus 0,126, 0,101 und 0,135 und sieht, daß der Quotient $x_1 - x_2 / x_3 - x_4 = 1,646$ im ersten und 1,648 im zweiten Falle ist, weshalb dasselbe z auch hier gilt. Mit $k = 1,335$ ergibt sich nach Gleichung (2):

$$X_0 = \frac{k}{1+k} \frac{x_1 - x_2}{1 + z \left(k^2 - \frac{k}{1+k} \right)} = 0,572 \times \frac{x_1 - x_2}{1,146} \\ = 0,499 \times (x_1 - x_2),$$

d. h. es ist sehr nahe:

$$X_0 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2).$$

Demnach sollte die Abkühlung im ersten Falle proportional sein der Zahl:

$$91,1 - \frac{1}{2} 74,9 = 53,6$$

und die Erwärmung dabei proportional:

$$93,2 - \frac{1}{2} 72,2 = 57,1,$$

also die Temperaturänderung im Mittel proportional der Zahl 55,35 sein. Für den zweiten Fall wären die entsprechenden Zahlen

$$176,2 - \frac{1}{2} 147,2 = 102,6$$

und

$$193,9 - \frac{1}{2} 159,0 = 114,4,$$

d. i. im Mittel 108,5 sein. Die Zahlen 108,5 und 55,35 verhalten sich wie 1,96 zu 1, also nahe wie 2 zu 1.

Eine andere Beobachtung vom 17. März 1902 lieferte mit $k = 1,265$, $T = 4,07$ die Werte bei der Dehnung:

$$A = 54,1 \mid x_1 - x_2 = 46,9 \mid x_3 - x_2 = 32,0 \mid x_3 - x_4 = 30,9 \mid \\ x_5 - x_4 = 19,4 \mid z = 0,0973$$

und ergaben die *strengen* Formeln für X_0 die Zahlen 24,6 und 26,4, d. i. im Mittel 25,5, während die angenäherte Formel (2) den Wert $X_0 = 25,9$ erbringt.

Wird, um gleichförmig vorzugehen, dieser letztere Wert genommen, also

$$X = 54,1 - 25,9 = 28,2$$

gesetzt, so erhält man für die Abkühlung ϑ , mit $r = 2,41$, den Wert:

$$\vartheta_1 = \frac{Xr}{(1-x) \cdot 6 E} = \frac{28,2 \times 2,41}{0,9027 \times 9804} = 0,00767^\circ.$$

Die Werte beim Zusammenziehen waren:

$Z = 52,7$, $x_1 - x_2 = 40,7$, $x_3 - x_2 = 28,1$, $x_3 - x_4 = 26,5$; sie lieferten

$$z = 0,0872, \quad X_0 = 20,9$$

und

$$\vartheta_2 = \frac{31,8 \times 2,41}{0,9128 \times 9804} = 0,00856,$$

sodaß für ϑ ein Mittelwert $\vartheta = 0,00812^\circ$ resultiert.

Dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit der von Thomson gegebenen Formel:

$$(5) \quad \vartheta = \frac{t \alpha P}{W c A},$$

worin t die absolute Temperatur gleich 290° , $\alpha = 0,00001156$ den linearen Ausdehnungskoeffizienten, $c = 0,118$ die spezifische Wärme, $A = 425 \text{ kgm}$ das mechanische Wärmeäquivalent, $W = 0,0138 \text{ kg}$ das Gewicht eines Meters und $P = \frac{1}{2} \text{ kg}$ die

Spannungszunahme für jeden einzelnen der beiden parallelen Drähte beim Dehnen bedeutet. Die Ausrechnung ergibt:

$$\vartheta = 0,00808^{\circ},$$

also nur eine geringe Abweichung von dem beobachteten Werte.

In einem anderen Falle (29. März 1902) waren für

$$r = 2,673, \quad T = 4,2, \quad k = 1,28:$$

	Erste Ausschläge	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	$x_4 - x_5$	ϑ	Mittel
Bei der Verschiebung von $\frac{1}{2}$ kg	$A = 55,0$	51,3	34,7	32,6	19,8	0,00808	$\vartheta_1 =$ 0,00840
	$Z = 51,1$	37,8	25,5	25,0	15,8	0,00872	
Bei der Verschiebung von 1 kg	$A = 101,5$	87,4	60,1	59,0	36,0	0,01566	$\vartheta_{II} =$ 0,01603
	$Z = 99,5$	79,7	58,2	51,1	31,4	0,01640	

und es ist wirklich:

$$\frac{1}{2} \vartheta_{II} = 0,00802$$

nicht viel verschieden von $\vartheta_1 = 0,00840$ und dem berechneten $\vartheta = 0,00808^{\circ}$.

Alle diese Daten bekunden, daß die obige Form des Dehnungsapparates brauchbare Resultate liefert.

II.

Nicht allein bei der Dehnung, sondern auch bei der Torsion von Metalldrähten tritt eine Abkühlung ein. So hat schon 1878 W. Thomson darauf hingewiesen, daß ein tordierter Draht bei weiterer Torsion um den Winkel $d\omega$ sich um einen genau berechenbaren Betrag abkühlen müsse. Ist nämlich $P d\omega$ die bei der Torsion um $d\omega$ aufgewandte Arbeit, t die absolute Temperatur, A das mechanische Wärmeäquivalent, so ist die bei dieser Torsion um $d\omega$ absorbierte Wärme dH

$$(6) \quad dH = - \frac{t}{A} \frac{dP}{dt_{\omega}} d\omega,$$

wenn der Index w , wie gebräuchlich, andeuten soll, daß bei der Differentiation nach t der Winkel w als konstant anzusehen ist. Nun ist bekanntlich:

$$(7) \quad F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l} w,$$

wenn $E/2(1+\mu)$ den Torsionsmodul, l die Länge und r den Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes des Drahtes vorstellt. Für Metalldrähte nimmt der Torsionsmodul und mit ihm das rückwirkende Torsionsmoment F mit steigender Temperatur ab, d. h. es ist dE/dt_w negativ, H positiv oder die Torsion ist wirklich mit einer Abkühlung verbunden. Sieht man von den sehr kleinen Änderungen des l und r mit der Temperatur ab und nennt $n/10^4$ die relative Abnahme des Torsionsmoduls bei einer Temperaturerhöhung um 1° , so wird:

$$(8) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dt_w} = - \frac{n}{10^4}.$$

Durch Benützung dieses Ausdruckes und eine nachträgliche Integration erhält man, wie ich 1889¹⁾ zeigte, für die Abkühlung ϑ eines Drahtes (vom kreisförmigen Querschnitte) von der spezifischen Wärme c , dem Gewichte m/l der Längeneinheit, wenn der Torsionswinkel von w_0 auf w_1 gebracht wird, den Wert

$$(9) \quad A \left(\frac{m}{l} \right) c \vartheta = t \cdot \frac{n}{10^4} \cdot \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^4 \cdot \frac{1}{2} \frac{w_1^2 - w_0^2}{l^2}.$$

Diese (dimensionsgleiche) Formel lehrt nicht allein die Unabhängigkeit des ϑ von l , sondern zeigt vor allem, welchen bedeutenden Einfluß die Dicke $2r$ des Drahtes auf ϑ ausübt; die Abkühlung — und entsprechend auch die Erwärmung bei der Detorsion — wächst eben, gleiche Torsionen vorausgesetzt, in gleicher Weise wie der Querschnitt des Drahtes. Nun wird durch das Anlöten eines Thermoelementes an einen dünnen Draht der Querschnitt desselben wesentlich geändert, weshalb es sich empfiehlt, dickere Stäbe zu tordieren.

Es gelang mir (l. c., p. 1402 etc.) die Abkühlung bei der Torsion, bez. Erwärmung bei der Detorsion sicher nachzu-

1) A. Wassmuth, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 98. (IIa.) p. 1397. 1889.

weisen und die gute Übereinstimmung der Beobachtung ($0,00191^\circ$) mit der Rechnung ($0,00195^\circ$) zu zeigen. So wurden z. B. sechs Drahtstücke aus Stahl durch kurze, feste Holzstücke zu einer einzigen, horizontal aufgestellten Drahtverbindung vereinigt, an jedes dieser Stahlstücke ein Thermoelement sorgfältigst gelötet, alle sechs Thermoelemente unter sich und mit einem Galvanometer verbunden und dann, unter Beachtung verschiedener Schutzmaßregeln, die beiden Torsionen w_0 und w_1 vorgenommen; die stets sehr kleinen Ausschläge wurden mit denen bei der Dehnung verglichen und so die allerdings sehr kleinen Temperaturänderungen bestimmt.

Prof. A. Naumann hat den erwähnten Apparat in zweckmäßiger Weise abgeändert (vgl. Fig. 2). Drei Stahlstücke der

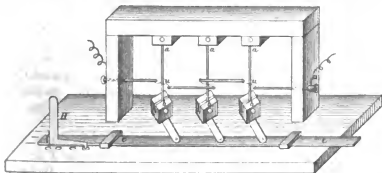


Fig. 2.

gleichen Sorte wie oben (I) wurden in einer Ebene vertikal und parallel zueinander so aufgestellt, daß ihre oberen Enden a in Ruhe verhieben, während die unteren Enden b gleichzeitig durch Verschieben einer mit ihnen durch drei Querstücke verbundenen Holzleiste $c c$ um gleiche Beträge tordiert wurden. Die Enden der Stahlstücke wurden zu dem Ende umgebogen, zwischen die Backen von harten Holzstücken gebracht und kräftigst verschraubt. Alle drei Drähte wurden in der Ebene eines starken Holzrahmens so untergebracht, daß die oberen Enden a fest mit dem obersten Querstück des Rahmens verschraubt waren, während die unteren Enden b durch starke, rechtwinklig angebrachte Messingstreifen mit der schon erwähnten Holzleiste $c c$ in Verbindung standen. Diese Leiste,

mit Hilfe einer seitlichen Handhabe H verschiebbar, hatte überdies ihre eigene Führung und trug an einem Winkelhebel einen Sporn, um zwei *ganz bestimmte* Torsionen, bez. Detorsionen herstellen zu können. Die Länge der zu tordierenden Stahlstücke (von der Dicke 1,5 mm) betrug 7,5 cm, jedes Stahlstück trug (ungefähr 1 cm unter seiner Mitte) ein Thermoelement u ; alle drei Thermoelemente waren hintereinander und schließlich mit dem Galvanometer verbunden. Ein Kasten aus Pappe und Watte schützten vor Luftströmungen.

Wie man sieht, gewährt diese Anordnung, abgesehen von ihrer Handlichkeit, den Vorteil, daß man sicher ist, daß jeder Draht *gleiche* Torsionen ausführt, während die frühere, von mir angegebene Drahtverbindung nur einen gewissen mittleren Wert ergab.

Infolge der Empfindlichkeit des Galvanometers war es möglich, mehrere Distanzen von Umkehrpunkten verfolgen und Beobachtung und Rechnung noch schärfer miteinander vergleichen zu können; im übrigen wurden, da es sich auch hier um allmählich verlöschende Thermostrome handelte, die obigen Regeln (1) und (2) beibehalten; ebenso wurden das Dämpfungsverhältnis k , die Schwingungsdauer (sie heiße jetzt) τ , der Widerstand r mittels eines Magnetoinduktors in gleicher Art wie früher bestimmt und aus den ersten Ausschlägen T bez. D (d. i. Torsion, bez. Detorsion) und den Distanzen der Umkehrpunkte $x_1 - x_2$, $x_3 - x_2$ etc. die Größen z , X_0 , $X = T - X_0$ bez. $X = D - X_0$, und schließlich die Temperaturänderung

$$\vartheta = \frac{Xr}{(1 - \alpha)^3 E},$$

wo E die gewisse thermoelektrische Konstante ist, ermittelt. Die obige Formel (9) gab das „berechnete“ Resultat.

Zur Verhütung einer permanenten Torsion wurden nun schon um w_0 tordierte Drähte um den Winkel $w_1 - w_0$ weiter tordiert. Diese Winkel w_0 und w_1 wurden durch Längenabmessungen aus rechtwinkligen Dreiecken berechnet und ergab sich:

$$w_0 = 11,09^\circ = 0,1936$$

und

$$w_1 = 20,28^\circ = 0,3540.$$

Nimmt man für Stahl nach den Versuchen Katzenelsohns¹⁾, die unter Mitwirkung des Hrn. v. Helmholtz ausgeführt wurden, die Zahl $n = 3,10$, da einer Erwärmung des Stahldrahtes von 0° auf 100° eine Abnahme des Torsionsmoduls (7505 kg. mm^2) um 3,10 Proz. entsprach, so ist demnach die der vorliegenden Torsion entsprechende Temperaturänderung ϑ zu berechnen aus:

$$\vartheta = \frac{(273 + 17)}{4,19 \times 10^7 \times 0,118} \times \frac{3,10}{10^4} \times 7505 \times 981 \times 10^6 \times \frac{\pi}{2} \\ \times \frac{2,294}{10^4} \times \frac{1}{2} \frac{0,3540^2 - 0,1936^2}{7,5^2},$$

d. h. es soll sein

$$\vartheta = 0,003765.$$

Nun ergaben z. B. die Beobachtungen vom 22. März 1902 bei

$$k = 1,259, \quad r = 1,49 \text{ Ohm}, \quad \tau = 4,08'':$$

Erster Aus Schlag	Distanzen der Umkehrpunkte					X	Temperatur- änderung ϑ
	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	$x_4 - x_5$	z		
$T = 15,0$	13,8	8,3	8,0	—	0,202	8,62	0,00328°
$D = 15,3$	12,4	7,8	7,6	4,2	0,167	9,4	0,00343
$T = 14,6$	18,1	7,4	8,8	5,4	0,180	8,44	0,00313
$D = 15,1$	12,1	8,4	7,5	—	0,0978	9,0	0,00303

$$\text{Mittel: } \vartheta = 0,00322.$$

Desgleichen erhielt ich beim Widerstande $r = 3,38 \text{ Ohm}$, indem nämlich des *Vergleiches* wegen neben dem Torsionsapparate auch noch der Dehnungsapparat eingeschaltet worden war, für die Torsionen und Detorsionen die Werte:

Erste Aus schläge	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	z	X	ϑ
$T = 5,7$	4,3	2,4	2,3	0,177	3,7	0,00311
$D = 6,9$	5,5	3,9	3,3	0,053	4,0	0,00292

$$\text{Mittel: } \vartheta = 0,00302.$$

1) N. Katzenelsohn, Inaug.-Diss. Berlin 1887. Vgl. A. Winkelmann, Handbuch der Physik 1. p. 287. 1896. — Eine kürzlich erschienene sorgfältige Untersuchung von Schäfer (Ann. d. Phys. 5. p. 220. 1901) bringt für Eisen bei einem Torsionsmodul von 7337 kg/mm^2 eine Abnahme von 3,035%, also von den obigen wenig verschiedene Werte.

und beim Dehnen und Zusammenziehen der neuen, früheren Drahtverbindung:

Erste Ausschläge	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	$x_4 - x_5$	x	X	ϑ
$A = 38,0$	34,0	22,3	23,5	12,2	0,158	21,7	0,00889
$Z = 36,7$	28,3	20,6	—	—	0,0568	21,8	0,00797

Mittel: $\vartheta = 0,00843$.

Wie man sieht, stehen diese beim Tordieren und beim Dehnen erhaltenen Werte sowohl *unter sich*, wie mit den *berechneten Angaben* (0,00377 und 0,00803) in guter Übereinstimmung, was gewiss für die Verwendbarkeit der beiden Apparate spricht. Der Torsionsapparat im Vereine mit dem gebrauchten empfindlichen Galvanometer — ein vierspuliges Spiegelgalvanometer nach du Bois und Rubens von Keiser & Schmidt in Berlin — machten es, wie gezeigt, möglich, selbst bei den Torsionen außer den ersten Ausschlägen noch mehrere Distanzen der Umkehrpunkte beobachten zu können.

Es steht zu erwarten, daß man nun auch im stande sein wird, die Temperaturänderungen ϑ beim Tordieren von Drähten aus *anderen* Stoffen als Stahl zu verfolgen; solche Stoffe sind z. B. mit sehr hoher Änderung des Torsionsmodul (d. i. mit großem n) in absteigender Reihe¹⁾: Blei, Zink, Aluminium, Silber, Messing, Neusilber, Kupfer, Gold etc., für die sich also aus dem beobachteten ϑ durch Vergleich mit der Rechnung das n mit mehr oder minder großer Sicherheit *auf neuem Wege* ermitteln lassen wird. Die interessante Frage, ob nach Graetz²⁾ für Kautschuk n *negativ* zu nehmen ist, muß sich auf diese Art sicher entscheiden lassen.

Man kann aber noch einen Schritt in dieser Richtung weiter gehen. Wie sich aus den Temperaturänderungen ϑ_1 beim Dehnen das mechanische Wärmeäquivalent mit Sicherheit bestimmen ließ, so hätte sich ebensogut der lineare Ausdehnungskoeffizient α , der dem ϑ_1 proportional ist, aus den beobachteten ϑ_1 ermitteln lassen. Wichtiger wird dieser Gedanke schon für die Torsionsbeobachtungen; nach der von

1) A. Winkelmann, Handbuch der Physik 1. p. 271. 1896.

2) L. c. p. 1406.

mir nun ausgebildeten Methode kann man die Temperaturänderungen ϑ_3 beim Tordieren mit einiger Sicherheit bestimmen und nun umgekehrt durch Vergleichung mit der Formel einen neuen Weg gewinnen, die *Abnahme des Torsionsmomentes F mit der Temperatur*, d. i.

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt_w} = - \frac{n}{10^4}$$

zu berechnen. Man findet nun durch logarithmisches Differenzieren der Gleichung (7), daß

$$(10) \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dt_w} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{1+\mu} \frac{d\mu}{dt} + 3\alpha$$

ist, sodaß es also nur noch einer Bestimmung von $1/E \, dE/dt$ bedarf, um aus (10) den Betrag von $d\mu/dt$ auf *neue Weise* zu erhalten.

Ein solcher an und für sich neuer Weg bietet sich dar in der Betrachtung der Temperaturänderungen ϑ_3 , wie sie beim weiteren *Belasten eines auf beiden Enden frei aufliegenden Stabes* durch Anbringen von Gewichten in der Mitte auftreten müssen; es läßt sich zeigen¹⁾, daß sich aus den beobachteten ϑ_3 der Ausdruck:

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt_p} + \alpha$$

1) Ist P das in der Mitte wirkende Gewicht, k der Biegunspfeil, d. i.

$$h = \frac{P^3}{12 \pi E r^4},$$

so liefern die bekannten Beziehungen:

$$dQ = dU - Pdh = t \cdot dS,$$

wenn die Temperatur t und der Zug P zu Unabhängigen gewählt werden:

$$\frac{\partial h}{\partial t_p} = \frac{\partial S}{\partial P_t}$$

und deshalb ist für den adiabatischen Vorgang:

$$dQ = t \frac{\partial S}{\partial t_p} dt + t \frac{\partial S}{\partial P_t} dP = MC_P \cdot dt + t \frac{\partial h}{\partial t_p} dP = 0$$

und

$$dt = - \frac{t}{MC_P} \frac{\partial h}{\partial t_p} dP = + \frac{t}{MC_P} \cdot h \cdot \left[\alpha + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t_p} \right] \cdot dP,$$

d. h. der Zugvermehrung um dP entspricht eine Abkühlung um dt , indem $1/E \, \partial E/\partial t$ für die meisten Stoffe negativ und absolut genommen, viel größer als der lineare Ausdehnungskoeffizient α ist.

berechnen läßt. Solche Beobachtungen vorausgesetzt, wird es möglich sein, die Änderung der Elastizitätskonstante μ mit der Temperatur und $1/E \, dE/dt$ auf neue Art zu bestimmen.

Nachschrift: Im Juni 1902 gelang es mir, die *Abkühlung* bei der Biegung eines mit beiden Enden frei aufliegenden Stahlstabes unzweifelhaft nachzuweisen, zu messen und in Übereinstimmung mit der Rechnung zu finden.

(Eingegangen 1. Februar 1903.)

**8. Über Messungen im Bandenspektrum
des Stickstoffs;
von P. Hermesdorf.**

(Auszug aus der Bonner Inaugural-Dissertation.)

Um einen Beitrag zur Untersuchung der Struktur der Bandenspektren zu liefern, habe ich einen Teil des Bandenspektrums des Stickstoffs untersucht, und zwar das Stück, welches Deslandres als die zweite Gruppe bezeichnet; er liegt zwischen $\lambda = 5000$ und $\lambda = 3000 \text{ \AA}$.

Die photographischen Aufnahmen wurden hauptsächlich mit einem großen Konkavgitter von 6,5 m Krümmungsradius mit 110000 Furchen gemacht, zum Teil auch mit Gittern von 308 bez. 100 cm Krümmungsradius, die beiden letzteren Gitter geben jedoch nicht genügende Auflösung, und wurden daher nur zur Messung der Kanten verwertet. Die Bestimmung der Wellenlängen geschah mit Hilfe des auf dieselbe Platte photographierten Bogenspektrums des Eisens. Jede Linie wurde wenigstens dreimal gemessen, und die gefundenen Zahlen zeigen, daß die Mittel im allgemeinen bis auf 0,01 \AA . richtig sein werden. Ich lasse zunächst die Messungen folgen:

λ	λ	λ	λ
3998,470 Kante	3803,414	3800,736	3797,876
3943,140 "	054	539	692
3895,066 "	3802,849	416	430
	573	160	3796,951
3805,112 Kante *	499	3799,777	776
3804,985	269	639	611
729 *	099	432	379
535	3801,911	324	038
262	613	3798,939	3795,912
126	531	796	790
3803,946	298	665	477
818	125	392	277
719	3800,911	050	050

λ	λ	λ	λ
3794,793	3772,789	3748,150	3728,534
261	351	3747,595	3727,671
3793,982	3771,084	349	3725,926
624	3770,693	161	841
3792,980	344	3746,644	3724,769
379	3768,966	256	364
377	609	3745,747	3723,941
3791,666		546	3722,800
095	3755,585 Kante *	100	406
3790,403	427	3744,695	3720,750
307	237	425	028
3789,727	081 *	3743,874	
079	3754,608 *	650	3710,687 Kante *
3788,854	463	281	410
320	289	3742,600	180
3787,704	077	477	3709,912
849	3753,794	000	626
3786,884	444	3741,298	386
252	3752,991	3740,689	095
3785,780	312	3739,999	3708,856
294	544	380	626
3784,744	422	336	159
160	217	3738,685	045
3783,677	3751,988	444	3707,543
141	717	3737,900	3706,855
3782,461	478	286	3705,433
015	422	3736,934	036
3781,528	139	340	3704,389
3780,720	3750,956	3735,848	3703,840
272	744	866	641
3779,802	583	3734,863	3702,939
3778,905	866	821	310
486	285	3733,746	011
042	3749,967	267	3701,970
3777,042	568	3732,758	3700,648
3776,635	395	068	095
195	220	3731,597	3699,940
3775,113	084	116	471
3774,716	3748,716	3730,334	086
816	583	3729,881	3698,788
3773,129	894	416	248

λ	λ	λ	λ
3697,983	3570,832	3555,416	3534,047
595	578	3554,687	3533,949
3696,949	434	824	802
863	291	3553,949	811
347	058	136	328
3695,633	3589,804	3552,778	058
	518	410	3532,772
3672,009 Kante	218	3551,533	627
	012	190	426
3577,038 Kante*	3588,914	3550,850	274
3578,892	552	3549,881	052
714*	178	548	3531,743
565	3567,978	211	502
349*	551	3548,176	808
221	280	3547,858	092
3575,910	3566,974	541	3530,798
820	462	3546,425	580
690	346	107	428
580	3565,951	3545,805	020
473	338	3544,625	3529,743
216	3564,872	828	546
109	241	084	218
3574,880	3583,719	3542,775	3528,915
780	152	476	628
618	3562,996	188	187
455	585	3540,867	004
300	020	608	3527,642
014	3581,783	335	283
3573,756	286		058
474	3580,785	3536,810 Kante	3528,810
159	425	884	344
021	3559,997	456	050
3572,834	584	805	3525,522
513	064	153	393
236	3558,854	016	013
115	204	3585,743	3524,420
3571,872	3557,847	341	3523,915
586	281	3534,982	271
371	3556,848	633	3522,787
269	194	484	209
093	3555,810	241	027

λ	λ	λ	λ
3521,564	3371,486 Kante	3862,851	3349,395
018	217	643	094
3520,762	3370,833	194	3348,312
433	217	061	025
242	3369,641	3361,752	3347,727
3519,827	447	283	3346,900
447	839	3360,835	624
015	199	316	348
3518,535	3368,980	3359,870	3345,449
082	748	250	163
3517,670	540	3358,868	3344,920
240	266	423	3343,946
3516,682	233	195	689
273	3367,762	3357,828	450
3515,865	642	386	3342,414
222	538	106	3341,910
3514,846	415	3356,733	3340,829
445	304	3355,973	595
3513,725	183	611	384
344	3366,995	238	
3512,988	770	3854,784	3309,800 Kante
200	579	452	3285,260 „
3511,832	293	101	3268,036 „
476	3365,919	3353,573	3159,233 „
3510,598	639	250	3135,900 „
283	020	3352,311	3116,747 „
3509,891	3364,776	007	3104,124 „
3508,961	294	3351,680	
626	3363,963	012	3357,75 „
279	620	3350,718	3642,51 „
	463	396	3338,83 „
3500,508 Kante	106	3349,670	

Betrachtet man eine Bande genauer, so sieht man, daß in ihrer Kante — welche ausnahmslos nach Rot zu liegt — drei starke Linien vorhanden sind. Dann folgt eine Masse dichtgedrängter, auch mit dem großen Gitter noch lange nicht genügend getrennter Linien, bis sich im Verfolg der Bande Gruppen von je drei Linien herausheben, die allmählich weiter auseinander rücken, während jedes Triplet selbst immer enger wird. Man kann also sagen, daß jede Bande mindestens drei

Linienreihen enthält, die in jenen drei starken Linien der Kante beginnen und weiterhin die Triplets bilden. In dem Zwischenstück aber kann man sie nicht verfolgen.

Für die Reihen der Bandenspektren sind von Deslandres¹⁾ drei Gesetze aufgestellt worden:

1. Die Wellenlängen oder Schwingungszahlen der Linien einer Reihe lassen sich nach der Gleichung $1/\lambda = Bn^2 + C$ berechnen, wo C die Schwingungszahl der Kante ist, n die Ordnungszahl der Linie bedeutet, also für die Kante gleich 0, für die folgenden Linien gleich 1, 2, 3 . . . zu setzen ist.

2. Die Reihen, die innerhalb einer Bande liegen, also nahezu von derselben Stelle ausgehen, sind identisch, d. h. für sie soll nur C etwas verschiedene Werte haben.

3. Auch die Schwingungszahlen der Kanten lassen sich so ordnen, daß man eine Anzahl identischer Reihen erhält, die ebenso gebaut sein sollen, wie die Linienreihen.

Es handelt sich um eine Prüfung dieser Gesetze. Nehme ich z. B. die dritte Reihe der bei etwa $\lambda = 3805$ beginnenden Bande. Nimmt man von da an, wo die Triplets deutlich zu erkennen sind, immer die dritte Linie als zu dieser Reihe gehörig, so ergibt sich in Schwingungszahlen folgende Tabelle.

$1/\lambda$	Differenz	Differenz	$1/\lambda$ berechnet	Differenz
2805,646			2805,656	0
6,503	857	36	6,503	0
7,396	893	80	7,404	- 8
8,369	978	14	8,343	+ 26
9,356	987	43	9,338	+ 38
2810,406	1030	42	10,371	+ 35
11,478	1072	60	11,448	+ 30
12,610	1132	29	12,569	+ 41
13,771	1161	58	13,734	+ 37
14,990	1219	18	14,943	+ 47
16,227	1237	63	16,196	+ 31
17,527	1300	27	17,493	+ 34
18,854	1327	53	18,844	+ 10
20,234	1380	29	20,229	+ 5
21,643	1409	62	21,758	- 115
23,114	1471		23,231	- 117

1) Vgl. H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 2.

In der ersten Kolumne stehen die gemessenen Schwingungszahlen, in der zweiten die Differenzen, in der dritten die zweiten Differenzen, diese sind gleich $2B$ der Deslandreschen Formel, sollten also identisch sein. Nehmen wir an, die Formel gelte, so würden die Schwankungen durch Beobachtungsfehler zu erklären sein. Wir können dann auch ohne Kenntnis der Ordnungszahl x der vorliegenden Linien in folgender Weise das Gesetz prüfen: wir nehmen den Mittelwert aller zweiten Differenzen, er ist 0,044. Wir gehen von der ersten Linie aus und addieren die erste Differenz 0,857 hinzu, so haben wir die zweite Linie; dazu addieren wir $0,857 + 0,044$ und erhalten die dritte Linie; durch Addition von $0,857 + 2 \times 0,044$ finden wir die vierte etc. In dieser Art sind die Zahlen der vierten Kolumne berechnet, während die fünfte die Differenzen Rechnung-Beobachtung gibt. Diese Differenzen zeigen sofort, daß das Gesetz nicht gilt: man kann die positiven Differenzen im Anfang zum Teil verschwinden lassen, wenn man $2B$ etwas größer wählt, dann werden aber die negativen Differenzen am Ende noch größer.

Noch in anderer Weise kann man das Gesetz prüfen: nennt man die Ordnungszahl der ersten Linie x , so ist die der letzten $x + 15$. Wir haben also die beiden Gleichungen

$$Bx^2 + C = 2805,646,$$

$$B(x + 15)^2 + C = 2823,114.$$

Daraus läßt sich, wenn man für B den genaueren Mittelwert 0,02193 einsetzt, x berechnen; man findet $x = 34,1$, d. h. die Linie $1/\lambda = 2805,646$ ist die 34^{te} Linie von der Kante aus.

Aus der letzten Gleichung läßt sich nun auch C , die Schwingungszahl der Kante berechnen: man findet $1/\lambda = 2797,763$; während beobachtet ist: $1/\lambda = 2796,147$. Zusammen ergibt sich, daß das erste Gesetz von Deslandres zwar eine Annäherung an den Bau des hier betrachteten Stückes der Serie gibt, aber nicht streng richtig ist — was übrigens Deslandres selbst zugibt.

Das zweite Gesetz von Deslandres läßt sich ebenso leicht als unrichtig erweisen. Nach ihm sollte der Abstand von Linien gleicher Ordnungszahl in jeder Gruppe von drei

Serien derselben Bande konstant bleiben. Die folgende Tabelle gibt in den drei ersten Kolonnen die Schwingungszahlen von drei Serien, in der vierten und fünften die Differenzen zwischen der ersten und zweiten, bez. ersten und dritten Linie. Man sieht, daß diese Differenzen nicht konstant sind, sondern abnehmen, was ja auch durch das Engerwerden jedes Triplets angezeigt wird.

2800,125	2800,667	2801,274	0,542	1,149
0,780	1,274	1,896	0,495	1,116
1,499	1,973	2,550	0,474	1,051
2,257	2,709	3,256	0,452	0,999
3,043	3,500	3,990	0,457	0,947
3,899	4,301	4,783	0,402	0,884
4,783	5,150	5,646	0,367	0,863
5,646	6,057	6,503	0,411	0,857
6,627	6,990	7,396	0,363	0,769
7,622	7,974	8,369	0,352	0,745
8,653	8,991	9,356	0,338	0,708
9,727	2810,054	2810,406	0,327	0,679
2810,846	11,151	11,478	0,305	0,632
11,995	12,299	12,610	0,304	0,615
13,187	13,474	13,771	0,287	0,584
14,415	14,699	14,990	0,284	0,575
15,685	15,957	16,227	0,272	0,542
16,996	17,261	17,527	0,265	0,531
18,349	18,606	18,854	0,257	0,505
19,741	19,994	20,234	0,253	0,493
21,179	21,411	21,643	0,232	0,464
22,646	22,884	23,114	0,238	0,468
24,167	24,374	24,591	0,207	0,424

Von dem dritten Gesetze Deslandres' habe ich nur den Teil geprüft, der aussagt, daß die Kantenserien ebenfalls identisch seien. Deslandres¹⁾ hat sie schon in Serien geordnet, aber meine genaueren Messungen gestatten eine genauere Prüfung. Man kann die von mir gemessenen Kanten

1) Vgl. H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 2.

nach Deslandres folgendermaßen ordnen (vgl. die nebenstehende Tabelle).

Hier sollten die Differenzen, die vertikal untereinander stehen, identisch sein. Man sieht, daß das nicht der Fall ist, sondern daß die Zahlen von oben nach unten im allgemeinen abnehmen, wenn auch einige Male Abweichungen davon vorkommen, die wohl auf ungenaue Messungen zurückzuführen sind; die Kanten sind eben schwerer zu messen als isolierte Linien; immerhin nehmen die Differenzen von oben nach unten ab: von 161,779 zu 161,611, von 164,633 zu 164,584, von 167,566 zu 167,547, von 170,442 zu 170,264. Also auch dieses Gesetz erweist sich als nicht streng richtig.

Damit soll natürlich nicht gesagt sein, daß Deslandres' Gesetze ohne

Nummer der Serie	52	53	54	55	56	57	58	59
1. Serie						2628.043*	2795.609*	2966.051*
Differenz						167.566	170.442	
2. Serie				2500.957*	2662.736*	2827.399*	2995.061	3165.325*
Differenz				161.779	164.633	167.662	170.264	
3. Serie			2536.050*	2694.934*	2856.728*	3021.390*	3188.877*	
Differenz			158.884	161.794	164.602	167.547		
4. Serie		2567.351*	2723.305		3043.889*	3208.473*		
Differenz		155.954			164.584			
5. Serie	2592.184	2745.359		3059.910*	3221.521*			
Differenz	153.175				161.611			

Wert seien, sie erweisen sich im Gegenteil so nahezu richtig, daß sie praktisch von großer Bedeutung sind. Man könnte z. B. leicht mit Hülfe des angenäherten Gesetzes die Serien rechnerisch weiter nach der Kante oder nach dem Ende zu verfolgen und die entsprechenden beobachteten Linien heraus-suchen. Für solche praktische Zwecke und kurze Extra-polation sind also die Gesetze durchaus brauchbar.

(Eingegangen 1. Februar 1903.)

9. Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik; von A. Einstein.

In einer neulich erschienenen Arbeit habe ich gezeigt, daß die Sätze vom Temperaturgleichgewicht und der Entropiebegriff mit Hilfe der kinetischen Theorie der Wärme hergeleitet werden können. Es drängt sich nun naturgemäß die Frage auf, ob die kinetische Theorie auch wirklich notwendig ist, um jene Fundamente der Wärmetheorie herleiten zu können, oder ob vielleicht bereits Voraussetzungen allgemeinerer Art dazu genügen können. Daß dieses letztere der Fall ist, und durch welche Art von Überlegungen man zum Ziele gelangen kann, soll in dieser Abhandlung gezeigt werden.

§ 1. Über eine allgemeine mathematische Darstellung der Vorgänge in isolierten physikalischen Systemen.

Der Zustand irgend eines von uns betrachteten physikalischen Systems sei eindeutig bestimmt durch sehr viele (n) skalare Größen $p_1, p_2 \dots p_n$, welche wir Zustandsvariablen nennen. Die Änderung des Systems in einem Zeitelement dt ist dann durch die Änderungen $dp_1, dp_2 \dots dp_n$ bestimmt, welche die Zustandsvariablen in jenem Zeitelement erleiden.

Das System sei isoliert, d. h. das betrachtete System stehe mit anderen Systemen nicht in Wechselwirkung. Es ist dann klar, daß der Zustand des Systems in einem bestimmten Zeitmoment in eindeutiger Weise die Veränderung des Systems im nächsten Zeitelement dt , d. h. die Größen $dp_1, dp_2 \dots dp_n$ bestimmt. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit einem System von Gleichungen von der Form:

$$(1) \quad \frac{dp_i}{dt} = \varphi_i(p_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots i = n),$$

wobei die φ eindeutige Funktionen ihrer Argumente sind.

Für ein solches System von linearen Differentialgleichungen existiert im allgemeinen keine Integralgleichung von der Form

$$\psi(p_1 \dots p_n) = \text{konst.},$$

welche die Zeit nicht explizite enthält. Für das Gleichungssystem aber, welches die Veränderungen eines nach außen abgeschlossenen, physikalischen Systems darstellt, müssen wir annehmen, daß mindestens eine solche Gleichung besteht, nämlich die Energiegleichung:

$$E(p_1 \dots p_n) = \text{konst.}$$

Wir nehmen zugleich an, daß keine weitere, von dieser unabhängige Integralgleichung solcher Art vorhanden sei.

§ 2. Über die stationäre Zustandsverteilung unendlich vieler isolierter physikalischer Systeme, welche nahezu gleiche Energie besitzen.

Die Erfahrung zeigt, daß ein isoliertes physikalisches System nach einer gewissen Zeit einen Zustand annimmt, in welchem sich keine wahrnehmbare Größe des Systems mehr mit der Zeit ändert; wir nennen diesen Zustand den stationären. Es wird also offenbar nötig sein, daß die Funktionen q_i eine gewisse Bedingung erfüllen, damit die Gleichungen (1) ein solches physikalisches System darstellen können.

Nehmen wir nun an, daß eine wahrnehmbare Größe stets durch einen zeitlichen Mittelwert einer gewissen Funktion der Zustandsvariablen $p_1 \dots p_n$ bestimmt sei, und daß diese Zustandsvariablen $p_1 \dots p_n$ immer wieder dieselben Wertsysteme mit stets gleichbleibender Häufigkeit annehmen, so folgt aus dieser Bedingung, welche wir zur Voraussetzung erheben wollen, mit Notwendigkeit die Konstanz der Mittelwerte aller Funktionen der Größen $p_1 \dots p_n$; nach dem obigen also auch die Konstanz jeder wahrnehmbaren Größe.

Diese Voraussetzung wollen wir genau präzisieren. Wir betrachten ein physikalisches System, welches durch die Gleichungen (1) dargestellt und dessen Energie E sei, von einem beliebigen Zeitpunkte an die Zeit T hindurch. Denken wir uns ein beliebiges Gebiet Γ der Zustandsvariablen $p_1 \dots p_n$ gewählt, so werden in einem bestimmten Zeitpunkt der Zeit T die Werte der Variablen $p_1 \dots p_n$ in diesem Gebiete Γ gelegen sein, oder sie liegen außerhalb desselben; sie werden also während eines Bruchteiles der Zeit T , welchen wir τ nennen wollen, in dem gewählten Gebiete Γ liegen. Unsere Bedingung lautet dann folgendermaßen: Wenn $p_1 \dots p_n$ Zu-

standsvariable eines physikalischen Systems sind, also eines Systems, welches einen stationären Zustand annimmt, so besitzt die Größe τ/T für $T=\infty$ für jedes Gebiet Γ einen bestimmten Grenzwert. Dieser Grenzwert ist für jedes unendlich kleine Gebiet unendlich klein.

Auf diese Voraussetzung kann man folgende Betrachtung gründen. Seien sehr viele (N) unabhängige physikalische Systeme vorhanden, welche sämtlich durch das nämliche Gleichungssystem (1) dargestellt seien. Wir greifen einen beliebigen Zeitpunkt t heraus und fragen nach der Verteilung der möglichen Zustände unter diesen N Systemen, unter der Voraussetzung, daß die Energie E aller Systeme zwischen E^* und dem unendlich benachbarten Werte $E^* + \delta E^*$ liege. Aus der oben eingeführten Voraussetzung folgt sofort, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zustandsvariablen eines zufällig herausgegriffenen der N Systeme in der Zeit t innerhalb des Gebietes Γ liegen, den Wert

$$\lim_{T=\infty} \frac{\tau}{T} = \text{konst.}$$

habe. Die Zahl der Systeme, deren Zustandsvariable in der Zeit t innerhalb des Gebietes Γ liegen, ist also:

$$N \cdot \lim_{T=\infty} \frac{\tau}{T},$$

also eine von der Zeit unabhängige Größe. Bezeichnet g ein in allen Variablen unendlich kleines Gebiet der Koordinaten $p_1 \dots p_n$, so ist also die Anzahl der Systeme, deren Zustandsvariable zu einer beliebigen Zeit das beliebig gewählte unendlich kleine Gebiet g erfüllen:

$$(2) \quad dN = \varepsilon(p_1 \dots p_n) \int_g dp_1 \dots dp_n.$$

Die Funktion ε gewinnt man, indem man die Bedingung in Zeichen faßt, daß die durch die Gleichung (2) ausgedrückte Zustandsverteilung eine stationäre ist. Es sei im speziellen das Gebiet g so gewählt, daß p_1 zwischen den bestimmten Werten p_1 und $p_1 + dp_1$, p_2 zwischen p_2 und $p_2 + dp_2 \dots p_n$ zwischen p_n und $p_n + dp_n$ gelegen ist, dann ist für die Zeit t

$$dN_t = \varepsilon(p_1 \dots p_n) \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dp_n.$$

wobei der Index von dN die Zeit bezeichnet. Mit Berücksichtigung der Gleichung (1) erhält man ferner für die Zeit $t + dt$ und dasselbe Gebiet der Zustandsvariablen

$$dN_{t+dt} = dN_t - \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial(\epsilon q_r)}{\partial p_r} \cdot dp_1 \dots dp_n \cdot dt.$$

Da aber $dN_t = dN_{t+dt}$ ist, da die Verteilung eine stationäre ist, so ist

$$\sum \frac{\partial(\epsilon q_r)}{\partial p_r} = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$- \sum \frac{\partial q_r}{\partial p_r} = \sum \frac{\partial(\log \epsilon)}{\partial p_r} \cdot q_r = \sum \frac{\partial(\log \epsilon)}{\partial p_r} \cdot \frac{dp_r}{dt} = \frac{d(\log \epsilon)}{dt},$$

wobei $d(\log \epsilon)/dt$ die Veränderung der Funktion $\log \epsilon$ für ein einzelnes System nach der Zeit unter Berücksichtigung der zeitlichen Veränderung der Größen p_r bezeichnet.

Man erhält ferner:

$$\epsilon = e^{-\int dt \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial q_r}{\partial p_r} + \psi(E)} = e^{-n + \psi(E)}.$$

Die unbekannte Funktion ψ ist die von der Zeit unabhängige Integrationskonstante, welche von den Variablen $p_1 \dots p_n$ zwar abhängen, sie jedoch, nach der im § 1 gemachten Voraussetzung, nur in der Kombination, wie sie in der Energie E auftreten, enthalten kann.

Da aber $\psi(E) = \psi(E^*) = \text{konst.}$ für alle N betrachteten Systeme ist, reduziert sich für unseren Fall der Ausdruck für ϵ auf:

$$\epsilon = \text{konst. } e^{-\int dt \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial q_r}{\partial p_r}} = \text{konst. } e^{-n}.$$

Nach dem obigen ist nun:

$$dN = \text{konst. } e^{-n} \int dp_1 \dots dp_n.$$

Der Einfachheit halber führen wir nun neue Zustandsvariablen für die betrachteten Systeme ein; sie mögen mit π , bezeichnet werden. Es ist dann:

$$dN = \frac{e^{-m}}{D(\pi_1 \dots \pi_n)} \int d\pi_1 \dots d\pi_n,$$

wobei das Symbol D die Funktionaldeterminante bedeutet. — Wir wollen nun die neuen Koordinaten so wählen, daß

$$e^{-m} = \frac{D(\pi_1 \dots \pi_n)}{D(p_1 \dots p_n)}$$

werde. Diese Gleichung läßt sich auf unendlich viele Arten befriedigen, z. B. wenn man setzt:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= p_2 \\ \pi_3 &= p_3 \\ &\dots \\ \pi_n &= p_n \end{aligned} \quad \pi_1 = \int e^{-m} \cdot d p_1.$$

Wir erhalten also unter Benutzung der neuen Variablen

$$dN = \text{konst.} \int d\pi_1 \dots d\pi_n.$$

Im folgenden wollen wir uns stets solche Variablen eingeführt denken.

§ 3. Über die Zustandsverteilung eines Systems, welches ein System von relativ unendlich großer Energie berührt.

Wir nehmen nun an, daß jedes der N isolierten Systeme, aus zwei Teilsystemen Σ und σ , welche in Wechselwirkung stehen, zusammengesetzt sei. Der Zustand des Teilsystems Σ möge durch die Werte der Variablen $\Pi_1 \dots \Pi_l$, der Zustand des Systems σ durch die Werte der Variablen $\pi_1 \dots \pi_i$ bestimmt sein. Ferner setze sich die Energie E , welche für jedes System zwischen den Werten E^* und $E^* + \delta E^*$ liegen mag, also bis auf unendlich kleines gleich E^* sein soll, bis auf unendlich kleines, aus zwei Termen zusammen, von denen der erste H nur durch die Werte der Zustandsvariablen von Σ , der zweite η nur durch die der Zustandsvariablen von σ bestimmt sei, sodaß bis auf relativ unendlich kleines gilt:

$$E = H + \eta.$$

Zwei in Wechselwirkung stehende Systeme, welche diese Bedingung erfüllen, nennen wir zwei sich berührende Systeme. Wir setzen noch voraus, daß η gegen H unendlich klein sei.

Für die Anzahl dN_1 der N -Systeme, deren Zustandsvariablen $\Pi_1 \dots \Pi_i$ und $\pi_1 \dots \pi_i$ in den Grenzen zwischen Π_1 und $\Pi_1 + d\Pi_1$, Π_2 und $\Pi_2 + d\Pi_2 \dots \Pi_i$ und $\Pi_i + d\Pi_i$ und π_1 und $\pi_1 + d\pi_1$, π_2 und $\pi_2 + d\pi_2 \dots \pi_i$ und $\pi_i + d\pi_i$ liegen, ergibt sich der Ausdruck:

$$dN_1 = C \cdot d\Pi_1 \dots d\Pi_i \cdot d\pi_1 \dots d\pi_i,$$

wobei C eine Funktion von $E = H + \eta$ sein kann.

Da aber nach der obigen Annahme die Energie eines jeden betrachteten Systems bis auf unendlich kleines den Wert E^* besitzt, so können wir, ohne an dem Resultat etwas zu ändern, C durch konst. $e^{-2hE^*} = \text{konst. } e^{-2h(H+\eta)}$ ersetzen, wobei h eine noch näher zu definierende Konstante bedeutet. Der Ausdruck für dN_1 geht also über in:

$$dN_1 = \text{konst. } e^{-2h(H+\eta)} \cdot d\Pi_1 \dots d\Pi_i \cdot d\pi_1 \dots d\pi_i.$$

Die Anzahl der Systeme, deren Zustandsvariablen π zwischen den angedeuteten Grenzen liegen, während die Werte der Variablen Π keiner beschränkenden Bedingung unterworfen sind, wird sich also in der Form

$$dN_2 = \text{konst. } e^{-2h\eta} \cdot d\pi_1 \dots d\pi_i \int e^{-2hH} d\Pi_1 \dots d\Pi_i$$

darstellen lassen, wobei das Integral über alle Werte der Π auszudehnen ist, denen Werte der Energie H zukommen, welche zwischen $E^* - \eta$ und $E^* + \delta E^* - \eta$ gelegen sind. Wäre die Integration ausgeführt, so hätten wir die Zustandsverteilung der Systeme σ gefunden. Dies ist nun tatsächlich möglich.

Wir setzen:

$$\int e^{-2hH} \cdot d\Pi_1 \dots d\Pi_i = \chi(E),$$

wobei die Integration auf der linken Seite über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist, für welche H zwischen den bestimmten Werten E und $E + \delta E^*$ liegt. Das Integral, welches im Ausdruck dN_2 auftritt, nimmt dann die Form an

$$\chi(E^* - \eta),$$

oder, da η gegen E^* unendlich klein ist:

$$\chi(E^*) - \chi'(E^*) \cdot \eta.$$

Läßt sich also h so wählen, daß $\chi'(E^*) = 0$, so reduziert sich das Integral auf eine vom Zustand von σ unabhängige Größe.

Es läßt sich bis auf unendlich kleines setzen:

$$\chi(E) = e^{-2hE} \int d\Pi_1 \dots d\Pi_l = e^{-2hE} \cdot \omega(E),$$

wo die Grenzen der Integration gleich sind wie oben, und ω eine neue Funktion von E bedeutet.

Die Bedingung für h nimmt nun die Form an:

$$\chi'(E^*) = e^{-2hE^*} \cdot \{\omega'(E^*) - 2h\omega(E^*)\} = 0,$$

folglich:

$$h = \frac{1}{2} \frac{\omega'(E^*)}{\omega(E^*)}.$$

Es sei h in dieser Weise gewählt, dann wird der Ausdruck für dN_s die Form annehmen:

$$(3) \quad dN_s = \text{konst.} \cdot e^{-2h\epsilon_s} d\pi_1 \dots d\pi_l.$$

Bei geeigneter Wahl der Konstanten stellt dieser Ausdruck die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß die Zustandsvariablen eines Systems, welches ein anderes von relativ unendlich großer Energie berührt, innerhalb der angedeuteten Grenzen liegen. Die Größe h hängt dabei lediglich vom Zustande jenes Systems Σ von relativ unendlich großer Energie ab.

§ 4. Über absolute Temperatur und Wärmegleichgewicht.

Der Zustand des Systems σ hängt also lediglich von der Größe h ab, und diese lediglich vom Zustande des Systems Σ . Wir nennen die Größe $1/4 h\kappa = T$ die absolute Temperatur des Systems Σ , wobei κ eine universelle Konstante bedeutet.

Nennen wir das System σ „Thermometer“, so können wir sofort die Sätze aussprechen:

1. Der Zustand des Thermometers hängt nur ab von der absoluten Temperatur des Systems Σ , nicht aber von der Art der Berührung der Systeme Σ und σ .

2. Erteilen zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 einem Thermometer σ gleichen Zustand im Falle der Berührung, so besitzen sie gleiche absolute Temperatur, und erteilen folglich

einem anderen Thermometer σ' im Falle der Berührung ebenfalls gleichen Zustand.

Seien ferner zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 in Berührung miteinander und Σ_1 außerdem in Berührung mit einem Thermometer σ . Es hängt dann die Zustandsverteilung von σ lediglich von der Energie des Systems $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$, bez. von der Größe $h_{1,2}$ ab. Denkt man sich die Wechselwirkung von Σ_1 und Σ_2 unendlich langsam abnehmend, so ändert sich dadurch der Ausdruck für die Energie $H_{1,2}$ des Systems $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ nicht, wie leicht aus unserer Definition von der Berührung und dem im letzten Paragraphen aufgestellten Ausdruck für die Größe h zu ersehen ist. Hat endlich die Wechselwirkung ganz aufgehört, so hängt die Zustandsverteilung von σ , welche sich während der Trennung von Σ_1 und Σ_2 nicht ändert, nunmehr von Σ_1 ab, also von der Größe h_1 ; wobei der Index die Zugehörigkeit zum System Σ_1 allein andeuten soll. Es ist also:

$$h_1 = h_{1,2}.$$

Durch eine analoge Schlußweise hätte man erhalten können:

$$h_2 = h_{1,2},$$

also

$$h_1 = h_2,$$

oder in Worten: Trennt man zwei sich berührende Systeme Σ_1 und Σ_2 , welche ein isoliertes System $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ von der absoluten Temperatur T bilden, so besitzen nach der Trennung die nunmehrigen isolierten Systeme Σ_1 und Σ_2 gleiche Temperatur. Wir denken uns ein gegebenes System mit einem idealen Gase in Berührung. Dieses Gas sei unter dem Bilde der kinetischen Gastheorie vollkommen darstellbar. Als System σ betrachten wir ein einziges einatomiges Gasmolekül von der Masse μ , dessen Zustand durch seine rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und die Geschwindigkeiten ξ, η, ζ vollkommen bestimmt sei. Wir erhalten dann nach § 3 für die Wahrscheinlichkeit, daß die Zustandsvariablen dieses Moleküles zwischen den Grenzen x und $x + dx \dots \zeta$ und $\zeta + d\zeta$ liegen, den bekannten Maxwell'schen Ausdruck:

$$dW = \text{konst. } e^{-h\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \cdot dx \dots d\zeta.$$

Daraus erhält man durch Integration für den Mittelwert der lebendigen Kraft dieses Moleküles

$$\frac{\mu}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{4h}.$$

Die kinetische Gastheorie lehrt aber, daß diese Größe bei konstantem Volumen des Gases proportional dem vom Gase ausgeübten Drucke ist. Dieser ist definitionsgemäß der in der Physik als absolute Temperatur bezeichneten Größe proportional. Die von uns als absolute Temperatur bezeichnete Größe ist also nichts anderes als die mit dem Gasthermometer gemessene Temperatur eines Systems.

§ 5. Über unendlich langsame Prozesse.

Wir haben bisher nur Systeme ins Auge gefaßt, welche sich im stationären Zustande befanden. Wir wollen nun auch Veränderungen von stationären Zuständen untersuchen, jedoch nur solche, welche sich so langsam vollziehen, daß die in einem beliebigen Momente herrschende Zustandsverteilung von der stationären nur unendlich wenig abweicht; oder genauer gesprochen, daß in jedem Momente die Wahrscheinlichkeit, daß die Zustandsvariablen in einem gewissen Gebiete G liegen, bis auf unendlich kleines durch die oben gefundene Formel dargestellt sei. Eine solche Veränderung nennen wir einen unendlich langsamen Prozeß.

Wenn die Funktionen q , (Gleichung (1)) und die Energie E eines Systems bestimmt sind, so ist nach dem vorigen auch seine stationäre Zustandsverteilung bestimmt. Ein unendlich langsamer Prozeß wird also dadurch bestimmt sein, daß sich entweder E ändert oder die Funktionen q , die Zeit explizite enthalten, oder beides zugleich, jedoch so, daß die entsprechenden Differentialquotienten nach der Zeit sehr klein sind.

Wir haben angenommen, daß die Zustandsvariablen eines isolierten Systems sich nach Gleichungen (1) verändern. Umgekehrt wird aber nicht stets, wenn ein System von Gleichungen (1) existiert, nach denen sich die Zustandsvariablen eines Systems ändern, dieses System ein isoliertes sein müssen. Es kann nämlich der Fall eintreten, daß ein betrachtetes System derart unter dem Einfluß anderer Systeme sich be-

findet, daß dieser Einfluß lediglich von Funktionen von veränderlichen Koordinaten beeinflussender Systeme abhängt, die sich bei konstanter Zustandsverteilung der beeinflussenden Systeme nicht ändern. In diesem Falle wird die Veränderung der Koordinaten p , des betrachteten Systems auch durch ein System von der Form der Gleichungen (1) darstellbar sein. Die Funktionen φ , werden aber dann nicht nur von der physikalischen Natur des betreffenden Systems, sondern auch von gewissen Konstanten abhängen, welche durch die beeinflussenden Systeme und deren Zustandsverteilungen definiert sind. Wir nennen diese Art von Beeinflussung des betrachteten Systems eine *adiabatische*. Es ist leicht einzusehen, daß für die Gleichungen (1) auch in diesem Falle eine Energiegleichung existiert, solange die Zustandsverteilungen der adiabatisch beeinflussenden Systeme sich nicht ändern. Ändern sich die Zustände adiabatisch beeinflussender Systeme, so ändern sich die Funktionen φ , des betrachteten Systems explizite mit der Zeit, wobei in jedem Moment die Gleichungen (1) ihre Gültigkeit behalten. Wir nennen eine solche Änderung der Zustandsverteilung des betrachteten Systems eine *adiabatische*.

Wir betrachten nun eine zweite Art von Zustandsveränderungen eines Systems Σ . Es liege ein System Σ zu Grunde, welches adiabatisch beeinflusst sein kann. Wir nehmen an, daß das System Σ in der Zeit $t=0$ mit einem System P von verschiedener Temperatur in solche Wechselwirkung trete, wie wir sie oben als „Berührung“ bezeichnet haben, und entfernen das System P nach der zum Ausgleich der Temperaturen von Σ und P nötigen Zeit. Es hat sich dann die Energie von Σ geändert. Während des Prozesses sind die Gleichungen (1) von Σ ungültig, vor und nach dem Prozesse aber gültig, wobei die Funktionen φ , vor und nach dem Prozesse dieselben sind. Einen solchen Prozeß nennen wir einen „isopyknischen“ und die Σ zugeführte Energie „zugeführte Wärme“.

Bis anfang relativ unendlich kleines läßt sich nun offenbar jeder unendlich langsame Prozeß eines Systems Σ aus einer Aufeinanderfolge von unendlich kleinen adiabatischen und isopyknischen Prozessen konstruieren, sodaß wir, um einen Gesamtüberblick zu erhalten, nur die letzteren zu studieren haben.

§ 6. Über den Entropiebegriff.

Es liege ein physikalisches System vor, dessen momentaner Zustand durch die Werte der Zustandsvariablen $p_1 \dots p_n$ vollkommen bestimmt sei. Dieses System mache einen kleinen, unendlich langsamen Prozeß durch, indem die das System adiabatisch beeinflussenden Systeme eine unendlich kleine Zustandsveränderung erfahren, und außerdem dem betrachteten System durch berührende Systeme Energie zugeführt wird. Wir tragen den adiabatisch beeinflussenden Systemen dadurch Rechnung, daß wir festsetzen, die Energie E des betrachteten Systems sei außer von $p_1 \dots p_n$ noch von gewissen Parametern $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ abhängig, deren Werte durch die Zustandsverteilungen der das System adiabatisch beeinflussenden Systeme bestimmt seien. Bei rein adiabatischen Prozessen gilt in jedem Moment ein Gleichungssystem (1), dessen Funktionen q_r außer von den Koordinaten p_r auch von den langsam veränderlichen Größen λ abhängen; es gilt dann auch bei adiabatischen Prozessen in jedem Moment die Energiegleichung, welche die Form besitzt:

$$\sum \frac{\partial E}{\partial p_r} q_r = 0.$$

Wir untersuchen nun die Energiezunahme des Systems während eines beliebigen unendlich kleinen, unendlich langsamen Prozesses.

Für jedes Zeitelement dt des Prozesses gilt:

$$(4) \quad dE = \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d\lambda + \sum \frac{\partial E}{\partial p_r} dp_r.$$

Für einen unendlich kleinen isopyknischen Prozeß verschwinden in jedem Zeitelement sämtliche $d\lambda$, mithin auch das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung. Da aber dE nach dem vorigen Paragraphen für einen isopyknischen Prozeß als zugeführte Wärme zu betrachten ist, so ist für einen solchen Prozeß die zugeführte Wärme dQ durch den Ausdruck:

$$dQ = \sum \frac{\partial E}{\partial p_r} dp_r$$

dargestellt.

Für einen adiabatischen Prozeß aber, während dessen stets die Gleichungen (1) gelten, ist nach der Energiegleichung

$$\sum \frac{\partial E}{\partial p_r} dp_r = \sum \frac{\partial E}{\partial p_r} q_r dt = 0.$$

Andererseits ist nach dem vorigen Paragraphen für einen adiabatischen Prozeß $dQ = 0$, sodaß auch für einen adiabatischen Prozeß

$$dQ = \sum \frac{\partial E}{\partial p_r} dp_r$$

gesetzt werden kann. Diese Gleichung muß also für einen beliebigen Prozeß in jedem Zeitelement als gültig betrachtet werden. Die Gleichung (4) geht also über in

$$(4') \quad dE = \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d\lambda + dQ.$$

Dieser Ausdruck stellt auch bei veränderten Werten von $d\lambda$ und von dQ die während des ganzen unendlich kleinen Prozesses stattfindende Veränderung der Energie des Systems dar.

Am Anfang und am Ende des Prozesses ist die Zustandsverteilung des betrachteten Systems eine stationäre und wird, wenn das System vor und nach dem Prozesse mit einem Systeme von relativ unendlich großer Energie in Berührung steht, welche Annahme nur von formaler Bedeutung ist, durch die Gleichung definiert von der Form:

$$\begin{aligned} dW &= \text{konst. } e^{-2hE} \cdot dp_1 \dots dp_n \\ &= e^{c-2hE} \cdot dp_1 \dots dp_n, \end{aligned}$$

wobei dW die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß die Werte der Zustandsvariablen des Systems in einem beliebig herausgegriffenen Zeitmoment zwischen den angedeuteten Grenzen liegen. Die Konstante c ist durch die Gleichung definiert:

$$(5) \quad \int e^{c-2hE} \cdot dp_1 \dots dp_n = 1,$$

wobei die Integration über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist.

Gelte Gleichung (5) speziell vor dem betrachteten Prozesse, so gilt nach demselben:

$$(5') \quad \int e^{(c+dE)-2(h+dH)} \left(E + \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d\lambda \right) \cdot dp_1 \dots dp_n = 1$$

und aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\int (dc - 2Edh - 2h \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} \cdot d\lambda) \cdot e^{c-2hE} \cdot dp_1 \dots dp_n = 0,$$

oder, da bei der Integration der Klammerausdruck als eine Konstante gelten kann, da die Energie E des Systems vor und nach dem Prozesse sich nie merklich von einem bestimmten Mittelwerte unterscheidet, und unter Berücksichtigung von Gleichung (5):

$$(5'') \quad d c - 2 E d h - 2 h \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d \lambda = 0.$$

Nach Gleichung (4') ist aber:

$$- 2 h d E + 2 h \sum \frac{\partial E}{\partial \lambda} d \lambda + 2 h d Q = 0$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$2 h \cdot d Q = d (2 h E - c)$$

oder, da $1/4 h = \kappa \cdot T$

$$\frac{d Q}{T} = d \left(\frac{E}{T} - 2 \kappa c \right) = d S.$$

Diese Gleichung sagt aus, das $d Q/T$ ein vollständiges Differential einer Größe ist, welche wir die Entropie S des Systems nennen wollen. Unter Berücksichtigung von Gleichung (5) erhält man:

$$S = 2 \kappa (2 h E - c) = \frac{E}{T} + 2 \kappa \log \int e^{-2 h E} d p_1 \dots d p_n,$$

wobei die Integration über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist.

§ 7. Über die Wahrscheinlichkeit von Zustandsverteilungen.

Um den zweiten Hauptsatz in seiner allgemeinsten Form herzuleiten, müssen wir die Wahrscheinlichkeit von Zustandsverteilungen untersuchen.

Wir betrachten eine sehr große Zahl (N) isolierte Systeme, welche alle durch das nämliche Gleichungssystem (1) darstellbar seien, und deren Energie bis auf unendlich kleines übereinstimme. Die Zustandsverteilung dieser N Systeme läßt sich dann jedenfalls darstellen durch eine Gleichung von der Form:

$$(2') \quad d N = \varepsilon(p_1 \dots p_n, t) d p_1 \dots d p_n,$$

wobei ε im allgemeinen von den Zustandsvariablen $p_1 \dots p_n$ und außerdem von der Zeit explizite abhängt. Die Funktion ε charakterisiert hierbei die Zustandsverteilung vollständig.

Aus § 2 geht hervor, daß, wenn die Zustandsverteilung konstant ist, was bei sehr großen Werten von t nach unseren

Voraussetzungen stets der Fall ist, $\varepsilon = \text{konst.}$ sein muß, sodaß also für eine stationäre Zustandsverteilung

$$dN = \text{konst.} dp_1 \dots dp_n$$

ist.

Daraus folgt sofort, daß die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß die Werte der Zustandsvariablen eines zufällig herausgegriffenen der N Systeme, in dem unendlich kleinen, innerhalb der angenommenen Energiegrenzen gelegenen Gebiete g der Zustandsvariablen gelegen sind, der Ausdruck:

$$dW = \text{konst.} \int_g dp_1 \dots dp_n.$$

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: Teilt man das ganze in Betracht kommende, durch die angenommenen Energiegrenzen bestimmte Gebiet der Zustandsvariablen in l Teilgebiete $g_1, g_2 \dots g_l$, derart, daß

$$\int_{g_1} = \int_{g_2} = \dots = \int_{g_l},$$

und bezeichnet man mit W_1, W_2 etc. die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Werte der Zustandsvariablen des beliebig herausgegriffenen Systems in einem gewissen Zeitpunkt innerhalb $g_1, g_2 \dots$ liegen, so ist

$$W_1 = W_2 = \dots = W_l = \frac{1}{l}.$$

Das momentane Zugehören des betrachteten Systems zu einem bestimmten dieser Gebiete $g_1 \dots g_l$ ist also genau ebenso wahrscheinlich, als das Zugehören zu irgend einem anderen dieser Gebiete.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von N betrachteten Systeme zu einer zufällig herausgegriffenen Zeit ε_1 zum Gebiete g_1, ε_2 zum Gebiete $g_2 \dots \varepsilon_l$ zum Gebiete g_l gehören, ist also

$$W = \left(\frac{1}{l}\right)^N \frac{N!}{\varepsilon_1! \varepsilon_2! \dots \varepsilon_l!},$$

oder auch, da $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ als sehr große Zahlen zu denken sind:

$$\log W = \text{konst.} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=l} \varepsilon \log \varepsilon.$$

Ist l groß genug, so kann man hierfür ohne merklichen Fehler setzen:

$$\log W = \text{konst.} - \int \varepsilon \log \varepsilon \, dp_1 \dots dp_n.$$

In dieser Gleichung bedeutet W die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die bestimmte, durch die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_l$, bez. durch eine bestimmte Funktion ε von $p_1 \dots p_n$ gemäß Gleichung (2') ausgedrückte Zustandsverteilung zu einer bestimmten Zeit herrscht.

Wäre in dieser Gleichung $\varepsilon = \text{konst.}$, d. h. von den p_r unabhängig zwischen den betrachteten Energiegrenzen, so wäre die betrachtete Zustandsverteilung stationär, und, wie leicht zu beweisen, der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit W der Zustandsverteilung ein Maximum. Ist ε von den Werten der p_r abhängig, so läßt sich zeigen, daß der Ausdruck für $\log W$ für die betrachtete Zustandsverteilung kein Extremum besitzt, d. h. es gibt dann von der betrachteten Zustandsverteilung unendlich wenig verschiedene, für welche W größer ist.

Verfolgen wir die betrachteten N Systeme eine beliebige Zeit hindurch, so wird sich die Zustandsverteilung, also auch W beständig mit der Zeit ändern, und wir werden anzunehmen haben, daß immer wahrscheinlichere Zustandsverteilungen auf unwahrscheinliche folgen werden, d. h. daß W stets zunimmt, bis die Zustandsverteilung konstant und W ein Maximum geworden ist.

In den folgenden Paragraphen wird gezeigt, daß aus diesem Satze der zweite Hauptsatz der Thermodynamik gefolgt werden kann.

Zunächst ist:

$$-\int \varepsilon' \log \varepsilon' \, dp_1 \dots dp_n \geq -\int \varepsilon \log \varepsilon \, dp_1 \dots dp_n,$$

wobei durch die Funktion ε die Zustandsverteilung der N Systeme zu einer gewissen Zeit t , durch die Funktion ε' die Zustandsverteilung zu einer gewissen späteren Zeit t' bestimmt, und die Integration beiderseits über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist. Wenn ferner die Größen $\log \varepsilon$ und $\log \varepsilon'$ der

einzelnen unter den N Systemen sich nicht merklich von einander unterscheiden, so geht, da

$$\int \epsilon dp_1 \dots dp_n = \int \epsilon' dp_1 \dots dp_n = N,$$

die letzte Gleichung über in:

$$(6) \quad -\log \epsilon' \geq -\log \epsilon.$$

§ 8. Anwendung der gefundenen Resultate auf einen bestimmten Fall.

Wir betrachten eine endliche Zahl von physikalischen Systemen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, welche zusammen ein isoliertes System bilden, welches wir Gesamtsystem nennen wollen. Die Systeme $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ sollen thermisch nicht merklich in Wechselwirkung stehen, wohl aber können sie sich adiabatisch beeinflussen. Die Zustandsverteilung eines jeden der Systeme $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, die wir Teilsysteme nennen wollen, sei bis auf unendlich kleines eine stationäre. Die absoluten Temperaturen der Teilsysteme können beliebig und voneinander verschieden sein.

Die Zustandsverteilung des Systems σ_1 wird sich nicht merklich von derjenigen Zustandsverteilung unterscheiden, welche gelten würde, wenn σ_1 mit einem physikalischen System von derselben Temperatur in Berührung stände. Wir können daher dessen Zustandsverteilung durch die Gleichung darstellen:

$$dw_1 = e^{\epsilon_{(1)} - 2h_{(1)} E_{(1)}} \int_g dp_1^{(1)} \dots dp_n^{(1)},$$

wobei die Indizes (1) die Zugehörigkeit zum Teilsystem σ_1 andeuten sollen.

Analoge Gleichungen gelten für die übrigen Teilsysteme. Da die augenblicklichen Werte der Zustandsvariablen der einzelnen Teilsysteme von denen der anderen unabhängig sind, so erhalten wir für die Zustandsverteilung des Gesamtsystems eine Gleichung von der Form:

$$(7) \quad dw = dw_1 \dots dw_r = e^{\sum \epsilon_r - 2h_r E_r} \int_g dp_1 \dots dp_n,$$

wobei die Summation über alle Systeme, die Integration über das beliebige in allen Variablen des Gesamtsystems unendlich kleine Gebiet g zu erstrecken ist.

Wir nehmen nun an, daß die Teilsysteme $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ nach einer gewissen Zeit in beliebige Wechselwirkung zueinander treten, bei welchem Prozesse aber das Gesamtsystem stets ein isoliertes bleiben möge. Nach Verlauf einer gewissen Zeit möge ein Zustand des Gesamtsystems eingetreten sein, bei welchem die Teilsysteme $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ einander thermisch nicht beeinflussen und bis auf unendlich kleines sich im stationären Zustand befinden.

Es gilt dann für die Zustandsverteilung des Gesamtsystems eine Gleichung, welche der vor dem Prozesse gültigen vollkommen analog ist:

$$(7') \quad dw' = dw'_1 \cdot dw'_2 \dots = e^{\sum (\epsilon'_r - 2h'_r E'_r)} \int dp_1 \dots dp_n.$$

Wir betrachten nun N solcher Gesamtsysteme. Für jedes derselben gelte bis auf unendlich kleines zur Zeit t die Gleichung (7), zur Zeit t' die Gleichung (7'). Es wird dann die Zustandsverteilung der betrachteten N Gesamtsysteme zu den Zeiten t und t' gegeben sein durch die Gleichungen:

$$dN_t = N \cdot e^{\sum (\epsilon_r - 2h_r E_r)} \cdot dp_1 \dots dp_n.$$

$$dN_{t'} = N \cdot e^{\sum (\epsilon'_r - 2h'_r E'_r)} \cdot dp_1 \dots dp_n.$$

Auf diese beiden Zustandsverteilungen wenden wir nun die Resultate des vorigen Paragraphen an. Es sind hier sowohl die

$$\epsilon = N \cdot e^{\sum (\epsilon_r - 2h_r E_r)}$$

als auch die

$$\epsilon' = N \cdot e^{\sum (\epsilon'_r - 2h'_r E'_r)}$$

für die einzelnen der N Systeme nicht merklich verschieden, sodaß wir Gleichung (6) anwenden können, welche liefert

$$\sum (2h'E' - \epsilon') \geq \sum (2hE - \epsilon),$$

oder indem man beachtet, daß die Größen $2h_1 E_1 - \epsilon_1, 2h_2 E_2 - \epsilon_2, \dots$ nach § 6 bis auf eine universelle Konstante mit den Entropien $S_1, S_2 \dots$ der Teilsysteme übereinstimmen:

$$(8) \quad S'_1 + S'_2 + \dots \geq S_1 + S_2 + \dots,$$

d. h. die Summe der Entropien der Teilsysteme eines isolierten Systems ist nach einem beliebigen Prozesse gleich oder größer als die Summe der Entropien der Teilsysteme vor dem Prozesse.

§ 9. Herleitung des zweiten Hauptsatzes.

Es liege nun ein isoliertes Gesamtsystem vor, dessen Teilsysteme W , M und $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ heißen mögen. Das System W , welches wir Wärmereservoir nennen wollen, besitze gegen das System M (Maschine) eine unendlich große Energie. Ebenso sei die Energie der miteinander in adiabatischer Wechselwirkung stehenden Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ gegen diejenige der Maschine M unendlich groß. Wir nehmen an, daß die sämtlichen Teilsysteme $M, W, \Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ sich im stationären Zustand befinden.

Es durchlaufe nun die Maschine M einen beliebigen Kreisprozeß, wobei sie die Zustandsverteilungen der Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ durch adiabatische Beeinflussung unendlich langsam ändere, d. h. Arbeit leiste, und von dem Systeme W die Wärmemenge Q aufnehme. Am Ende des Prozesses wird dann die gegenseitige adiabatische Beeinflussung der Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ eine andere sein als vor dem Prozesse. Wir sagen, die Maschine M hat die Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt.

Wir berechnen nun die Zunahme der Entropie der einzelnen Teilsysteme, welche bei dem betrachteten Prozeß eintritt. Die Zunahme der Entropie des Wärmereservoirs W beträgt nach den Resultaten des § 6 $-Q/T$, wenn T die absolute Temperatur bedeutet. Die Entropie von M ist vor und nach dem Prozeß dieselbe, da das System M einen Kreisprozeß durchlaufen hat. Die Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ ändern ihre Entropie während des Prozesses überhaupt nicht, da diese Systeme nur unendlich langsame adiabatische Beeinflussung erfahren. Die Entropievermehrung $S' - S$ des Gesamtsystems erhält also den Wert

$$S' - S = -\frac{Q}{T}.$$

Da nach dem Resultate des vorigen Paragraphen diese Größe $S' - S$ stets ≥ 0 ist, so folgt

$$Q \leq 0.$$

Diese Gleichung spricht die Unmöglichkeit der Existenz eines Perpetuum mobile zweiter Art aus.

Bern, Januar 1903.

(Eingegangen 26. Januar 1903.)

**10. Beiträge zur Kenntnis von der Elastizität
der Metalle;
von G. Angenheister.**

(Auszug aus der Inaugural-Dissertation, Berlin 1902.)

In der nachstehenden Untersuchung werden folgende Fragen behandelt:

1. Durch Anwendung verschiedener irreversibler Prozesse gelingt es, die Metalle bei derselben Temperatur in verschiedenen Zuständen der Dichte zu erhalten. Es fragt sich, in welcher Weise die Änderung der Dichte die Elastizität der Metalle beeinflußt.

2. Welchen Gang zeigen die Elastizitätskonstanten und ihre Temperaturkoeffizienten bei Legierungen aus zwei Metallen *A* und *B*, wenn der Gehalt an *B* von 0—100 Proz. gesteigert wird.

3. Cl. Schaefer¹⁾ fand, daß der Elastizitätsmodul und der Torsionsmodul sich zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur der flüssigen Luft linear ändern. Unter Voraussetzung, daß dieser lineare Zusammenhang bis zu höheren Temperaturen bestehen bleibt, berechnet er die Temperatur, bei welcher die Elastizitätszahl ($\mu = \frac{\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdilatation}}$) gleich $\frac{1}{2}$ wird und fand diese dem Schmelzpunkt nahe liegend. Es soll nun untersucht werden, wie sich in dieser Beziehung Legierungen verhalten.

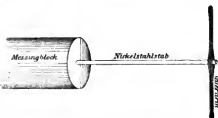
In theoretischer Beziehung wird die Elastizität eines festen Körpers am besten durch den Modul der Starrheit (Torsionsmodul) und durch die Volumenelastizität charakterisiert. Experimentell wurden der Elastizitätsmodul *E* und der Torsionsmodul *F* bestimmt. Daraus wurde die Elastizitätszahl $\mu = \frac{E}{2F} - 1$ und die Volumenelastizität $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ berechnet.

1) Cl. Schaefer, Inaug.-Diss. Bonn 1900.

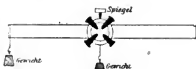
Apparat und Methode.

I.

Zur Beantwortung der ersten Frage wurden zylindrische Stäbe, die ungefähr 5 mm dick und 250 mm lang waren, mit Hülfe der statischen Methode untersucht. Sie wurden in einem Messingblock (Fig. 1) festgelötet. Der Messingblock wurde mittels eines eisernen Schraubstocks an einen Eichentisch geklemmt. Das freie Stabende trug einen zur Stabachse senkrechten Querarm aus Messing, der in der Mitte durchbohrt war und mit vier festen spitzen Stahlschrauben an dem Stabende festgeklemmt wurde. Die Stahlschrauben faßten dabei in vier kleine Löcher, die in einem zur Stabachse senkrechten Querschnitt lagen. Auf



Apparat von oben gesehen.



Querarm.

Fig. 1.

dem Querarm war in der Mitte ein drehbarer Spiegel angebracht (vgl. Fig. 1). Bei der Messung des Elastizitätsmoduls fiel die Spiegelebene mit der Ebene der vier Löcher zusammen. Die Belastung wirkte senkrecht unter der Angriffsstelle des Querarmes. Bei der Messung des Torsionsmoduls war die Spiegelebene um 90° um ihre Vertikalachse gedreht und lag jetzt mit der Stabachse in derselben Vertikalebene. Die Belastung wirkte jetzt am Ende des Querarmes. Die durch die jedesmalige Belastung bewirkte Drehung der Spiegelebene wurde mit Fernrohr und Skala gemessen. Stab und Querarm wurden vor der Messung horizontal gerichtet.

Bezeichnet P das wirkende Gewicht, R den Radius des Stabes, l die Länge des Stabes, L die Länge des Querarmes, φ den Torsionswinkel, Ψ den Drehungswinkel des Endquer-

schnittes bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls, so ist der Torsionsmodul

$$F = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\varphi} P \cdot l \cdot \frac{L}{R^4}$$

und der Elastizitätsmodul

$$E = \frac{2 P R}{R^4 \pi \operatorname{tg} \Phi}.$$

Für die in Betracht kommenden Winkel kann ohne merklichen Fehler im Resultat gesetzt werden

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{A},$$

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2 A},$$

ebeuso

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{a'}{2 A'},$$

wenn a und A , sowie a' und A' die entsprechenden Skalenausschläge und Skalenabstände bezeichnen.

Die Dichte der Stäbe wurde mittels eines länglichen Pyknometers bestimmt.

II. und III.

Zur Beantwortung der zweiten Frage wurden Drähte, die ungefähr 150 mm lang und 0,29 mm dick waren, untersucht. Der Elastizitätsmodul wurde durch Dehnung, der Torsionsmodul mittels Schwingungen bestimmt.

Benutzt wurde der Apparat, dessen sich Schaefer¹⁾ bei seinen Messungen bediente.

Bei der Bestimmung des Torsionsmoduls war die Anordnung wie dort. Die Schwingungen wurden merklich isochron befunden. Gegen Störungen durch Luftzug war das schwingende System durch äußere Hüllen geschützt. Es wurde erst die Schwingungsdauer bei ursprünglichem, dann bei vermehrtem Trägheitsmoment gemessen. Bezeichnet T die erste, T' die zweite Schwingungsdauer, K' das hinzugefügte Trägheitsmoment, so ist

$$F = \frac{0,0006405 K' l}{r^4 (T'^2 - T^2)} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$

1) Cl. Schaefer, l. c.

Bei der Messung des Elastizitätsmoduls durch Dehnung wurde die Versuchsanordnung von Schaefer durch eine der von Katzenelson benutzten ähnliche ersetzt.

In eine Platte *a* (Fig. 2) eines hölzernen Dreifußes von massivem Eichenholz war ein Messingstab *b*, der am Ende eine Klemmvorrichtung trug, angebracht. In dieselbe wurden die zu untersuchenden Drähte mit dem oberen Ende eingeklemmt. Zu dem

Zweck waren die Drähte an beiden Enden in ein Ansatzstück eingelötet, welches letztere in die Klemmvorrichtung geschoben und festgeklemmt werden konnte. Über das Ansatzstück am unteren Ende der Drähte wurde ebenfalls eine

Klemmvorrichtung geschoben, die am anderen Ende mit einer kreisförmigen Platte versehen war. Auf letztere wurde mit Stiften der Aluminiumzylinder *d* befestigt, in dessen

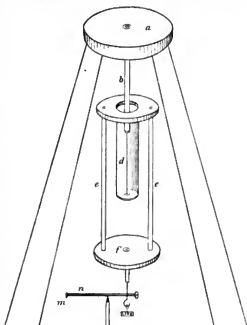


Fig. 2.

Wandungen sich mehrere Löcher befanden. Mit dem Zylinder war durch ein Gestänge *e* die Holzplatte *f* verbunden. Durch die Mitte der Holzplatte ging ein 4 mm starker Messingstift, an dem ein 1 mm starker Stahldraht festgelötet war. Der Stahldraht wurde mittels einer Schraube in dem kürzeren Arm eines Hebels festgeklemmt, der sich um eine horizontale Achse drehen konnte. Der andere Hebelarm *n* trug an seinem Ende einen festen Spiegel *m*. Das nach unten überstehende Ende des im Hebelarm festgeklebten Stahldrahtes trug einen Haken zum Anhängen der Gewichte. Vor dem Ankleben

Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls wurde benutzt

$$E = \frac{P}{r^3 \pi} \frac{l}{\lambda},$$

wo P das wirkende Gewicht, l die Länge und r der Radius des Drahtes ist.

Die Beobachtungen wurden angestellt bei der Temperatur der flüssigen Luft und bei Zimmertemperatur. Die flüssige Luft befand sich in einer Dewarschen Vakuumflasche, in welche der Aluminiumzylinder eintauchte, sodaß die Flüssigkeit ihn ausfüllte und den zu untersuchenden Draht umgab.

Die Änderungen des Elastizitätsmoduls und des Torsionsmoduls mit der Temperatur wurden folgendermaßen berechnet:

$$\left. \begin{array}{l} E_t = \text{Elastizitätsmodul} \\ l_t = \text{Länge des Drahtes} \\ r_t = \text{Radius des Drahtes} \\ \lambda_t = \text{Verlängerung des Drahtes} \\ F_t = \text{Torsionsmodul} \\ T'_t, T_t = \text{Schwingungsdauern, deren Differenz von der} \\ \quad \text{Vergrößerung des Trägheitsmoments herrühren} \end{array} \right\} \text{bei Zimmertemperatur}$$

Bezeichnen $E_0, l_0, r_0, \lambda_0, F_0, T'_0, T_0$ die entsprechenden Größen bei der Temperatur der flüssigen Luft, so ist die Änderung in Prozenten

$$\Delta E = 100 \cdot \frac{E_t - E_0}{E_t} = 100 \left[1 - \frac{\lambda_t}{\lambda_0} (1 + \alpha \Delta t) \right],$$

$$\Delta F = 100 \cdot \frac{F_t - F_0}{F_t} = 100 \left[1 - \frac{T'^2_t - T'^2_0}{T_0^2 - T_0^2} (1 + 3 \alpha \Delta t) \right],$$

wenn α den linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten und Δt das Temperaturintervall bedeutet. Wird ΔE und ΔF negativ, so wird E und F mit abnehmender Temperatur größer. Bezeichnen a und b die Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls und des Torsionsmoduls, dann ist

$$\mu_0 = (1 + \mu_t) \frac{1 - a \Delta t}{1 - b \Delta t} - 1,$$

$$k_0 = \frac{E_0}{3(1 - 2\mu_0)}.$$

Da k_t bekannt ist, läßt sich Δk berechnen.

Bezeichnet x die Differenz zwischen der Zimmertemperatur und der Temperatur, bei der $\mu = \frac{1}{2}$, so berechnet sich x unter

der Annahme, daß E und F sich linear mit der Temperatur ändern folgendermaßen: .

$$\frac{1}{2} = (1 + \mu_t) \frac{1 - a x}{1 - b x} - 1,$$

$$x = \frac{1 - 2 \mu_t}{3 b - 2 a (1 + \mu_t)}.$$

Beobachtungen.

I.

Irreversible Prozesse, durch welche die Molekularstruktur und Dichte der Metalle geändert wird, sind das Abkühlen von Nickelstahl (25 Proz. Ni) bis zur Temperatur der flüssigen Luft, das Härten von Stahl, das Ziehen von Metalldrähten. Jeder dieser drei Prozesse wurde an entsprechendem Material vorgenommen und dieses vor und nach seiner Änderung auf seine Elastizitätskonstanten und Dichte untersucht.

Die Werte der Module sind in Kilogramm aufs Quadratmillimeter angegeben. s ist das spezifische Gewicht.

Nickelstahl I. (24,1 Proz. Ni, 0,859 Proz. C, 0,41 Proz. Mn.)

Zustand	E	F	μ	k	s
Ausgeglüht, unmagnetisierbar	17762	6840	0,298	14660	8,0612
In flüssiger Luft ge- kühlt, magnetisierbar	15550	5723	0,3585	18380	7,8557
Differenzen in Proz.	- 12	- 16	+ 20	+ 25	- 2,6

Nickelstahl II. (24,04 Proz. Ni, 0,343 Proz. C, 0,506 Proz. Mn.)

Differenzen in Proz.	- 9	- 14	+ 29	+ 22	- 2,1
----------------------	-----	------	------	------	-------

Stahl I.

Zustand	E	F	μ	k	s
Weich, ausgeglüht	18875	7550	0,250	12580	7,8225
Gehärtet	18206	7175	0,268	19060	7,4621
Differenzen in Proz.	- 3,5	- 5	+ 7,2	+ 3,9	- 2,1

Stahl II.

Differenzen in Proz.	- 3,4	- 4,6	+ 6,0	+ 3,8	- 2,1
----------------------	-------	-------	-------	-------	-------

Aluminium.

Zustand	E	F	μ	k	s
Weich, ausgeglüht	6716	2420	0,8876	9960	2,6974
Hart, gezogen	7074	2600	0,3604	8450	2,7241
Differenzen in Proz.	+ 5,8	+ 7,4	- 7,0	- 15,2	+ 1

Außerdem wurden noch mehrere Kupferstäbe untersucht, jedoch konnte weder durch Ziehen noch durch direkte Pressung eine genügende Änderung der Dichte erzielt werden.¹⁾ Die in einem mit Glyzerin gefüllten Stahlzylinder unter einem Druck von 2800 Atm. 20 Minuten lang gepreßten Kupferstäbe zeigten eine Zunahme der Dichte von nur 0,06 Proz.; E war durch die Pressung von 11810 auf 12370 gestiegen.

Resultat.

I.

Aus den Tabellen ergibt sich, daß mit zunehmender Dichte der Elastizitätsmodul E und der Torsionsmodul F wachsen und zwar ist $\Delta F > \Delta E$, sodaß mit zunehmender Dichte die Elastizitätszahl μ und die Volumenelastizität K abnimmt. Mit wachsender Dichte nimmt also der Widerstand gegen Formänderung F zu, der Widerstand gegen Volumenänderung k ab; doch muß, da k nicht unbegrenzt abnehmen kann, bei einer bestimmten Dichte, die größer ist, als die bisher erreichte, ein Minimum der Volumenelastizität der Metalle vorhanden sein. Da bei wachsender Dichte die die Zusammendrückung unterstützenden Molekularkräfte stärker werden, so liegt möglicherweise hierin der Grund für die oben beschriebene Abnahme der Volumenelastizität. Jedoch muß außerdem berücksichtigt werden, daß bei Stahl und Nickelstahl das Material in eine andere Modifikation übergeführt worden ist. In Bezug auf die Vorgänge beim Ziehen von Metalldrähten ist man neuerdings der Ansicht, daß an der Oberfläche Kristallisationsprozesse vor sich gehen.

1) Hr. Prof. Wolff war so freundlich, die Pressung im Physikalischen Laboratorium des Militärversuchsamtes vornehmen zu lassen.

Beobachtungen.

II.

Untersucht wurden Drähte (Länge gleich 150 mm, Dicke 0,29 mm) von Kupfer, Silber und vier Kupfer-Silberlegierungen von folgender Zusammensetzung.

Legierung		Äquivalentgewicht	
		Ag	Cu
I		1	0,01
"	II	1	0,1
"	III	1	1
"	IV	1	10

Zum Vergleich sind für die vier Legierungen die Werte von E und F nach der Volumenmischungsregel berechnet. Vor der Messung wurden die Drähte sorgfältig ausgeglüht.

	E beob.	E ber.	F beob.	F ber.	μ	k
Ag	7597	—	2721	—	0,3962	12480
Leg. I	7292	7630	2586	2730	0,4099	13490
" II	8190	7760	2896	2780	0,414	15870
" III	8563	8820	2975	3170	0,4394	23400
" IV	11448	11220	4115	4050	0,391	17500
Cu	12240	—	4430	—	0,3815	17220

Zur Bestimmung der Änderungen von E und F mit der Temperatur wurde der lineare Ausdehnungskoeffizient α_x der Legierung x nach der Volumenmischungsregel berechnet.

Als ausführliches Beispiel für die Bestimmung ΔE und ΔF diene Legierung IV.

d_0 und d_t sei der Skalenausschlag bei -186° (Temperatur der flüssigen Luft, als konstant angenommen) und bei Zimmertemperatur

$$\left. \begin{array}{l} d_0 = 49,25 \\ d_t = 52,9 \\ \Delta t = 204^\circ \\ \alpha_{IV} = 0,00001742 \end{array} \right\} \text{erster Draht.}$$

$$\left. \begin{array}{l} d_0 = 48,3 \\ d_t = 52,1 \\ \Delta t = 203^\circ \end{array} \right\} \text{zweiter Draht.}$$

Daraus ergibt sich für den

ersten Draht $\Delta E = -3,8186$ Proz. } für 100°
 zweiten Draht $\Delta E = -4,0630$ „ }
 Im Mittel $\Delta E = -3,9408$ Proz. für 100°.

$T_0' = 6,005$ }
 $T_0 = 4,2173$ } erster Draht
 $T_1' = 6,2348$ } $\Delta t = 206^\circ$
 $T_1 = 4,376$ }
 $T_0' = 5,990$ }
 $T_0 = 4,214$ } zweiter Draht
 $T_1' = 6,211$ } $\Delta t = 206^\circ$
 $T_1 = 4,352$ }

Daraus ergibt sich für den

ersten Draht $\Delta F = -4,4175$ Proz. } für 100°
 zweiten Draht $\Delta F = -4,6214$ „ }
 Im Mittel $\Delta F = -4,5195$ Proz. für 100°.

Tabelle für ΔE und ΔF in Proz. für 100°.

	Ag	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV	Cu
ΔE	-6,30	-6,71	-5,51	-4,84	-3,94	-3,02
ΔF	-7,60	-7,44	-6,35	-5,62	-4,52	-3,45

Tabelle für k_{-186} und k bei Zimmertemperatur, und Δk in Proz. für 100°.

	Ag	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV	Cu
k bei Zimmer- temperatur }	12480	13490	15870	23400	17500	17220
k bei -186° }	11680	12760	14140	19350	16870	16690
Δk in Proz. für 100° }	+3,20	+2,69	+5,47	+8,65	+1,82	+1,52

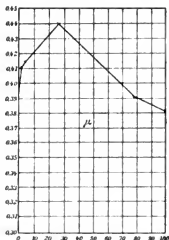
Tabelle für die Temperatur, bei der $\mu = 1/2$, und für die Schmelztemperatur.

	Ag	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV	Cu
Temperatur, bei der $\mu = 1/2$ }	565°	551°	558°	434°	860°	1190°
Schmelztemperatur nach Landolt u. Börnstein }	970°	—	931°	850°	—	1100°

Resultat.

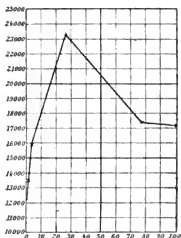
II und III.

Die Tabellen zeigen folgendes: Von der Mischungsregel zeigen sich Abweichungen. Nach ihr müßten bei den Legierungen die Werte für μ und k zwischen den Werten der Komponenten Ag und Cu liegen. Trägt man den Kupfergehalt in Volumenprozenten als Abszissen und die entsprechenden Werte von μ



Kurve für den Gang
von μ bei Ag—Cu—Legierungen.
Abszissen: Cu-Gehalt in Volumen-
prozenten.

Ordinaten: Werte von μ .



Kurve für den Gang
der Volumenelastizität k bei
Ag—Cu—Legierungen.
Abszissen: Cu-Gehalt in Volumen-
prozenten.

Ordinaten: Werte von k .

Fig. 4.

und k als Ordinaten auf, so erhält man zwei Kurven, die bei Legierung III ein Maximum zeigen. Diesem Maximum entspricht der niedrigste Schmelzpunkt.

ΔE und ΔF sind sämtlich negativ, d. h. E und F nehmen mit wachsender Temperatur ab. ΔE und ΔF sind um so größer, je größer die entsprechenden thermischen Ausdehnungskoeffizienten sind. ΔE stets $< \Delta F$.

Δk ist stets positiv, d. h. k wächst mit der Temperatur. Hier wurde noch zum Vergleich aus den Beobachtungen von Katzenelson, Schaefer und Lessing Δk für einige Metalle und Legierungen berechnet und k mit steigender Temperatur wachsend gefunden. Als Beispiel diene die von Katzenelson¹⁾ untersuchte Silber-Kupferlegierung

$$k \text{ bei } 20^{\circ} = 11022,$$

$$k \text{ bei } 120^{\circ} = 19016.$$

Daß mit steigender Temperatur E und F kleiner, dagegen k größer wird, mag seinen Grund darin haben, daß beim Erwärmen von Metall Kräfte wirken, die den Molekularabstand zu vergrößern streben, einer Kompression also entgegen wirken; während bei Zug und Drillung die ausdehnende Kraft der Wärme den von außen wirkenden Kräften nicht entgegen wirkt. Bei Gasen ist die Volumenelastizität der absoluten Temperatur proportional.

Ein Teil der Zunahme der Volumenelastizität mit steigender Temperatur ist auf die Wärmeausdehnung (abnehmende Dichte) zurückzuführen. Hiernach müßte k für ein und denselben Körper um so größer sein, je näher er sich dem Schmelzpunkt befindet. Für dieselbe Temperatur haben nun die Legierungen, deren Schmelzpunkt niedriger liegt als der ihrer Komponenten, ein größeres k als ihre Komponenten.

Die Temperatur, für welche mittels linearer Extrapolation von E und F $\mu = \frac{1}{3}$ wird, liegt nur bei Kupfer dem Schmelzpunkt nahe.

Roses Metall und Woodsche Legierung.

Es wurden noch Stäbe aus Roses Metall und Woodscher Legierung mittels der statischen Methode bei Zimmertemperatur, und Drähte von Roses Metall mittels des unter II. beschriebenen Apparates bei der Temperatur der flüssigen Luft, eines Kohlensäureschnee-Äthergemisches von -36° , sowie bei Zimmertemperatur untersucht.

1) N. Katzenelson, Inaug.-Diss. Berlin 1887.

Stäbe bei Zimmertemperatur.

	E	F	μ	k
Roses Metall . . .	2510	853	0,4713	14576
Woodsche Legierung	2486	839	0,4815	22400

Roses Metall.

	E	F	ΔE in Proz. für 100°	ΔF in Proz. für 100°	μ	k	Δk in Proz. für 100°
+ 20°	2810	—	17	—	—	—	—
— 36°	2533	905		31	0,3994	4196	27
— 186°	3869	1319			0,2771	2519	

Die Berechnung der Temperatur, bei der $\mu = \frac{1}{2}$, ergab + 31°. Die beobachtete Schmelztemperatur liegt bei 90° für Roses Metall. E ist keine lineare Funktion der Temperatur, da ΔE zwischen + 20° und — 36° gleich 17 und zwischen — 36° und — 186° gleich 22 ist. Allerdings kann diese Differenz wegen der Unsicherheit der Untersuchung dieses weichen Materials bei Zimmertemperatur keine große Sicherheit in Anspruch nehmen.

Zwischen + 44° und + 70° ist der thermische Ausdehnungskoeffizient des Roseschen Metalles negativ und deshalb eine lineare Abnahme von E und F nicht zu erwarten, denn jede Zunahme der Dichte bedingt eine Zunahme von E und F .

Die Werte von μ , die bei Zimmertemperatur gefunden wurden, liegen dem oberen Grenzwert für μ , nämlich $\frac{1}{2}$, sehr nahe. μ steigt von — 35° bis zur Zimmertemperatur sehr schnell an, dementsprechend schnell wächst k .

Zusammenfassung der Resultate.

I. Permanente Dichtigkeitsvermehrung durch irreversible Prozesse erhöht die Starrheit, vermindert die Volumenelastizität.

In demselben Sinne wirkt Abkühlung, was zum Teil auf die damit verbundene Dichtigkeitsvermehrung zurückzuführen ist.

Die Volumenelastizität wächst also mit steigender Temperatur und zwar nach Versuchen mit leicht schmelzbaren Legierungen bis zu ihren Schmelzpunkten.

II. Bei Legierungen von Silber und Kupfer wächst mit zunehmendem Kupfergehalt die Starrheit der Legierungen — von dem ersten kleinen Kupferzusatz abgesehen —, während die Volumenelastizität bis zu der Legierung mit dem niedrigsten Schmelzpunkt steigt, welche auf 1 Äquivalentgewicht Silber 1 Äquivalentgewicht Kupfer enthält, dort einen Maximalwert zeigt und alsdann bis zur Volumenelastizität des reinen Kupfers abfällt. Wenn sich solche Ergebnisse bei anderen Legierungen wiederfinden sollten, dann würde die Volumenelastizität bez. ihr Umgekehrtes die Kompressibilität diejenige Elastizitätskonstante sein, welche die nächste Beziehung zur chemischen Konstitution zeigt.

III. Das Ergebnis von Schaefer, nach welchem μ als gebrochene lineare Funktion der Temperatur extrapoliert, seinen oberen Grenzwert $\frac{1}{2}$ für Silber und Kupfer ungefähr beim Schmelzpunkt erreicht, wurde nur bei Kupfer bestätigt gefunden. Beim Silber und Ag-Cu-Legierungen liegt die Temperatur viel tiefer als der Schmelzpunkt. Nach Wood und Roses leichtschmelzbaren Legierungen scheint gleichwohl μ sich gegen den Schmelzpunkt hin dem Werte $\frac{1}{2}$ zu nähern. Daher wird im allgemeinen μ nicht bis zum Schmelzpunkt als gebrochene lineare Funktion der Temperatur darstellbar sein.

Vorstehende Untersuchungen wurden im physikalischen Institut der Universität in Berlin ausgeführt.

Zum Schlusse sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimen Regierungsrat Prof. Dr. E. Warburg, für seine Anregung und vielseitige Unterstützung während dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Heidelberg, Februar 1903.

(Eingegangen 8. Februar 1903.)

11. Gasentladungen an elektrolytischen Glühkörpern; von Ewald Rasch.

In seinen, den gleichen Gegenstand behandelnden Bemerkungen bespricht E. Bose¹⁾ die Tatsache, daß durch elektrolytische Glühkörper elektrische Gasentladungen in einem Vakuum unterhalten werden können und ersetzt bei dieser Gelegenheit seine frühere Auffassung von einer hierbei durch ihn beobachteten sekundären Erscheinung — die er als „*künstliches Himmelsblau*“ angesprochen hatte²⁾ — durch eine von Hrn. Privatdozent Dr. Stark herrührende Theorie.

Meines Erachtens ist die Frage in dem allgemeinen Problem auch jetzt noch zu eng gefaßt: Elektrische Gasentladungen an Leitern zweiter Klasse sind nämlich weder an die Bedingung des Vakuums noch auch an die des Gleichstromes irgendwie prinzipiell gebunden, wie ich bereits vor mehreren Jahren nachgewiesen habe.

Bezüglich der letzteren Bedingung gibt Bose gegenüber den Starkschen Argumenten nunmehr auch selbst zu, daß der scheinbar prinzipielle Unterschied, welchen er hinsichtlich der Gasströme zwischen Kohlefäden und elektrolytischen Glühkörpern im Vakuum beobachtet hatte, „lediglich sekundär durch das eigenartige Verhalten der Elektrolytglühkörper gegen Gleichstrom bedingt zu sein“ scheint.

Das Problem an sich ist jedoch durch mich bereits im Jahre 1899 in seiner *allgemeinsten Fragestellung* gelöst worden: und zwar habe ich damals nachgewiesen, daß Leiter zweiter Klasse in weit höherem Maße als Leiter erster Klasse geeignet sind, elektrische Gasentladungen, lichtbogenartige Entladungen etc. zu unterhalten und daß diese Erscheinungen weder an ein Vakuum noch auch an Gleichstrom oder Ströme hoher Spannung und Frequenz gebunden sind; ja daß derartige elektrische Entladungen selbst bei niedrigen Stromspannungen

1) E. Bose, Ann. d. Phys. 9. p. 1061. 1902.

2) E. Bose, Ann. d. Phys. 9. p. 164. 1902.

(rd. 40 Volt) und bei gewöhnlichem Gasdruck eine stabile Form besitzen.

Hierauf gestützt, habe ich unter anderem ein Verfahren zur Erzeugung von elektrischem Licht experimentell ausgearbeitet¹⁾, bei dem für Gasentladungen, Lichtbögen etc. an Stelle der bisher benutzten Substanzen (Kohle, Metalle) Elektroden aus Leitern zweiter Klasse (fest oder flüssig) in Anwendung gebracht werden.

Die einzige Bedingung für Gasentladungen dieser Art ist nur die, daß die stromführenden Elektroden oder Leiterelemente aus Leitern zweiter Klasse während der Dauer der Gasentladungen eine dem hiermit verbundenen Stromverbrauch entsprechende Leitfähigkeit besitzen, die man durch Erwärmung der Elektroden, sei es lediglich initialiter, sei es während der ganzen Dauer des Betriebes, stets in einfacher Weise erzwingen kann.

So unterhalten beispielsweise mit zweckentsprechenden Stromzuführungen²⁾ versehene und glühend gemachte Elektroden aus den schwerst verdampfenden Metalloxyden, wie Thoroxyd, Magnesia, Zirkonoxyd, Yttria oder dergleichen selbst bei gewöhnlichem Gasdruck elektrische Entladungen, die je nach der Größe der Stromspannung und der zugelassenen Stromstärke den Charakter von lichtbogenartigen Flammen oder den von elektrischen Entladungen zeigen, wie man sie an metallischen Elektroden bei entsprechender Spannung und Gasdruck zu beobachten gewohnt ist. Die hohe photometrische Lichtausbente derartiger Lichtquellen, die ich ihrer spektralen Zusammensetzung gemäß als elektrochromatische bezeichnet habe, läßt es als wahrscheinlich erscheinen, daß diese als Beleuchtungsmittel auch wirtschaftlich nicht ohne Bedeutung bleiben werden.

Ebenso bilden flüssige Leiter zweiter Klasse als Elektroden (Metallsalze etc.) — wenn bis zu hinreichender Stromleitfähigkeit erhitzt — elektrische Entladungen von über-

1) E. Rasch, D.R.P. 117214, „Verfahren zur Erzeugung von elektrischem Bogenlicht“, 19. März 1899.

2) E. Rasch, D.R.P. 137788, „Verfahren zum Anlassen von Elektrolyt-Bogenlampen“, 28. März 1899; *Elektrotechn. Zeitschr.* 7. p. 155 ff. 1901; 17. p. 373. 1901.

raschender Schönheit, die je nach Stromspannung, Stromstärke und Gasdruck den Charakter mächtiger Flammen oder den von Gasentladungen in Vakuumröhren zeigen.¹⁾

Theoretisch dürfte es nicht ohne Interesse sein, daß elektrische Entladungen dieser Art mit geringfügigen Änderungen der Konstanten genau denselben Gesetzen gehorchen, die für lichtbogenartige elektrische Entladungen zwischen Kohleelektroden nach Edlund²⁾, Ayrton und Perry³⁾ u. a. bestimmend sind.

Es ist nämlich die Entladungsspannung (E) (Lichtbogen-spannung) stabiler Entladungsformen eine hyperbolische Funktion der Stromstärke (J)⁴⁾ derart, daß

$$E = k + \frac{b}{J}$$

(für die Elektrodenentfernung $e = \text{konst.} = 1 \text{ mm}$) ist, wobei k und b Materialkonstanten bedeuten, die bei hochbeständigen Metalloxyden nicht wesentlich von den an Kohleelektroden gefundenen Werten abweichen ($k = 31,35$, $b = 30$).

Meine Anschauung geht dahin, daß Leiter zweiter Klasse — und nicht nur infolge ihrer höheren Feuerbeständigkeit — unvergleichlich besser geeignet sind, Gasentladungen irgend welcher Art, insbesondere auch Starkstromentladungen (Lichtbögen), als metallische Elektroden zu unterhalten, wozu letztere, wie durch die Arbeiten von Arons⁵⁾ nachgewiesen ist, überaus schlechte und labile Lichtbogenbildner sind.

Daß Leiter zweiter Klasse auch bei Anwendung von Hochspannungsströmen bez. Teslaströmen — wie Bose nachgewiesen hat — elektrische Entladungen (E groß, J klein) zu

1) Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß die Entladungserscheinung, die E. Bose als „künstliches Himmelsblau“ anspricht, auf Verunreinigungen des Glühkörpers durch leicht verdampfbare und gut leitende Metallsalze (Kalisalze oder dergleichen) zurückzuführen ist, die auch selbst in minimen Mengen in hohem Grade befähigt sind, die umgebenden Gasschichten zu ionisieren.

2) Edlund, Pogg. Ann. 131. p. 586. 1867; 133. p. 353. 1868; 134. p. 250 u. 337. 1868; 139. p. 354. 1870.

3) H. Ayrton u. J. Perry, Proc. Phys. Soc. 4. p. 197. 1882.

4) E. Rasch, Elektrotechn. Zeitschr. 7. p. 155. 1901.

5) L. Arons, Ann. d. Phys. 1. p. 700ff. 1900.

unterhalten und beispielsweise Kathodenstrahlen zu emittieren vermögen, darf nach obigen Vorgängen nicht verwundern.

Übrigens hätten die Boseschen Versuche mit Mangansuperoxyd, „da es trotz festen Zusammenstampfens so schlecht leitet, daß die Entladung entweder gar nicht zu stande kommt, oder aber als Funke die feinen Lufträume des zusammengepreßten Pulvers durchschlägt,“ sofort ein reines Resultat ergeben, sobald Bose durch Erhitzung der Oxydelektroden für eine hinreichende Leitfähigkeit derselben Sorge getragen hätte.

Auch die Leitfähigkeit der einen Elektrolytglühkörper umgebenden Gase erreicht nicht nur im Vakuum, sondern auch bei gewöhnlichem Gasdruck „einen überraschend hohen Wert“, wie folgendes Vorlesungsexperiment erweist, das ich gelegentlich eines Vortrages im Jahre 1899¹⁾ ausführte.

Ein Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis 1:2 liegt mit einem Wehneltunterbrecher und einem Regulierwiderstand im Primärstromkreis an einer Spannung von etwa 80 Volt. Im Sekundärstromkreis ist zwischen metallischen Klemmen ein starker Elektrolytglühkörper eingespannt. Wird der letztere durch eine Flamme angewärmt, so treten überaus heftige Funkenentladungen zwischen den metallischen Anschlußelektroden auf, die den Glühkörper bis zu voller Stromleitungsfähigkeit erhitzen. Nun zeigt sich bei einer bestimmten Größe des primären Vorschaltwiderstandes eine überaus auffällige Erscheinung, die inzwischen durch W. Kaufmann²⁾ — unabhängig hiervon — eingehender studiert worden ist: Der Glühkörper scheint zu erlöschen, plötzlich setzen heftige, charakteristisch scharfe an dem Glühkörper entlang gleitende *Funkenentladungen* ein, der Glühkörper leuchtet hell auf, während die Funkenentladungen verschwinden, erlischt dann wieder, und dieses intermittierende Spiel setzt sich dann in regelmäßiger Weise fort.

Die hierbei auftretenden Funkenentladungen bei relativ hohem Gasdruck und bei relativ *niedrigen Stromspannungen*

1) E. Rasch, Vortrag im Polytechnischen Verein zu München, 17. November 1899.

2) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. 5. p. 757—771. 1901.

deuten auf eine enorm große ionisierende Kraft glühender Leiter zweiter Klasse hin, welche letztere in dem angeführten Fall aus 90 Proz. Zirkonoxyd und 10 Proz. Yttria bestanden. Beobachtungen dieser Art führten den Privatdozenten Hrn. Dr. Blau und den Verfasser zu dem gemeinsamen Vorschlage (1899), Heizquellen dieser Art in elektrischen Öfen und Apparaten u. a. zur *Ausführung pyrochemischer Gasreaktionen*¹⁾ auszuwerten, ein Anwendungsgebiet, das nicht ohne Aussicht auf Erfolg erscheint, schon mit Rücksicht darauf, daß derartigen hochfeuerbeständigen Wärmegeneratoren die reduzierenden Eigenwirkungen der Kohle — auf die man bis zur Zeit für pyrochemische Prozesse bei hohen Temperaturen allein angewiesen war — fehlen.²⁾

Es erscheint mir ferner wahrscheinlich, daß diese Beobachtungen ein neues Hilfsmittel bieten können, um gewisse Probleme der Elektronentheorie experimentell zu verfolgen, die zur Zeit, aus rein äußerlichen Ursachen, lediglich auf das Versuchsmaterial an Leitern erster Klasse (Metallen etc.) beschränkt zu sein schienen. —

Potsdam, Februar 1903.

1) F. Blau u. E. Rasch, „Elektrischer Ofen“. Patentanmeldung B. 24603 IV/21h. 19. April 1899.

2) E. Rasch, Zeitschr. f. Elektrochem. 8. p. 162 ff. 1903.

(Eingegangen 18. Februar 1903.)

12. *Gravitation und Kapillarität;* *von G. Bakker.*

Wenn Laplace, Poisson und Gauss die Kräfte berechnen, welche die Teile einer Flüssigkeit aufeinander ausüben, so zerlegen sie die Flüssigkeit in Volumenelemente. Die Attraktionskräfte, welche sie betrachten, sind daher Kräfte zwischen Flüssigkeitselementen und nicht zwischen Molekülen, oder, wie man es auch auffassen kann: Laplace, Poisson und Gauss konstruieren ein homogenes Agens, welches in seinen totalen Wirkungen dieselben Kräfteverhältnisse zeigt, wie die Flüssigkeit. Allein wir müssen uns klar machen, daß z. B. eine Potentialfunktion, die in eine solche Theorie eingeführt wird, nichts zu schaffen hat mit der Potentialfunktion zweier Moleküle.

Niemals nehmen wir Wirkungen zwischen einzelnen Molekülen wahr. Gibt es Moleküle, so sind die Kräfte, welche wir experimentell studieren, immer Kräfte zwischen Molekülkomplexen. Wenn daher Gauss zeigt, daß die Gravitation niemals die kapillaren Wirkungen erklären kann, so beweist er etwas über die Kräfte zwischen den Elementen seines homogenen Agens.

Laplace bemerkt¹⁾, daß wenn die Moleküle nur genügend große Densität besitzen würden, die kapillaren Wirkungen durch die Kräfte der Gravitation sehr gut erklärt werden könnten. Später zeigte Lord Kelvin dasselbe auf populäre Weise in seiner „Note on gravity and cohesion“. ²⁾ Die beiden Betrachtungen sind aber nur kurze Bemerkungen und keine wissenschaftlichen Untersuchungen. Die Sache scheint mir aber genügend interessant, um sie wissenschaftlich weiter zu verfolgen. So kann man sich z. B. fragen, wenn man zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit oder eines Gases die Newtonschen Kräfte adoptiert, was bedeutet denn die Konstante A in

1) P. S. Laplace, De l'Exposition du système du monde 4. p. 391.

2) Lord Kelvin, Proc. Roy. Soc. Edinb. 21. April 1862.

der Formel $-A\rho$ (ρ = Dichte) für die potentielle Energie einer Flüssigkeit (Gauss)¹⁾ oder eines Gases (van der Waals); was wird das Verhältnis zwischen den Dichten der Moleküle und der mittleren Dichte etc.?

Nach einer bekannten Theorie von Boltzmann²⁾, welcher die räumliche Verteilung materieller, mit Kräften begabter und im Wärmegleichgewicht befindlicher Punkte bestimmt in dem Falle, daß die Zahl der in einem Augenblick in Wechselwirkung befindlichen Punkte klein ist gegen die Gesamtzahl der Punkte, ist die Zahl der Molekülpaaire eines verdünnten Gases, deren Moleküle einen gegenseitigen Abstand zwischen r und $r + dr$ haben:

$$dn = \frac{2\pi n^2 r^2}{v} e^{-2h\mu^2\chi(r)} dr.$$

Hierin bedeutet $\mu^2\chi(r)$ die Arbeit, die geleistet wird, wenn sich zwei Moleküle (Masse μ) aus einer Entfernung, in der sie keine Kräfte aufeinander ausüben, bis zur Entfernung r einander nähern, und n ist die Zahl der Moleküle für die Masseneinheit.

Der kleinste Abstand zwischen zwei Molekülen ist dem Molekularradius gleich. Nennen wir diese Größe D , so wird also die ganze Energie pro Masseneinheit ($n\mu = 1$):

$$(1) \quad W = \frac{2\pi}{v} \int_D^\infty r^2 \chi(r) e^{-2h\mu^2\chi(r)} dr.$$

Berechnen wir nun diese Energie auf eine andere Weise. Dazu bedürfen wir an erster Stelle der potentiellen Energie eines Moleküls (Masse μ) im Innern der Flüssigkeit, d. h. eine Arbeit ist nötig, um alle übrigen Moleküle von dem Molekül zu entfernen, diese Arbeit wird mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Wir schreiben für diese potentielle Energie μV und nennen V das Potential. Da das Potential unabhängig ist von der *Bewegung* der übrigen Moleküle, können wir uns das

1) van der Waals hat in seiner „Kontinuität etc.“ auch für eine Flüssigkeit die Formel $-a\rho$ abgeleitet. Er kannte die Arbeit von Gauss nicht.

2) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 186; l. c. p. 150. 1898.

3) M. Reinganum, Ann. d. Phys. 6. p. 538. 1901.

Molekül, wofür die potentielle Energie berechnet werden soll, in Ruhe denken. Weiter denken wir uns die Moleküle kugelförmig. Sind sie nicht kugelförmig, so ändert sich unsere Betrachtung nur in der Weise, daß das, was wir den Diameter des Moleküls nannten, ersetzt werden muß durch die Mittelwerte der Abstände zwischen den Zentren der Moleküle beim Stoß. Da die Moleküle immer rotieren, so kann man auch bei nicht kugelförmigen Molekülen die „Schwerpunkte“ als Anziehungszentren auffassen.

Denken wir uns also ein Molekül im Innern der Flüssigkeit. Die übrigen Moleküle ändern und wechseln immer ihre Stellen, und, wenn es sich um Mittelwerte handelt, kann man sich deshalb denken, daß die übrige Flüssigkeit homogen durch die Räume verteilt ist. Ein Raum rings um das betrachtete Molekül mit einem Radius gleich dem Diameter des Moleküls bleibt aber von Attraktionszentren leer (vgl. Figur).



Zerteilen wir nun die ganze Flüssigkeit in Elementarpyramiden so, daß die Spitzen mit dem Mittelpunkt A zusammenfallen. Weiter beschreiben wir mit A als Mittelpunkt eine Kugel mit Radius gleich eins und nennen $d\omega$ das Stückchen, welches durch eine Pyramide aus dieser Kugel geschnitten wird. Die Beiträge zum Potential durch eine Elementarpyramide werden also:

$$- \int \rho \, dv \int_r^\infty f(r) \, dr,$$

wenn $f(r)$ die willkürlich gedachte Kräftefunktion, ρ die Dichte und dv ein Volumenelement darstellt. (ρ ist deshalb die Gesamtmasse der Moleküle im Volumen 1 und die Zahl dieser Moleküle wird im Innern einer „Wirkungssphäre“ sehr groß angenommen.)

Schreiben wir Integral:

$$\int_r^\infty f(r) \, dr = \varphi(r),$$

so erhalten wir für das Integral:

$$- \int \rho \, \varphi(r) \, dv.$$

Zerteilen wir eine Elementarpyramide auf die bekannte Weise in Volumenelemente, so hat man $d v = r^2 d \omega d r$, und der Ausdruck wird:

$$- d \omega \int \rho r^2 \varphi(r) d r.$$

Wir müssen nun nach r integrieren zwischen D und R , wenn D der Diameter des Moleküls ist und R den Abstand vom Molekülzentrum zur Oberfläche der Flüssigkeit bedeutet, also:

$$- d \omega \int_D^R \rho r^2 \varphi(r) d r.$$

$$- \int_r^\infty r^2 \varphi(r) d r \text{ durch eine neue Funktion } \psi(r) \text{ darstellend,}$$

bekommt man:

$$- d \omega \int_D^R \rho d \psi(r),$$

durch partielle Integration:

$$- d \omega \left\{ \rho \psi(r) \right\}_D^R + \int_D^R \psi(r) \frac{d \rho}{d r} r^2 d r.$$

Der erste Ausdruck gibt für alle Elementarpyramiden zusammen erstens:

$$- \int \rho_1 \psi(R) d \omega,$$

wenn ρ_1 die Dichte an der Oberfläche der Flüssigkeit darstellt. Ist weiter λ der Winkel zwischen der nach außen gerichteten Normalen in einem Punkt der Oberfläche und der Geraden, welche der Mittelpunkt des Moleküls mit diesem Punkt vereinigt (positiv von Molekül nach Oberfläche) so wird:

$$d \omega = \frac{d s \cos \lambda}{R^2},$$

wenn $d s$ ein Flächenelement der Oberfläche bedeutet, und unser Ausdruck wird:

$$- \rho_1 \psi(R) \cos \lambda \frac{d s}{R^2},$$

oder integriert für die ganze Oberfläche:

$$- \int \rho_1 \psi(R) \cos \lambda \frac{d s}{R^2}.$$

Zweitens gibt der erste Ausdruck:

$$d\omega \varrho \psi(D),$$

wo nun ϱ die Dichte im Innern der Flüssigkeit darstellt.

Integriert rings um das Molekül erhalten wir:

$$4\pi\varrho\psi(D).$$

Das Potential wird also:

$$V = 4\pi\psi(D)\varrho - v_1 \int \frac{\psi(R) \cos \lambda ds}{R^2} + \iint_D \frac{\psi(r)}{r^2} \frac{d\varrho}{dr} dv.$$

Das zweite Integralzeichen des letzten Ausdruckes bezieht sich auf die gesamten Elementarpyramiden. Allein wo die Flüssigkeit ihre Dichte ändert von Punkt zu Punkt, gibt sie Beiträge zum letzten Integral. Sie bezieht sich also auf die Grenzschicht, und ebenso gibt das zweite Integral die Beiträge, welche die Moleküle in der Oberfläche zum Potential liefern. Für jeden Punkt auf meßbarem Abstand der Oberfläche (im Innern der Flüssigkeit) wird also das Potential:

$$4\pi\psi(D)\varrho.$$

Vernachlässigt man also die kapillare Energie bezüglich der übrigen potentiellen Energie der Flüssigkeit, so hat man nur den letzten Ausdruck in Rechnung zu ziehen. Um nun diese potentielle Energie (W) zu finden, verfahren wir wie folgt: Denken wir uns, daß im Raum, wo sich die Flüssigkeit befinden soll, sich nur x Moleküle bewegen, und daß wir ein neues Molekül hinzufügen, so ist die Dichte in diesem Raum, wenn μ die Masse eines Moleküls, v das ganze Volumen und r das Volumen eines Moleküls darstellt, $mx/v - r$, die Zunahme der Energie durch Hinzufügung des $(x-1)$ -Moleküls wird deshalb

$$\mu \cdot 4\pi\psi(D) \frac{\mu x}{r - r}.$$

Für ein folgendes Molekül erhalten wir:

$$\mu \cdot 4\pi\psi(D) \frac{\mu(x+1)}{r - r} \text{ etc.}$$

Die ganze Arbeit für n Moleküle wird somit:

$$\frac{\mu^2 \cdot 4 \pi \psi(D) \{1 + 2 + 3 \dots n - 1\}}{v - 1} = 4 \pi \mu^2 \psi(D) \frac{n(n-1)}{2v}$$

$$= 2 \pi \psi(D) \frac{n^2 \mu^2}{v} = 2 \pi \psi(D) \rho^2 v,$$

oder für die Masseneinheit:

$$(2) \quad W = 2 \pi \psi(D) \rho.$$

Diese Betrachtungsweise habe ich u. a. bereits entwickelt.¹⁾

Wenn Reinganum²⁾ bei seiner Berechnung über das Potential der Molekularkräfte äußert:

„Bakker sagt nun: Außerhalb der Wirkungssphäre des hervorgehobenen Moleküls kann man sich, da es sich um Mittelwerte in Bezug auf das eine Molekül handelt, die Flüssigkeit homogen denken von der gleichmäßigen Dichte ρ .

Diesen Schluß wollen wir abändern.

Wir wollen nämlich beachten, daß für die Dichteverteilung um das Molekül herum das Boltzmannsche Gesetz der räumlichen Verteilung maßgebend sein muß“,

so muß man hieraus nicht folgern, daß die beiden Betrachtungsweisen nicht miteinander im Einklange sind. Denn die Potentialfunktion zwischen *zwei Molekülen* bei Anwendung des Boltzmannschen Gesetzes ist etwas ganz anderes als die Potentialfunktion bei meiner Betrachtungsweise. Ist $\mu^2 \chi(r)$ die Potentialfunktion in Bezug auf *zwei Moleküle*, und $\varphi(r)$ die Potentialfunktion bei meiner Betrachtungsweise, so geben die beiden Ausdrücke (1) und (2) für W :

$$\int_D^\infty r^2 \varphi(r) dr = \int_D^\infty r^2 \chi(r) e^{-2h\mu^2 \chi(r)}.$$

Besteht das Newtonsche Gravitationsgesetz zwischen zwei Molekülen, so erhält man:

$$\int_D^\infty r^2 \varphi(r) dr = - \int_D^\infty r f e^{\frac{2h\mu^2 f}{r}} dr.$$

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chem. 21. p. 500. 1896.

2) M. Reinganum, Inaug.-Dissert. p. 64.

Soll dieses Gesetz für alle Moleküle Geltung haben, so wird:

$$\varphi(r) = -f \frac{e}{r^{\frac{\lambda}{r}}}, \text{ wenn } \lambda = 2 h \mu^2 f. {}^1)$$

Das Potential für ein Molekül in Bezug auf *das homogene Agens*, das die übrigen Moleküle ersetzen soll, ist also:

$$V = 4 \pi \psi(D) \rho = 4 \pi \rho \int_D^\infty -f r e^{\frac{\lambda}{r}} dr = -4 \pi f \rho \int_D^\infty r e^{\frac{\lambda}{r}} dr.$$

Das Integral

$$\int_D^\infty r e^{\frac{\lambda}{r}} dr$$

wird unendlich, das heißt: der Wert des Potentials ist abhängig von der Quantität der Masse der Flüssigkeit oder des Gases, welche betrachtet wird. Dieses Resultat hätten wir erwarten können, denn für große Abstände wird $\varphi(r)$ das Newtonsche Potential.

Praktisch ist die Sache aber ganz anders. Denn ist ϵ die Densität des Moleküls (welche, wie Laplace schon bemerkt hat, außerordentlich groß sein muß), so ist:

$$\mu = \frac{1}{6} \pi D^3 \epsilon$$

und:

$$\lambda = \frac{\pi f \epsilon D^3}{6 R T} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{D} = \frac{\pi f \epsilon D^2}{6 R T}.$$

Ist nun λ/D genügend groß, so wird für Werte von r , welche gleich oder wenig größer als D sind, λ/r sehr groß und $e^{\lambda/r}$ nimmt mit zunehmendem Wert von r stark ab, um für meßbare Abstände praktisch $e^0 = 1$ zu werden. Die Koeffizienten des

1) λ ist eine Strecke. Denn

$$2 h = \frac{\pi}{R T} = \frac{1}{\mu R T} = \left[\frac{1}{M} \frac{K}{L} \right] = [K^{-1} \cdot L^{-1}] \quad \text{und} \quad \mu^2 f = K L^3.$$

Also

$$2 h \mu^2 f = [L] \quad K = [\text{Kraft}].$$

Ausdruckes für das Potential V fassen wir nun auf als die Summe zweier Integrale:

$$4\pi f \int_D^{r_1} r e^{\frac{\lambda}{r}} dr \quad \text{und} \quad 4\pi f \int_{r_1}^{\infty} r e^{\frac{\lambda}{r}} dr.$$

Ist r_1 eine meßbare Strecke, so ist $e^{\lambda/r}$ in dem letzteren Integral wenig von 1 verschieden und kann das letzte Integral als ein Beitrag betrachtet werden, der von Kräften herrührt, welche aus dem Newtonschen Gesetz folgen und praktisch also vernachlässigt werden.¹⁾ Da eine Multiplikation mit Zahlen von der Ordnung e das Integral noch immer praktisch verschwindend klein läßt, so kann man $r_1 = \lambda$ setzen und erhält:

$$V = -4\pi f \rho \int_D^{\lambda} r e^{\frac{\lambda}{r}} dr.$$

Für die ganze potentielle Energie bekommt man also:

$$W = -2\pi f \int_D^{\lambda} r e^{\frac{\lambda}{r}} dr \times \rho.$$

Adoptieren wir also als Wechselwirkung zwischen den Molekülen eines Gases die Newtonschen Kräfte, so wird die Konstante $A^2)$ in dem van der Waalsschen Ausdruck $-A\rho$ für die potentielle Energie:

$$A = -2\pi f \int_D^{\lambda} r e^{\frac{\lambda}{r}} dr.$$

Da λ sich der absoluten Temperatur umgekehrt ändert, nimmt A mit der Temperatur ab und es ist also nicht nötig, die Kräfte-

1) Obgleich

$$\int_{r_1}^{\infty} r e^{\frac{\lambda}{r}} dr$$

unendlich wird, sind für eine endliche Masse die Beiträge zum Potential verschwindend klein.

2) Diese Konstante A ist nicht identisch mit der Temperaturfunktion a der van der Waalsschen Zustandsgleichung.

funktion zwischen den Molekülen selbst als Temperaturfunktion anzusehen, um A als Temperaturfunktion betrachten zu können.

Wie ich bemerkte, hat schon Gauss für den flüssigen Zustand den Ausdruck:

$$W = - A \varrho$$

für die potentielle Energie abgeleitet. Wären nun in diesem Aggregatzustand die Dimensionen der Moleküle noch immer klein in Beziehung zu ihren mittleren Abständen, so hätten wir auch für den flüssigen Zustand denselben Ausdruck wie für den Koeffizienten A , für die innere Verdampfungswärme würden wir erhalten:

$$A(\varrho_1 - \varrho_2) \\ (\varrho_1 = \text{Dichte-Flüssigkeit, } \varrho_2 = \text{Dichte-Dampf.})$$

Wahrscheinlich ist aber das Gesetz der Molekülzerstreuung im flüssigen Zustand viel verwickelter, als das Boltzmannsche für verdünnte Gase und sehen wir also, daß es verschiedene Umstände geben kann, weshalb das Verhältnis:

$$\frac{\text{Innere Verdampfungswärme}}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

mit zunehmender Temperatur kleiner wird, *ohne die Kräftefunktion zwischen den Molekülen als Temperaturfunktion zu betrachten.* Hätten wir die Flüssigkeit oder das Gas durch ein homogenes Agens ersetzt, so würden wir für das Potential:

$$V = 4 \pi \psi(0) \varrho$$

statt

$$V = 4 \pi \psi(D) \varrho$$

gefunden haben.

Nennen wir also die Potentialfunktion zwischen zwei Elementen m und m' des homogenen Agens:

$$m m' \varphi_1(r),$$

so wird die potentielle Energie:

$$W = 2 \pi \int_0^\infty r^2 \varphi_1(r) dr \quad \text{statt} \quad W = 2 \pi \int_D^\infty r^2 \varphi(r) dr.$$

Wir haben also:

$$\int_0^\infty r^2 \varphi_1(r) dr = \int_D^\infty r^2 \varphi(r) dr.$$

Dieser Beziehung wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$r^2 \varphi_1(r) = (r + D)^3 \varphi(r + D)$$

oder

$$\varphi_1(r) = \left(1 + \frac{D}{r}\right)^3 \varphi(r + D).$$

Nun war:

$$\varphi(r) = -f \frac{e^{-\frac{\lambda}{r}}}{r},$$

also wird die Potentialfunktion *zwischen zwei Elementen* des homogenen Agens, welches das Gas ersetzen soll:

$$\varphi_1(r) = -f \frac{r + D}{r^2} e^{-\frac{\lambda}{r + D}}.$$

Für meßbare Abstände können wir D gegen r vernachlässigen, und wird praktisch $\lambda/r + D = 0$; wir kehren also wieder zum Newtonschen Ausdruck

$$\varphi_1(r) = -\frac{f}{r}$$

zurück.

Da λ sich der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ändert, wird für genügend höhere Temperaturen die Potentialfunktion (für alle Abstände):

$$\varphi_1(r) = -f \frac{1}{r} \left(1 + \frac{D}{r}\right)$$

und nähert sich immer mehr der Newtonschen Potentialfunktion. Das heißt: *Für sehr hohe Temperaturen wird die Kohäsion der Gase praktisch Null.*

Adoptieren wir auch für Flüssigkeiten die Funktion $\varphi_1(r)$, so kann man dasselbe sagen für diesen Aggregatzustand und die Abnahme der Kohäsion mit Temperatursteigerung ist erklärt als Folge der Änderung des Bewegungszustandes des Moleküls.

Zusammenfassung.

1. Die Kapillarkräfte, welche beim Experiment studiert werden, sind Kräfte zwischen Molekülkomplexen und werden immer betrachtet als Kräfte zwischen Volumenelementen eines homogenen Agens.

2. Wenn die Diameter der Moleküle genügend klein sind in Beziehung zu ihren mittleren Abständen, so können die Newtonschen Kräfte der Gravitation die Kohäsion der Gase und Flüssigkeiten genügend erklären.

3. Die Konstante A in dem Ausdrücke von Gauss und van der Waals für die potentielle Energie bei Annahme der Gravitationskräfte:

$$W = - A \varrho$$

nimmt ab mit der Erhöhung der Temperatur.

4. Die Potentialfunktion zwischen zwei Elementen des Agens, welches die Flüssigkeit oder das Gas ersetzt, wird für die Berechnung von W :

$$- f \frac{r + D}{r^3} e^{\frac{\lambda}{r + D}} \quad \lambda = \frac{f \mu}{R T}$$

(D = Molekulardurchmesser, f = Gravitationskonstante und μ = Molekulargewicht.)

5. Für genügend hohe Temperaturen wird die Kohäsion der Gase praktisch Null, denn es bleibt nur eine Kohäsion von der Ordnung der Gravitation übrig.

(Eingegangen 28. Januar 1903.)

13. Über die Heterogenität der kolloidalen Sole.
(Antwort an die Herren G. Quincke und D. Konowalow);
von G. Bredig.

I. Auf p. 1033, Bd. 9 dieser Annalen schreibt Hr. Quincke: „Die Ansicht Bredigs, die Sole sind äußerst feine mechanische Suspensionen“, halte ich für richtig. Aber der Nachweis der zweiphasigen Gehilde fehlt.“

Diesen von Hrn. Quincke vermißten Nachweis glaube ich aber gerade in der von ihm zitierten Monographie (und schon früher)¹⁾ ausführlich gegeben zu haben. Um den Lesern dieser Annalen den Beweis vorzulegen, sei es gestattet, hier einige darauf hezügliche Stellen aus meiner Monographie²⁾ wörtlich abzudrucken:

„*Optische Inhomogenität:* Es ist vielfach beobachtet worden, daß kolloidale Gele und Sole, welche im durchfallenden Lichte den Eindruck eines klaren, homogenen Systems machten und selbst unter den besten Mikroskopen keine heterogenen Teilchen entdecken ließen, die größer als die sichtbaren Lichtwellen wären, sich dennoch optisch³⁾ von gewöhnlichen Kristalloidlösungen durch den sogenannten Tyndallversuch unterscheiden. Ein kolloidales Sol von Eisenhydroxyd ließ z. B. unter dem Mikroskop keine suspendierten Teilchen erkennen, zeigte aber deutlich eine diffuse Zerstreuung eines einfallenden Lichtbündels.⁴⁾ Während bei echten fluoreszierenden Kristalloidlösungen das diffus zerstreute Licht unpolarisiert⁵⁾ ist, zeigte es sich bei dem Eisenoxydsol und anderen ähnlichen Solen als polarisiert,

1) G. Bredig, Zeitschr. f. angew. Chem. 11. p. 954. 1898.

2) G. Bredig, Anorgan. Fermente, Leipzig bei W. Engelmann. 1901. p. 20—22; vgl. auch p. 27 u. 32.

3) E. Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes 2. p. 403. 1887; Stokes, Phil. Trans. p. 463. 1852; John Strutt (Lord Rayleigh), Phil. Mag. 41. 1871; J. Tyndall, Die Wärme, 4. Aufl. p. 595. 1894.

4) S. E. Linder u. H. Picton, Journ. chem. Soc. 61. p. 152. 1892.

5) G. C. Schmidt, Wied. Ann. 60. p. 740. 1897.

wie man leicht mit Hülfe eines Nicols erkennen kann. Die Polarisation des diffusen Lichtes ist ein Beweis dafür, daß es reflektiertes Licht ist, und daß somit Flüssigkeiten wie das Eisenoxydsol noch Teilchen enthalten, welche zwar zu klein zur mikroskopischen Sichtbarkeit sind, welche jedoch noch groß genug sind im Verhältnis zur Größe der Lichtwellen, um diese zu polarisieren. *Es dürfte dies¹⁾ der empfindlichste Nachweis einer Inhomogenität sein, den wir für solche Medien besitzen.* Da wir mit den besten Mikroskopen noch $0,14\ \mu$ erkennen können²⁾, während der Durchmesser einer Wassermolekel nach der kinetischen Gastheorie etwa $0,00016\ \mu$ beträgt³⁾, so sehen wir, daß die vom Tyndallphänomen noch entdeckten, aber mikroskopisch unsichtbaren, suspendierten Teilchen eines Soles höchstens nur 1000—10000 mal größer, als die sogenannte Molekulardimension sein können.

Elektrische Herstellung von Solen. Es erhebt sich nun die Frage, ob wir kolloidale Sole vielleicht direkt synthetisch erhalten können, wenn wir auf irgend einem Wege einen Stoff mechanisch so fein verteilen, daß seine Teilchen die obige Größenordnung besitzen. Eine solche Methode zur feinen Zerteilung ist bereits durch Versuche von O. Wiener⁴⁾ bewährt worden, welcher zeigte, daß man durch elektrische Zerstäubung einer Silberkathode im Vakuum auf einer Glimmerplatte sogar noch Silberschichten⁵⁾ von der Dicke $0,00014\ \mu$ erhält, also von der sogenannten Molekulardicke. *Ich habe nun gefunden, daß man tatsächlich durch elektrische Kathodenzerstäubung von Metalldrähten unter Wasser kolloidale Sole erhält, wie wir im folgenden sehen werden, sodaß die Ansicht, daß die Sole nur*

1) Diese Stelle ist im Original nicht besonders hervorgehoben.

2) Vgl. O. Wiener, Die Erweiterung unserer Sinne, p. 12. Leipzig 1900.

3) Vgl. W. Ostwald, Grundr. d. allgem. Chemie, 3. Aufl. p. 82. 1899.

4) O. Wiener, l. c. p. 14; Wied. Ann. 31. p. 666. 1887.

5) Es wäre von höchstem Interesse für die Theorie des latenten Bildes etc., mit Hülfe der Wienerschen Methoden zu prüfen, ob sich solche dünne Ag-Schichten noch physikalisch entwickeln lassen. Vgl. W. Ostwald, Lebrb. d. allgem. Chem. (2. Aufl.) 2. (1) p. 1078; 2. (2) p. 704—784; Zeitschr. f. physik. Chem. 22. p. 289. 1897; R. Abegg, Arch. f. wissensch. Photogr. 1. p. 15, 109 u. 268. 1899; R. Luther, Arch. f. wissensch. Photogr. 1. p. 274. 1899; K. Schaum, l. c. 1. p. 139. 1899; G. Bredig, Eders Jahrb. 13. p. 357. 1899.

„äußerst feine mechanische Suspensionen sind, durch diese synthetische Darstellungsmethode eine neue Stütze erhält.“

Ebenso wird auf p. 27 u. 32 l. c. von mir ausdrücklich die optische Inhomogenität der durch Zerstäubung erhaltenen Gold- und Silbersole, also ihre Natur als „zweiphasiges Gebilde“, in Übereinstimmung mit ihren übrigen Eigenschaften nachgewiesen. Der von mir im Anschluß an Linder und Picton (l. c.) u. a. gelieferte optische Nachweis der Inhomogenität der Goldsole scheint auch neuerdings schlagende Bestätigung durch die soeben erschienene interessante Arbeit von Siedentopf u. Zsigmondy¹⁾ zu erfahren, wenn die darin beschriebene Methode zum Nachweis ultramikroskopischer Teilchen ohne Einwand bleibt. Hr. Zsigmondy hat übrigens früher meine Ansicht von der heterogenen Struktur der Sole nicht geteilt²⁾, während er jetzt sogar mit Hrn. Siedentopf die Größe dieser darin heterogen suspendierten Teilchen bestimmt hat.

Daß es stetige Übergänge von den heterogenen Solen zu den homogenen echten Lösungen (wenigstens nach dem Stande unserer experimentellen Grenzen) geben kann, wie Picton und Linder sowie Lobry de Bruyn³⁾ behaupten, habe ich bisher nie bestritten, fand aber das einzige sichere Kriterium der Unterscheidung bez. die experimentelle Grenze zwischen Homogen und Heterogen eben nur in dem Versuche nach Stokes-Tyndall mit dem Nicolschen Prisma, wenn man nicht die Beziehungen von Gleichgewichten zur Oberflächengröße zu Hilfe nehmen will⁴⁾ oder kann.

Meine Auffassung der Koagulation als einer Erscheinung, die mit den *kapillarelektischen* Eigenschaften in Zusammenhang

1) H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10. p. 1. 1900.

2) Vgl. R. Zsigmondy, Zeitschr. f. physik. Chem. 33. p. 71. 1900.

3) Lobry de Bruyn, Recueil des Travaux chim. des Pays-Bas 19. p. 251. 1900.

4) Vgl. W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chem. 34. p. 495. 1900; G. Bredig, Eders Jahrb. d. Photogr. 13. p. 357. 1899; A. Mittasch, Zeitschr. f. physik. Chem. 40. p. 38. 1902; G. Hulett, ebenda 37. p. 385. 1901. Bei dieser Gelegenheit muß ich jede Identität oder Solidarität mit dem wunderlichen anonymen Energetiker Quinckes auf p. 1019—1020 ausdrücklich ablehnen, da ein solches Mißverständnis durch die Darstellung Quinckes nicht ausgeschlossen wird.

steht, wird, wie ich l. c. gezeigt habe, geradezu notwendig, wenn man überhaupt den auch durch Quinckes bekannte ältere Versuche begründeten Satz anerkennt, daß sich in einem „zweiphasigen Gebilde“ eine elektrische Potentialdifferenz an der Grenze zwischen den beiden heterogenen Medien ausbildet, und wenn man die Koagulation als eine Ausflockung unter Verkleinerung dieser gemeinsamen Oberfläche auffaßt, wie ich es getan habe. Höchstens wäre mit Rücksicht auf neuere Untersuchungen die *Spezialbedingung* von Helmholtz fallen zu lassen, daß gerade zu der Potentialdifferenz *Null* der beiden Medien das *Maximum* ihrer gegenseitigen Oberflächenspannung und daher nach meiner und Hardys Annahme auch das Maximum der Instabilität ihres Soles gehört.

Hr. Quincke behauptet ferner, in meinen Betrachtungen bleibe „der Einfluß der Oberflächenspannung an der Grenze der zweiphasigen Gebilde unberücksichtigt“. Demgegenüber sei erwähnt, daß ich in meiner Monographie doch als wesentliches Moment bei Koagulation von Solen gerade den Einfluß der Oberflächenspannung in Verbindung mit der Potentialdifferenz eingeführt habe. Vgl. l. c. p. 14, 16 u. 17.

Es wird mir ferner von Hrn. Quincke vorgeworfen, „den festen oder flüssigen Aggregatzustand der schwebenden Teilchen“ nicht berücksichtigt zu haben. Auch in den ausgedehnten Arbeiten meines verehrten Kritikers habe ich bisher keinerlei Entscheidung der Frage gefunden, ob die mikroskopisch *unsichtbaren* suspendierten Teilchen eines Soles flüssig oder fest sind.

II. Auf p. 384, Bd. 10 dieser Annalen schreibt Hr. Konowalow, nachdem er seine Dampfdruckkurven im kritischen Gebiete der Lösungen diskutiert hat:

„Die angeführten Tatsachen beweisen, daß wir es sowohl in Flüssigkeits- als auch in kolloidalen Lösungen mit ein und derselben Bedingung zu tun haben: *eine deutliche Opaleszenz ist denjenigen Lösungen eigen, welche ihren Dampfdruck bei Veränderung der Konzentration kaum verändern, also Lösungen, in welchen durch den unbedeutendsten Arbeitsaufwand große Veränderungen der Konzentration hervorgerufen werden können.*

Zum Vergleich sei hier ein Passus aus meiner von ihm nur ganz beiläufig an anderer Stelle erwähnten älteren Monographie wörtlich abgedruckt (l. c. p. 10):

„Arbeit bei der Entfernung des Lösungsmittels: Ein schon viel schärferes Kennzeichen der kolloidalen Gemische ist die Tatsache, daß die Arbeit, welche nötig ist, um ihre Komponenten, also „Lösungsmittel“ und „Gelöstes“, voneinander zu trennen, einen im Vergleich zu Kristalloidlösungen auffallend kleinen Betrag hat. Bekanntlich besitzen wir in dem osmotischen Drucke, der relativen Dampfdruckverminderung und der Gefrierpunktsniedrigung ein direktes Maß für diese Arbeit.“

Hr. Konowalow fährt ferner fort:

„Mit Hülfe der Tyndallschen Methode kann man sich leicht davon überzeugen, daß auch in Flüssigkeitslösungen das reflektierte Licht in einer zur Richtung des durchgehenden Strahles senkrechten Ebene polarisiert ist, ganz wie in kolloidalen Lösungen.“

Hr. Konowalow vergißt aber hinzuzufügen, daß bereits Hr. Friedländer¹⁾ vor ihm diese auf meine Veranlassung festgestellte Tatsache angibt, daß die kritisch getrüben „Flüssigkeitslösungen“ mit den anderen trüben Medien und Kolloiden die Eigenschaft gemeinsam haben, „das reflektierte Licht in der zum Strahl senkrechten Ebene zu polarisieren.“

Die von Friedländer konstatierte Stabilität dieser Trübung kritischer Lösungen im elektrischen Potentialgefälle sowie die Konstanz und quantitative photometrische Reproduzierbarkeit der Trübung spricht gegen die Ansicht Konowalows, daß das Hauptmoment zur Bildung derselben die zufälligen Staubpartikeln sind, die ja in ihrer Menge schwanken und im Potentialgefälle wandern müßten.

Heidelberg, Januar 1903.

1) J. Friedländer, Zeitschr. f. physik. Chem. 38. p. 438. 1901.

(Eingegangen 30. Januar 1903.)

**14. Die sprechende Flamme;
von V. Gabritschewski und A. Batschinski.**

Im Winter 1901 haben wir uns mit einigen Prozessen am Induktorium beschäftigt. Als einer von den Polen diente eine Bunsensche Flamme. Dabei wurde 1. der später von Hrn. Möhlmann¹⁾ beschriebene elektroskopische Effekt bemerkt und 2. eigentümliche periodische Änderungen der Form der Flamme, die einen Nullpunkt aufgewiesen haben, ähnlich dem Möhlmannschen Nullpunkt am Elektroskop.²⁾ Als wir jetzt unsere Arbeit fortsetzten, hat sich gezeigt, daß die mit einem Pole metallisch verbundene, in einen anderen Raum entfernte Flamme sehr klar und deutlich den Ton des Simon-schen Unterbrechers wiederholte. Auf Grund der beschriebenen Erscheinung wurde ein neues Telephon konstruiert. Die Anordnung war folgende: Von den beiden Polen des Induktoriums wurden kurze Leitungen zu den (isolierten) Bunsenbrennern, einfachen Petroleumlampen oder sogar zu den Endchen der Kerzen geführt. In der Primärspule wird eine Batterie nebst einem für starke Ströme (bis 4 Amp.) passenden Mikrophon eingeschaltet. Der Abstand vom Mikrophon bis zur Flamme betrug in unserer Anordnung ungefähr 30 m. Die Flamme wiederholt vortrefflich das Singen, Pfeifen und sogar das Sprechen. — Die wesentliche Bedingung für den guten Erfolg des Versuches besteht in genügend großen Änderungen des Potentials an der Flammenelektrode. — Die Flamme singt lauter, wenn im Abstände zwischen den mit den beiden Polen verbundenen Lampen ein Draht sich befindet.

Moskau, Universität.

1) A. Möhlmann, Ann. d. Phys. 8. p. 768. 1902.

2) Dieses Phänomen wird bald näher mitgeteilt werden.

(Eingegangen 25. Februar 1903.)

**15. Berichtigung zu meiner Arbeit
„Über die Kapillarität der Lösungen.“
von Joh. Mathieu.**

In meiner Arbeit „Über die Kapillarität der Lösungen“¹⁾ habe ich am Schlusse einige Messungen angeführt, aus welchen sich unzweifelhaft eine Veränderlichkeit der Kapillaritätskonstanten mit dem Radius der Kapillare ergeben würde. Ich bedaure sehr, mitteilen zu müssen, daß bei einer Wiederholung der Messungen in unerklärlicher Weise meine früheren Resultate nicht haben bestätigt werden können.

Langweiler, im Februar 1903.

1) J. Mathieu, Ann. d. Phys. 9. p. 340 ff. 1902.

(Eingegangen 18. Februar 1903.)

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 11.

1. *Schallgeschwindigkeit und Verhältnis der spezifischen Wärmen der Luft bei hoher Temperatur; von Alfred Kaldhne.*

(Habilitationsschrift.)

Die sowohl praktisch als auch theoretisch wichtige Frage, wie sich das Verhältnis der spezifischen Wärmen eines Gases bei konstantem Druck und konstantem Volumen mit der Temperatur ändert, ist schon früher besonders von Kundt¹⁾ und Wüllner²⁾ für einige Gase, darunter auch Luft, untersucht worden, jedoch nur bei verhältnismäßig niedriger Temperatur. Erst in neuester Zeit hat Herr Stevens³⁾ auf Veranlassung von Quincke derartige Messungen mit Luft bis zu etwa 1000° ausgeführt, aus denen er auf eine beträchtliche Abnahme jenes Verhältnisses mit steigender Temperatur schließt. Nach seinen Messungen ist nämlich

$$\text{bei } 0^\circ \quad k = 1,4006,$$

$$\text{„ } 1000^\circ \quad k = 1,340,$$

wenn man wie üblich das Verhältnis der beiden Wärmen mit k bezeichnet.

Die von ihm benutzte Methode war die bekannte, in hoher Temperatur wohl allein brauchbare der Schallgeschwindigkeitsmessung, und zwar in einer von Quincke⁴⁾ angegebenen und als akustisches Thermometer beschriebenen Form. Sie beruht darauf, daß in der Laplaceschen Formel für die Schallgeschwindigkeit V außer dem Druck p und der Dichte d des

1) A. Kundt, Pogg. Ann. 135. p. 553. 1868.

2) A. Wüllner, Wied. Ann. 4. p. 321. 1878.

3) E. H. Stevens, Inaug.-Diss. Heidelberg 1900; Ann. d. Phys. 7. p. 285. 1902; Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 3. p. 54. 1901.

4) G. Quincke, Wied. Ann. 63. p. 66. 1897.

Gases auch das Verhältnis k vorkommt, das man also aus ihr berechnen kann, wenn man jene Größen kennt. Es ist nämlich

$$(1) \quad V = \sqrt{\frac{p k}{d}}.$$

Indem man nach dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz p und d durch ihre Werte bei 0° ausdrückt, erhält man

$$(2) \quad V = \sqrt{\frac{p_0 k (1 + \alpha t)}{d_0}},$$

worin α der thermische Ausdehnungskoeffizient des Gases (für Luft 0,00376) und t die Temperatur in Celsiusgraden ist. Unter der Voraussetzung, daß k konstant ist, stellt der Ausdruck

$$V_0 = \sqrt{\frac{p_0 k}{d_0}}$$

die Schallgeschwindigkeit bei 0° dar, und man kann schreiben

$$(3) \quad V = V_0 \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Die nach dieser Formel berechneten Werte von V waren nun alle größer als die beobachteten, was, wenn die Abweichungen nicht auf Beobachtungsfehlern beruhten, nur den Schluß zuließ, daß k mit steigender Temperatur abnimmt.

Daß derartige, im Sinne einer Verkleinerung der beobachteten V wirksamen Fehler in der Temperaturmessung vorhanden waren, erkannte ich bald nach Beendigung der Stevensschen Versuche bei einigen Messungen mit dem von ihm benutzten Thermoelement als wahrscheinlich. Zweifelhaft bleibt es, ob auch die akustischen Messungen trotz der großen auf sie verwandten Sorgfalt solche aufweisen. Auf jeden Fall ist aber bei Beurteilung der Resultate zu berücksichtigen, daß alle Fehler, welche bei der Bestimmung von V gemacht werden, mit dem doppelten Betrage in k eingehen, da dieses dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit proportional ist.

Das von Stevens angewandte akustische Thermometer von Quincke besteht aus einer langen geraden, an einem Ende mit ebenem Boden verschlossenen „Interferenzröhre“ und einem etwas längeren, dünnwandigen „Hörrohr“ von bedeutend kleinerem Durchmesser, das in jener ruht und längs einer Skala parallel mit sich verschoben werden kann. Von seinem äußeren Ende führt ein dickwandiger weicher Kautschukschlauch

zum Ohr des Beobachters. Erzeugt man nun vor der Mündung der Interferenzröhre einen einfachen Ton durch Anschlagen einer Stimmgabel, so bilden sich im Innern durch Reflexion an dem ebenen Boden stehende Wellen ans, deren Länge mit Hälfte des Hörrohres gemessen wird. Liegt nämlich das innere Ende desselben an einem Schwingungsbauch, d. h. einer Stelle größter Elongation der Luftteilchen, so ist der Ton, den man vernimmt, sehr schwach oder sogar unter günstigen Umständen unhörbar. In jeder anderen Lage ist der Ton stärker. Indem man nun auf zwei solcher Tonminima — oder auch, was aber weniger gut ist, auf die zwischenliegenden Maxima — durch Verschieben des Hörrohres einstellt, erhält man aus der Größe der Verschiebung direkt die halbe Wellenlänge des Tones, und somit, wenn dessen Schwingungszahl bekannt ist, die Schallgeschwindigkeit in der Röhre. In Bezug auf die technische Einrichtung des Apparates im einzelnen muß ich auf die Stevenssche Dissertation verweisen.

Damit man zwei Minimalstellen im Rohr hat, muß dasselbe, da am Boden ein Maximum liegt, jedenfalls länger sein als $\frac{3}{4}$ Wellenlängen. Da nun andererseits die Wellenlänge der Töne, welche man mit *langsam* abklingenden Stimmgabeln erzeugen kann, ziemlich groß ist, so müssen auch die Dimensionen des Interferenzrohres recht beträchtlich sein. Stevens hat Röhren von 150 cm Länge und einer Weite zwischen 2 und 4 cm benutzt. Diese Länge genügte aber bei höheren Temperaturen nur knapp, und dabei mußte schon eine Stimmgabel von 600 Schwingungen in der Sekunde genommen werden, die bereits verhältnismäßig rasch abklang. Schwerer wiegt jedoch der Umstand, daß es bei diesen Dimensionen große Schwierigkeiten macht, die nötige Rohrlänge auf ein und dieselbe Temperatur zu erhitzen und diese längere Zeit konstant zu halten. Auch die elektrische Heizung mittels einer um die Röhre gewickelten Nickeldrahtspirale ist schon recht unbequem und erfordert große Mittel. Verfügt man nicht über eine unabhängige Akkumulatornbatterie von genügender Spannung und Kapazität, so ist es gar nicht möglich, die nötige Konstanz der Temperatur zu erreichen. Stevens sagt über die Temperaturverteilung längs des Rohres, sie sei nicht so gleichmäßig gewesen, wie man hätte wünschen können. Nähere Angaben über die Größe

der örtlichen Schwankungen macht er leider nicht, die zeitlichen bespricht er gar nicht. Man kann daher auch nicht einmal vermutungsweise sagen, ob hieraus beträchtliche Fehler in den Resultaten entstehen konnten.

Dies bezieht sich übrigens nur auf die kurze Mitteilung in den *Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft*. Denn die in der Dissertation mitgeteilten Werte sind nicht mit elektrisch geheizten Öfen gewonnen worden, sondern die Interferenzröhre wurde in einem Kohlenofen erhitzt. Hier war es erst recht schwer, die Temperatur konstant zu halten; auch konnte nur ein so kurzes Stück erhitzt werden, daß lediglich die Viertelwellenlänge zu messen war, d. h. die Entfernung des ersten Minimums vom Boden der Röhre. Die Unsicherheit dieser Messung ist um so größer, als sich aus den Beobachtungen bei niedriger Temperatur ergeben hatte, daß diese Entfernung größer ist als die halbe Entfernung der beiden ersten Minima voneinander, im übrigen auch größere Schwankungen zeigt als diese. Das Verhältnis der beiden Längen war bei 20° etwa 0,510, bei 500° 0,504, woraus der Schluß gezogen wurde, daß es sich mit steigender Temperatur dem Wert 0,500 als Grenzwert näherte, der für 1000° als erreicht angenommen wurde. Natürlich ist diese Annahme unsicher, schien aber durch die späteren Versuche mit elektrischer Heizung bestätigt zu werden, da hier die Messung der halben Wellenlänge zu denselben Resultaten führte.

Noch eine andere Fehlerquelle ist zu berücksichtigen, die auch Stevens anführt und die der Methode an sich anhaftet, während die bisher besprochenen nur in Nebenumständen zu suchen sind. Er sagt darüber im § 7 seiner Dissertation:

„Auch begegnete ich einer Schwierigkeit, die öfters auftrat und mir ziemlich viel Mühe machte, daß nämlich die Stellen des Tonminimums von der Lage des Kopfes des Beobachters abhingen und zwar in verschiedener Weise für verschiedene Minimalstellen, sodaß selbst auf die Differenz solcher Ablesungen eine Wirkung ausgeübt wurde, wenn auch in geringem Maße. Es ist mir nicht gelungen eine vollständige Erklärung dieser sonderbaren Wirkung aufzufinden, obwohl dieselbe manchmal überraschend stark war und sogar bei einem Minimum unter Umständen 10 mm betrug.“

Die Erscheinung verschwindet fast ganz, wenn man den Kopf so hält, daß beide Ohren in einer Interferenzfläche der Stimmgabel liegen; sie scheint demnach, wie Stevens meint, auf der Interferenz der durch die Luft von der Stimmgabel direkt zum Ohr gelangenden Wellen mit den aus dem Hörrohr kommenden zu beruhen und wird daher um so stärker zur Geltung kommen, je schwächer der aus dem Interferenzrohr kommende Ton ist, verglichen mit dem Ton der Stimmgabel. Die Verhältnisse gestalten sich also um so ungünstiger, je geringer die Dichte des Gases im Rohr gegen die der äußeren Luft ist, weil diese dann weniger leicht und stark in Mitschwingung versetzt wird. Letzteres trifft in der Tat zu; denn je heißer die Luft im Interferenzrohr ist, um so schwächer ist der Ton im Hörrohr, um so schwieriger die Einstellung auf das Minimum, wie ich mich selbst überzeugt habe.

Man muß annehmen, daß Hr. Stevens diese Fehlerquelle, welche die Methode leider etwas subjektiv erscheinen läßt, vollkommen berücksichtigt und unschädlich gemacht hat. Ob die Methode, von dieser Unsicherheit abgesehen, völlig einwandfrei ist, soll hier nicht weiter erörtert werden. Doch scheint nach den bisherigen Erfahrungen der akustische Teil der Stevensschen Messungen keinen Bedenken zu unterliegen. Anders ist es, wie schon gesagt, mit dem thermometrischen.

Zur Temperaturmessung wurde ein Le Chateliersches Thermoelement aus Platin und einer 10 proz. Platin-Rhodiumlegierung nach den Angaben von Holborn und Wien ¹⁾ benutzt, zu welchem der 0,2 mm dicke Draht von Heräus in *Hanau* bezogen war. Die elektromotorische Kraft zwischen der erhitzten und den kalten, auf Zimmertemperatur befindlichen Lötstellen, welche die beiden Drähte mit Kupferdrähten verbanden, wurde nach dem bekannten Kompensationsverfahren von Poggendorff-Du Bois-Reymond durch Vergleich mit einem Normalclarkelement bestimmt. Hierbei war nur das Verhältnis zweier Widerstände zu messen, was leicht und sicher bis auf 1 pro mille auszuführen ist. Mit demselben Grade der Genauigkeit ist bei Einhaltung der nötigen Vorsichtsmaßregeln die elektromotorische Kraft des Clarkelementes bekannt, sodaß

1) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. 47. p. 128. 1892; 56 p. 395. 1895.

die elektrische Messung einwandfrei zu sein scheint. Die genaue Beschreibung des Verfahrens, das ich ebenfalls mit denselben Apparaten bei den gleich zu erwähnenden Kontrollmessungen angewandt habe, findet sich in Stevens Dissertation. Aus der elektromotorischen Kraft wurde die Temperatur der heißen Lötstelle berechnet auf Grund einer Aichungstabelle der *Phys.-Techn. Reichsanstalt*, welche das Element nach seinem Gebrauch durch Vergleichung mit einem ihrer Normalthermoelemente aichte. Diese von der Reichsanstalt gelieferten Werte liegen allen von Stevens veröffentlichten Resultaten zu Grunde.

Leider war aber, wie ich bald erkannte, die Aichung mit großen Fehlern behaftet. Den ersten Hinweis darauf lieferten mir Beobachtungen ¹⁾ der elektromotorischen Kraft des Thermoelementes, welche ich bei der Temperatur des siedenden Schwefels machte. Die nach der Aichungstabelle berechnete Siedetemperatur war um etwa 12° höher als sie nach den Messungen von Harker und Chappuis ²⁾, sowie von Callendar ³⁾ und Griffiths ⁴⁾ sein sollte ($444,5^{\circ}$ bei 760 mm Quecksilberdruck). Durch Vergleichung des Stevensschen Elementes mit einem neuerdings auf Grund der Holborn-Dayschen ⁵⁾ Messungen von der Reichsanstalt geeichten fand ich diese Differenz bestätigt, und es zeigte sich, daß das Stevenssche Element, nach der alten Tabelle gerechnet, bei 1000° die Temperatur um etwa 27° zu hoch angab. Damit verschwindet ein Teil (etwa 2 Proz.) der ca. 4 Proz. betragenden Verkleinerung, welche k bei 1000° gegenüber dem Werte bei 0° erleiden sollte. Es bleibt noch eine Verkleinerung von etwa 2 Proz. übrig, und es handelt sich darum zu entscheiden, ob

1) Diese Beobachtungen, welche ich unter Heranziehung anderer Thermoelemente aus einer neuen Drahtsendung mit mannigfach geänderten Versuchsbedingungen anstellte, um den Grund der Abweichung zu entdecken, den ich zunächst in einer Veränderung des Stevensschen Elementes suchte, habe ich nicht veröffentlicht. Sie sind aber durch Hrn. Geh. Rat Quincke der Reichsanstalt mitgeteilt worden.

2) J. A. Harker u. P. Chappuis, Beibl. 23. p. 962. 1899; Phil. Mag. (6) 3. p. 246. 1902.

3) H. L. Callendar, Beibl. 23. p. 962. 1899; Phil. Mag. (5) 47. p. 198. 1899.

4) H. L. Callendar u. E. H. Griffiths, Phil. Trans. Roy. Soc. 182. A. p. 43. 1891.

5) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.

diese ebenfalls ganz oder teilweise durch Beobachtungsfehler zu erklären ist.

Die fehlerhafte Aichung in der Reichsanstalt war dadurch entstanden, daß das zur Vergleichung benutzte Holborn-Wiensche Normalthermoelement sich durch Aufnahme von Silicium etc. im Lauf der Zeit geändert hatte.¹⁾ Der schädliche Einfluß dieses Stoffes sowie auch der Flammengase war erst später erkannt und daher bei der Aichung nicht berücksichtigt worden. Ähnliche Veränderungen konnten nun auch bei dem Stevensschen Element stattgefunden haben, da bei den ersten Versuchen das Interferenzrohr in einem Kohlenofen erhitzt wurde, wobei — wenigstens als ein poröses Chamottrohr benutzt wurde — Flammengase ins Innere eindringen. Die hierdurch bewirkte Änderung der elektromotorischen Kraft kann bei dem späteren Ausglühen in elektrisch geheizten Öfen ganz oder teilweise wieder zurückgegangen sein, sodaß das Element bei der Aichung vielleicht gar nicht mehr die Beschaffenheit hatte wie bei den Messungen. Es fehlt aber jeder Anhalt dafür, ob und in welchem Betrage eine solche Veränderung des Elementes stattgefunden hat, weil dasselbe nicht von Zeit zu Zeit mit einem Normalelement verglichen worden ist. Daher muß die Temperaturmessung auch abgesehen von den Fehlern der Aichung als sehr unsicher bezeichnet werden.

Prinzip der Methode.

Eine Wiederholung der Versuche mit Berücksichtigung der dabei gesammelten Erfahrungen schien nötig. Insbesondere war es wünschenswert Apparate von kleineren Dimensionen anwenden zu können, damit die oben geschilderten Übelstände bei der Heizung wegfielen oder wenigstens gemildert wurden. Dies Verlangen führte mit Notwendigkeit auf die Benutzung hoher Töne mit kurzer Wellenlänge. Die Kundtsche Methode der Staubfiguren, welche mit sehr hohen Tönen arbeitet, wäre deshalb geeignet, wenn ihre Anwendung nicht auf große Hindernisse stieße. Abgesehen von der Schwierigkeit, ein hinreichend leichtes feuerfestes Pulver für die Staubfiguren zu finden, ist es vor allem die Unmöglichkeit, die Figuren in jedem Augen-

1) Vgl. L. Holborn u. A. Day, *Ann. d. Phys.* 2. p. 548. 1900.

blick zu beobachten wegen der Undurchsichtigkeit des für die Röhren zu verwendenden Materiales, als welches hauptsächlich Porzellan und ähnliche Stoffe in Betracht kommen. Ich habe deshalb auf eine Methode zurückgegriffen, deren Prinzip von Quincke¹⁾ angegeben, und die später von Seebeck²⁾ und in etwas geänderter Form von Low³⁾ benutzt worden ist, und sie so umgestaltet, daß sie für Glühtemperaturen brauchbar ist. Man kann sie im Gegensatz zu der Stevensschen Interferenzmethode als „Resonanzmethode“ bezeichnen. Ihr Prinzip, das durch die in Fig. 1 gegebene schematische Darstellung des Apparates erläutert wird, ist das folgende: In einer geraden, beiderseits offenen Röhre AB ist ein Stempel S verschiebbar, der den Querschnitt der Röhre nahezu ausfüllt und so eine Luftsäule von variabler Länge abschließt, die von der Mündung

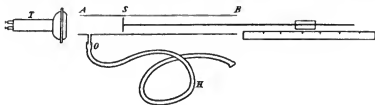


Fig. 1.

des Rohres bis zum Stempel reicht. Treten von der vor der Mündung des Rohres angebrachten Schallquelle T Wellen in diese ein, so wird die Luftsäule in stehende Schwingungen versetzt. Durch Veränderung der Länge der schwingenden Luftsäule läßt sich dieselbe auf den einfallenden Ton abstimmen, und man erhält bei bestimmten Lagen des Stempels, deren gegenseitige Entfernung jedesmal gleich der halben Wellenlänge des Tones ist, scharf ausgeprägte Maxima des Mitschwingens. Dazwischen liegen die Minima, auf die sich aber im allgemeinen nicht so gut einstellen läßt. Man hört das Anschwellen des Tones bei Annäherung des Stempels an die Maximumstellung schon deutlich, wenn das Ohr sich nur in der Nähe der Resonanzröhre befindet. Noch schärfer wird die Einstellung,

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 128. p. 190. 1866.

2) A. Seebeck, Pogg. Ann. 139. p. 104. 1870.

3) J. W. Low, Wied. Ann. 52. p. 641. 1894.

wenn man die Schwingungen durch eine nahe der Mündung der Röhre angebrachte Seitenöffnung *O* mittels des Kautschukschlauches *H* zum Ohre leitet. Störende Wirkungen von seiten solcher Wellen, die direkt von der Tonquelle durch die Luft zum Ohr gelangen, sind hier nicht zu fürchten, da der Kopf des Beobachters samt dem Hörschlauch immer in derselben Stellung bleibt, und nicht das Minimum, sondern das Maximum beobachtet wird.

Es galt nun die Apparate so einzurichten, daß die Methode für hohe Temperaturen brauchbar wird. Dies gelang leicht, indem alle Teile, die erhitzt werden mußten — Resonanzröhre und verschiebbarer Stempel mit Schaft —, aus Porzellan gemacht wurden. Low hatte seine Röhre vertikal gestellt und statt des Stempels eine Sperrflüssigkeit benutzt, Seebeck nahm einen dicht schließenden Stempel. Keins von beiden war hier brauchbar. Der Stempel mußte sogar mit ziemlich großem Spielraum gleiten, da die Gestalt und Größe des Röhrenquerschnittes etwas variierte. Jede Berührung der Stempelscheibe mit der Wand erzeugte aber ein Kratzen oder Quietschen, welches die Beobachtung störte oder ganz verhinderte. Deshalb durfte dieselbe auch nicht auf dem Boden der horizontal gelagerten Röhre aufliegen, sondern mußte frei in der Mitte schweben. Das wurde folgendermaßen erreicht. Dicht hinter der Stempelscheibe wurden, wie Fig. 2 zeigt, zwei rechteckige Plättchen aus starkem Glimmer zu beiden Seiten des Stempelschaftes mit Platindraht festgebunden. Damit der Glimmer nicht von dem Draht durchgedrückt wird, sind außen

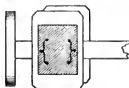


Fig. 2.

Platten aus Platinblech (in der Figur schraffiert) vorgelegt. Die Glimmerplatten, welche wie Schlittenkufen wirken, sind etwas breiter als die Stempelscheibe, aber so, daß der Stempel ohne zu klemmen leicht verschoben werden kann. Die Verschiebung ist absolut geräuschlos, besonders in glasierten Röhren. Nur sind diese oberhalb 900° nicht mehr brauchbar, weil der Schlitten an der weichwerdenden Glasur festklebt. Aus diesem Grunde konnte ich die Versuche leider nur bis zu dieser Temperatur ausdehnen.

Eine andere wesentliche Änderung betrifft die Tonquelle. Statt der sonst benutzten Stimmgabel habe ich ein Telephon¹⁾ gebraucht, dessen Membran durch einen von einem elektromagnetischen Saitenunterbrecher mit großer Regelmäßigkeit unterbrochenen Strom in Bewegung gehalten wurde. Dadurch fällt zunächst das lästige Anstreichen oder Anschlagen der Stimmgabel weg, außerdem aber auch die Schwierigkeit, welche die Einstellung bei schnellem Abklingen der Gabel bietet. Um die Tonhöhe genau einhalten zu können, habe ich eine Unterbrechungszahl von ca. 1024 pro Sek. benutzt, welche leicht mit einer im hiesigen Institut vorhandenen Königschen Stimmgabel kontrolliert werden konnte. Beobachtet wurde jedoch nicht mit diesem Ton, dessen halbe Wellenlänge in Luft bei 20° ca. 167 mm beträgt, sondern der genaueren Einstellung wegen mit den Obertönen, welche außer dem Grundton ziemlich stark vorhanden sind. Indem durch Einschaltung einer Quinckeschen Interferenzröhre in den Hörschlauch der Grundton und die tieferen Obertöne ausgelöscht wurden, blieben zwei sehr hohe Obertöne übrig, von denen aber meist der eine viel schwächer war als der andere, sodaß sie sich gegenseitig nicht störten. Besser wäre es freilich gewesen, einen Grundton von höherer Schwingungszahl zu benutzen, doch ließ sich die Saite des Unterbrechers nicht weiter verkürzen, und stärkere Spannung bewirkte nur eine verhältnismäßig geringe Ton-erhöhung, erschwerte aber die Unterhaltung der Schwingungen, weil der Strom stärker genommen werden mußte und alsdann die Saite zu sehr erwärmte. Bevor ich jedoch auf weitere Einzelheiten eingehe, will ich zunächst den Unterbrecher sowie die ganze Versuchsanordnung genauer beschreiben.

Versuchsanordnung.

Der Unterbrecher ist dem von Pupin²⁾ beschriebenen nachgebildet und von Hrn. Universitätsmechaniker W. Oehmke in Berlin angefertigt worden. In der nach einer Photographie

1) Ein Telephon wendet auch Hr. K. E. F. Schmidt (Ann. d. Phys. 7. p. 225. 1902) als Tonquelle an, um aus den mit demselben Resonanzapparat gemessenen akustischen Wellenlängen die Frequenz langsamer elektrischer Schwingungen zu bestimmen.

2) M. J. Pupin, Sill. Amer. Journ. (3) 45. p. 325. 1893.

hergestellten Abbildung der Versuchsanordnung auf p. 238 ist er im Hintergrunde auf der Wandkonsole sichtbar. Seine Wirkungsweise beruht wie die des später von Arons¹⁾ beschriebenen, im übrigen ganz gleichen Unterbrechers auf der mechanischen Einwirkung eines magnetischen Feldes auf einen stromdurchflossenen Leiter, die bekanntlich in einer bewegendenden Kraft senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes und zur Stromrichtung besteht. Über einen festen, 44 cm langen, 6 cm breiten und 7,5 cm hohen Holzrahmen ist eine von zwei Ebonitstegen gestützte Metallsaite gespannt, deren eines Ende fest ist, während das andere wie bei dem Wienschen²⁾ Unterbrecher an einem Hebel mit Schraube angebracht ist, mittels dessen ihre Spannung in weiten Grenzen variiert werden kann. Die Saite schwingt zwischen den Polen zweier Stahlmagnete, welche etwa 8 cm von der Mitte entfernt auf der Grundplatte des Rahmens befestigt sind, und zwar so, daß ihre Pole nach entgegengesetzten Richtungen weisen. Zur Erzeugung starker Felder sind die Polschuhe zugespitzt; die Polflächen, zwischen denen die Saite schwingt, bilden schmale Rechtecke von etwa 0,5 mm Höhe und 15 mm Breite. Aus demselben Grunde beträgt der zwischen ihnen bleibende Luftraum nur etwa 3 mm. Wird die Saite von einem elektrischen Strom durchflossen, so erleidet sie einen Antrieb nach oben oder unten, je nach der Richtung des Stromes. Zur Stromzuführung dienen drei dünne an die Saite angelötete Platindrähte, einer in der Mitte, die beiden anderen außen dicht neben den Magneten. Alle drei tauchen in Quecksilbernäpfchen, von denen die beiden äußeren mit Mikrometerschrauben gehoben und gesenkt werden können. Das mittlere Näpfchen wird mit dem einen, die beiden äußeren mit dem anderen Pol einer Stromquelle verbunden unter Vorschaltung von Widerstand. Die Stromrichtung — und Stellung der Magnetpole — ist so zu wählen, daß bei Stromschluß die Saite nach oben getrieben wird, sodaß die äußeren Platinstifte das Quecksilber verlassen und der Strom unterbrochen wird. Bei passender Spannung, die übrigens bei meinen Versuchen ziemlich hoch war, schwingt die Saite so, daß sie in der Mitte

1) L. Arons, Wied. Ann. **66**, p. 1177. 1898; **67**, p. 682. 1899.

2) M. Wien, Wied. Ann. **44**, p. 683. 1891.

einen Knoten besitzt. Der mittlere Platinstift bleibt also in Ruhe, während an den äußeren immer abwechselnd der Strom unterbrochen und geschlossen wird, sodaß die beiden Saitenhälften abwechselnd stromlos und stromführend sind. Ist alles genau eingestellt, vor allem die Höhe der Quecksilberkuppen, so genügt zum dauernden Betrieb die eine Saitenhälfte; man kann daher in den Stromkreis der anderen beliebig Widerstand einschalten. Ich habe den Unterbrecher in dieser Weise benutzt, indem ich in den zweiten Stromkreis das Telephon nebst Widerstand zur Regulierung der Tonstärke einschaltete.

Um hohe Töne zu geben, mußte der Draht möglichst leicht, also dünn und stark gespannt sein. Stahldraht von etwa 0,2 mm Dicke erwies sich dazu am besten. Er hat zwar den Nachteil hohen spezifischen Widerstandes und erwärmt sich deshalb merklich, hielt aber allein die nötige Spannung aus, während Messingdraht und noch mehr Kupferdraht zerriß. Drähte aus leichterem Material, etwa Aluminium, die ja bei gleicher Tonhöhe geringere Spannung nötig hätten, bieten wenig Vorteil, weil die Platinstiftchen schon einen erheblichen Teil des Saitengewichtes ansmachen, sodaß das Gewicht im ganzen nur wenig verringert werden kann. Kontaktstifte aus Kupfer- oder Messingdraht bewährten sich nicht wegen der Schwänzebildung mit dem Quecksilber.

Trotz der Erwärmung des Drahtes durch den Strom funktionierte der Unterbrecher, wie durch Zählung der Schwebungen mit einer Stimmgabel leicht zu konstatieren war, sehr regelmäßig, wenn man nur dafür sorgte, daß die Entfernung zwischen Platinstift und Quecksilberkuppe, die durch Abbrennen und Zerstäuben allmählich wächst, die gleiche bleibt. Außerdem muß der über dem Quecksilber befindliche Alkohol öfter — etwa alle 10 bis 15 Min. — mit einer kleinen Tropfpipette aufgefüllt werden. Um das Abbrennen des Platindrahtes und die Verschmutzung des Quecksilbers möglichst zu verhüten, ist es zweckmäßig, den Unterbrechungsfunken durch Parallelschaltung eines großen induktionsfreien Widerstandes oder eines kleinen Kondensators zur Funkenstrecke zu verkleinern. Ich benutzte einen Stöpselkondensator von etwa 0,02 Mikrof., wie solche bei der Widerstandsmessung

von Elektrolyten mit Wechselstrom angewandt werden. Den Funken ganz zu beseitigen ist nicht vorteilhaft. Wahrscheinlich werden durch die kleinen Explosionen die oxydierten Teilchen weggefeigt und die Berührungsstelle dadurch sauber erhalten.

Zum Betrieb genügt ein Akkumulator; besser ist jedoch eine höhere Spannung, von der dünne, schlechtleitende Schichten, die sich auf der Quecksilberoberfläche bilden können, leichter durchbrochen werden. Ich habe 4 Volt (2 Akkumulatoren) mit 5 Ohm Vorschaltwiderstand benutzt.

Unbedingt nötig zum sicheren Funktionieren ist möglichst unveränderliche Temperatur der Umgebung und Erschütterungsfreiheit. Aus letzterem Grunde wurde der Unterbrecher auf einer Wandkonsole aufgestellt, wo er vor den Erschütterungen des Fußbodens geschützt war. Durch passend angebrachte Schirme wurde die Strahlung des heißen Interferenzrohres und der Vorschaltwiderstände abgehalten.

Die Aufstellung der Resonanzröhre mit den zugehörigen Apparaten ist aus der Abbildung Fig. 3 zu ersehen. Man erkennt links die Resonanzröhre aus Porzellan von 72 cm Länge, 2,8 cm äußerem und 2,0 cm innerem Durchmesser, die als elektrischer Ofen eingerichtet ist. Dazu ist sie mit einer Nickeldrahtspirale umwickelt, deren Enden mit den auf der Abbildung sichtbaren Leitungsdrähten verbunden sind, welche zu den Polen einer Akkumulatorenbatterie von ca. 65 Volt führen. In den Stromkreis ist ein Regulierwiderstand und ein Präzisionsampèremeter von Siemens & Halske eingeschaltet; ein ebensolches Voltmeter liegt im Nebenschluß zu der Heizspirale, sodaß in jedem Augenblicke Stromstärke und Spannung und damit die im Ofen verbrauchte Energiemenge gemessen werden kann. Der Widerstand der Spirale betrug kalt etwa 1,2 Ohm, die Stromstärke schwankte zwischen 8 Amp. und 13 Amp. Bei dem zweiten außer diesem benutzten Ofen sind diese Werte etwa 2,0 Ohm, 5—8 Amp. Zur Vermeidung des Wärmeverlustes ist die Röhre mit zwei Lagen Asbestschnur von 5 mm Dicke umwickelt, deren unterste zugleich auch die Windungen des Nickeldrahtes gegeneinander isoliert. Um diese Schicht sind dann noch zwei Messingrohre von 40 und

60 mm Weite gelegt. Die auf der Abbildung sichtbare Umwicklung des äußeren Messingmantels mit Asbestschnur geschah deshalb, weil die Temperatur in der Mitte des Heizrohres höher war als an den Enden. Das Rohr ruht in zwei Gabeln, die aus starken eisernen Spiegelösen durch Ausfeilen hergestellt und an den Enden eines schmalen Grundbrettes von passender Länge befestigt sind.

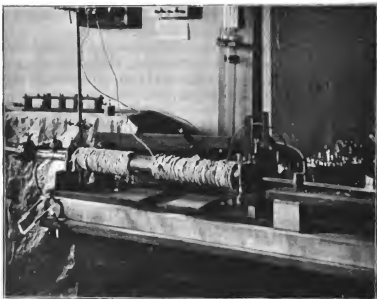


Fig. 3.

Der ganze Apparat steht auf einem starken, glattgehobelten Balken, der auf dem zum Teil sichtbaren Tisch ruht. Derselbe Balken trägt — rechts vorn — die Schiene, auf welcher der verschiebbare Stempel längs einer hölzernen Skala gleitet. Man sieht den weißen Stempelschaft, eine dünne Porzellanröhre, die an ihrem vorderen in der Resonanzröhre verborgenen Ende die Scheibe — ebenfalls aus Porzellan — trägt. Das äußere Ende steckt fest in einem Kork, der auf ein mit Index versehenes Glasplättchen aufgekittet ist, welches neben der Holzskala entlang gleitet. Die Verschiebung ist sehr sanft, die Ablesung ohne Mühe bis auf ein Zehntelmillimeter genau.

Links ist dicht vor der Mündung der Röhre das Telephon, ein gewöhnliches Hörtelephon von Siemens & Halske, in einer Stativklammer befestigt. Als Mündung dient ein gläserner Rohrstutzen von genau gleicher Weite und Wandstärke wie das Porzellanrohr. Die glattgeschliffenen Endflächen beider schließen dicht aneinander, und eine federnde Messinghülse, die außerdem noch mit Draht zusammengebunden ist, hält den Stutzen unverrückt in seiner Lage fest.

Etwa 30 mm vom Ende entfernt ist ein kurzes, 5 mm weites Seitenrohr am Stutzen angeschmolzen, auf welches das Ende des Hörschlauches geschoben wird. Diese Entfernung hat sich durch Probieren als zweckmäßig herausgestellt, indem dabei die Intensität der zur Messung benutzten Obertöne am größten war. In den Hörschlauch aus dickwandigem Kautschuk ist, wie die Figur zeigt, eine Quinckesche Interferenzröhre aus Glas und Kautschuk eingesetzt, deren einer Schenkel ca. 200 mm länger ist als der andere, d. h. etwas mehr als die halbe Wellenlänge des Grundtones, um diesen (und die tieferen Obertöne) anzulöschen oder wenigstens möglichst zu schwächen. Die Länge des Schlanche, der vorn ein in den äußeren Gehörgang passendes Ansatzstück aus Hartgummi trägt, ist von großem Einfluß auf die relative Intensität der verschiedenen Obertöne. Durch Ausprobieren wurde auch hier die passende Länge gefunden. Die Gesamtlänge der Luftstrecke von der Wand des Resonanzrohres bis zum Ohr beträgt etwa 180 cm.

Außer diesem 20 mm weiten Rohr, das mit II bezeichnet werden soll, benutzte ich noch ein anderes Rohr I, dessen Dimensionen sind: Länge 60 cm, lichte Weite 12,5 mm, Wanddicke 2 mm. Der Stempel bestand aus einem 3 mm dicken Porzellanstab, der aus vier Stücken von je 15 cm Länge im Leuchtgas-Sauerstoffgebläse zusammengesetzt war und vorn eine 3 mm dicke Scheibe aus Porzellan trug. Diese war in der Mitte durchbohrt und auf das vordere Ende des Stabes mit Chamotte aufgekittet. In der Gebläseflamme erhitzt, hielt diese Kittung vollkommen fest. Der Stempelschaft des weiten Rohres II bestand aus einer dünnwandigen Porzellanröhre, in welche die mit kurzem Stiel versehene Stempelscheibe mit etwas Asbestschnur umwickelt eingesetzt war. Längs des

Schaftes war das zur Temperaturmessung benutzte Thermo-
element mit Platindraht durch ausgeglühte Asbestpappe isoliert
befestigt. Seine Lötstelle lag dicht hinter der Scheibe.

Die Verwendung zweier Röhren war erforderlich zur
Extrapolation der beobachteten Werte der Schallgeschwindig-
keit bez. Wellenlänge auf unendlich großen Rohrdurchmesser.
Wegen des Einflusses der Röhrenwand sind beide nämlich
kleiner als im freien Luftraum. Kirchhoff¹⁾ hat die Kor-
rektur theoretisch behandelt und durch eine Formel dar-
gestellt, welche den Röhrenhalbmesser r , die Schwingungszahl
des Tones n und eine Konstante γ enthält, in welche die
Koeffizienten der Wärmeleitfähigkeit und der inneren Reibung
des Gases eingehen. Mit Benutzung dieser Korrektionsformel
erhält man die Schallgeschwindigkeit im unbegrenzten Luft-
raum, wenn man sie in einer Röhre vom Halbmesser r ge-
messen hat. Besser ist es jedoch, wie Stevens getan hat,
da γ nur ungenau bekannt ist, die Schallgeschwindigkeit in
zwei verschieden weiten Röhren zu messen und mit Hilfe der
Kirchhoffschen Formel unter Elimination von n und γ den
Wert für unendlich großen Röhrendurchmesser aus jenen beiden
zu extrapolieren.

Die Temperaturmessung.

Hinter dem Resonanzrohr stehen auf dem Tisch — während
der Beobachtungen durch Schirme gegen die Strahlung ge-
schützt — das Präzisionsvoltmeter und Ampèremeter für den
Heizstrom. Rechts erblickt man einen Teil des Kompensations-
apparates zur Messung der elektromotorischen Kraft des
Le Chatelierschen Thermoelements. Der von Siemens
& Halske nach den Angaben von Lindeck angefertigte
Apparat enthält zwei Widerstandsätze, welche mit einem
Präzisionsmilliampèremeter in den Stromkreis eines Akkumu-
lators eingeschaltet werden, und von denen der eine — ein
Kurbelwiderstand — zur Regulierung der Stromstärke dient.
Er besteht aus drei Dekadenwiderständen von je 1, 10 und
100 Ohm und einem Schleifdraht zur kontinuierlichen Variation
des Widerstandes. Der andere enthält Präzisionswiderstände
von 0,05 und 0,1 Ohm, an deren Enden die zu messende

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134. p. 177. 1868.

elektromotorische Kraft, hier also die Enden des Thermo-
elementes, unter Zwischenschaltung eines empfindlichen Gal-
vanoskopes angelegt wird. Als solches dient ein auf derselben
Grundplatte befestigtes Präzisionsmillivoltmeter, dessen Wider-
stand ca. 151 Ohm beträgt, und bei dem 1 Skt. Ausschlag
 $0,67 \cdot 10^{-6}$ Amp. entspricht. Beide Instrumente sind nach dem
Deprez-d'Arsonvalschen Prinzip gebaut, das übrigens zuerst
von W. Thomson angewandt worden ist, und deshalb un-
empfindlich gegen magnetische Störungen. Ist der Widerstand
des Schließungskreises, in welchem das Millivoltmeter liegt,
klein gegen den Widerstand des letzteren, so bewirkt die
elektromotorische Kraft $100 \cdot 10^{-6}$ Volt 1 Skt. Ausschlag. Da
die elektromotorische Kraft des nach dem Vorgange der

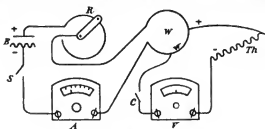


Fig. 4.

Phys.-Techn. Reichsanstalt gebräuchlichen Thermo-
elementes aus Platin und einer 10 proz. Platinrhodiumlegierung pro
 1° Temperaturdifferenz zwischen $8 \cdot 10^{-6}$ und $9 \cdot 10^{-6}$ Volt
liegt, so entspricht 1 Skt. Ausschlag etwa $11-12^\circ$ Temperatur-
differenz. Die Einstellung läßt sich bei der beträchtlichen
Größe der Skalenteile unter Benutzung eines Stromwenders
genauer als bis auf $\frac{1}{30}$ Skt. ausführen, sodaß der mögliche
Fehler bei der Einstellung etwa $0,5^\circ$ betragen kann. Viel
eher findet die Genauigkeit der Messung eine Grenze bei der
Ablese der Stromstärke am Milliampèremeter.

Das Schema des Apparates zeigt Fig. 4, aus der zugleich
die Lage der einzelnen Teile ersichtlich ist. *B* ist die Batterie
— ein oder zwei Akkumulatoren —, *R* der Kurbelregulier-
widerstand, *w* der Präzisionswiderstand, *A* das Milliampè-
meter, *S* ein Stromschlüssel, der nach Belieben auf momentanen
oder auf Dauerkontakt gestellt werden kann; *Th* ist das Thermo-

element, das unter Zwischenschaltung des Millivoltmeters F von einem der Widerstände w abgezweigt ist; C ist der Kommutator. Wird die Stromstärke i im Hauptkreis so reguliert, dass I stromlos ist, so ist die elektromotorische Kraft an den Enden von w , nämlich $e = iw$, gleich der zu messenden elektromotorischen Kraft des Thermoelementes. Man erhält letztere also, da w gleich 0,05 Ohm oder ein Vielfaches hiervon ist, durch Multiplikation der in Milliampère abgelesenen Stromstärke mit jenem Widerstand sehr einfach in Millivolt, oder noch bequemer in Mikrovolt, wenn man w in Tausendsteln Ohm ausdrückt. Bei der Ablesung der Stromstärke kann man Zehntelskalenteile = Zehntelmilliampère gut schätzen, sodaß die hieraus fließende Unsicherheit im günstigsten Falle, d. h. bei dem Maximalausschlag von 150 Skt. $\frac{1}{1500}$ beträgt. Für gewöhnlich ist sie größer, bei Temperaturen von 300° — entsprechend etwa 45 Skt. — ungefähr $\frac{1}{450}$ oder mehr als 2 pro mille. In Celsiusgraden ist die Unsicherheit, je nachdem man von 0,05 Ohm oder von 0,1 Ohm abzweigt, etwa $0,6^{\circ}$ bez. $1,2^{\circ}$. Von der gleichen Größe wie die Ablesungsfehler, sind auch die Korrekturen, welche an den Ablesungen des Milliampèremeters anzubringen sind, nm die wahre Stromstärke zu erhalten. Damit ist wohl die Genauigkeit, welche man mit dem Apparat erreichen kann, genügend charakterisiert.

Zur Kontrolle des Milliampèremeters sind in dem Widerstandssatz W noch drei Widerstände untergebracht, die so gewählt sind, daß die Stromstärken 50 bez. 100 bez. 150 Milliampère die elektromotorische Kraft eines Normalkadmiumelementes (1,0186 Volt bei 20°) kompensieren, das an ihre Enden angelegt wird. Dadurch hat man eine einfache Kontrolle über die Richtigkeit der Angaben des Instrumentes für diese drei Stromstärken. Um auch an den übrigen Stellen der Skala die Angaben des Instrumentes zu prüfen, habe ich dasselbe nach dem Kompensationsverfahren mit einem Normalkadmiumelement geachtet. Die Schaltung war dieselbe wie in Fig. 4, nur wurde W durch einen Rheostaten von Wolff ersetzt, denselben, den auch Hr. Stevens benutzt hat. Die Stromstärke im Hauptkreis ist gleich dem Quotienten

$$\frac{\text{E. M. K. des Normalelementes}}{\text{Abzweigwiderstand}},$$

sodaß, die Richtigkeit des Rheostaten vorausgesetzt, alle Strommessungen auf die elektromotorische Kraft des Normalelementes zurückgeführt sind. Auch jene Voraussetzung läßt sich noch beseitigen, wobei zugleich die Notwendigkeit wegfällt, die kleinen Widerstände w von 0,05 und 0,1 Ohm des Lindeckschen Apparates auf ihre absoluten Werte zu prüfen. Bei der von mir eingeschlagenen Aichungsmethode kommt es nämlich schließlich nur darauf an, das Verhältnis dieser Widerstände zu der Einheit des Rheostaten zu kennen, eine Aufgabe, die nach demselben Kompensationsverfahren leicht zu lösen war. Die Aichung des Ampèremeters erfolgt nämlich nach der Formel

$$i = \frac{e_0}{w_0},$$

wobei e_0 die elektromotorische Kraft des Normalelementes, w_0 ein Widerstand des Rheostaten ist. Die zu messende elektromotorische Kraft erhält man als

$$e = i w.$$

wo w der Abzweigwiderstand des Kompensationsapparates ist. Durch Einsetzen von i ergibt sich:

$$e = \frac{w}{w_0} e_0.$$

Es war also nur noch nötig die Richtigkeit des Rheostaten in sich zu prüfen, was nach den bekannten Kalibrierungsmethoden geschah. Alle diese Messungen konnten mit einem mittleren Fehler von ± 1 pro mille ausgeführt werden, und da auch die elektromotorische Kraft des Normalkadmiumelementes bei sorgfältiger Beobachtung aller Vorschriften nach den neueren Untersuchungen auf mindestens 1 pro mille sicher ist, so kann die Messung der elektromotorischen Kraft des Thermoelementes je nach der Größe der am Milliampèremeter vorhandenen Ausschläge auf 1 bis 2 pro mille genau angenommen werden.

Schwieriger ist es, den Fehler abzuschätzen, mit dem die aus der elektromotorischen Kraft abgeleitete Temperatur behaftet sein kann. Holhorn und Day¹⁾ gehen als mög-

1) l. c. p. 539.

lichen Fehler ihrer absoluten Messungen bis zu $1200^{\circ} \pm 1^{\circ}$ an. Die Vergleichung des von mir benutzten und von der Reichsanstalt geachteten Thermoelementes mit dem Normalelement derselben ist nach deren Angabe ebenfalls auf $\pm 1^{\circ}$ genau. Danach wäre der mögliche Fehler bei Messungen mit dem Element auf $\pm 2^{\circ}$ zu schätzen. Ich glaube jedoch, daß diese Genauigkeit jedenfalls nur unter sehr günstigen Umständen erreicht werden kann, und daß man im allgemeinen die Fehlergrenze etwas weiter wird ausdehnen müssen, wenigstens bei den höheren Temperaturen. Allerdings geben zwei Aichungen, welche ich mit siedendem Diphenylamin und Schwefel vor der Einsendung an die Reichsanstalt ausführte, ganz überraschend gute Übereinstimmung mit den Werten, welche aus der Aichungstabelle berechnet wurden. Es wurde beobachtet mit siedendem Schwefel beim Barometerstand $B = 751,0$ mm die elektromotorische Kraft $3620 \cdot 10^{-6}$ Volt, wenn die kalten Lötstellen die Temperatur 0°C . hatten. Nach der von Callendar¹⁾ gegebenen Formel für die Abhängigkeit des Schwefelsiedepunktes vom Druck

$$t = 444,5^{\circ} + (B - 760) 0,082^{\circ}$$

berechnet sich die Temperatur zu $443,8^{\circ}$. Die Aichungstabelle der Reichsanstalt liefert für die angegebene elektromotorische Kraft die Temperatur $443,8^{\circ}$, d. h. genau dasselbe. Acht Tage später wurde bei $751,5$ mm Barometerstand $3621 \cdot 10^{-6}$ Volt gefunden, während zwei Jahre früher mit dem älteren Stevensschen Apparat bei $752,0$ mm $3622 \cdot 10^{-6}$ Volt beobachtet worden war. Diese ganz unabhängig voneinander gewonnenen Werte stimmen also über Erwarten gut miteinander überein. Mit Diphenylamin²⁾ fand

1) l. c.

2) Der Siedepunkt des Diphenylamins wurde nach der Formel berechnet

$$t = 303,8^{\circ} + (B - 745) 0,086^{\circ}.$$

Die Siedetemperatur $303,8^{\circ}$ bei 745 mm Barometerstand war für den im hiesigen Institut vorhandenen Vorrat an Diphenylamin vor längerer Zeit mit dem Luftthermometer genau bestimmt worden. Der Koeffizient $0,086$, welcher die Temperaturänderung pro 1 mm Quecksilber Druckänderung darstellt, wurde bei der schon früher erwähnten Vergleichung mehrerer

ich bei 755,0 mm 2312. 10^{-6} Volt. Die Temperatur ist 304,7°, während die Tabelle für 2312 Mikrovolt die Temperatur 305,4° gibt mit 0,7° Differenz gegen jene. Zwei Jahre früher war bei 752,3 mm Quecksilberdruck $E = 2302.10^{-6}$ Volt. Die Tabelle gibt hierfür 304,3°, während aus dem Barometerstand sich 304,4° berechnet. Auch hier ist die Übereinstimmung ausgezeichnet, obwohl 300° nahe der unteren Grenze für die Anwendbarkeit der Thermoelemente aus Platin und Platinrhodium liegt und die Genauigkeit des Kompensationsapparates in dieser Gegend zu wünschen läßt.

Das Element (Nr. 3), bei der Aichung von der Reichsanstalt als P. T. R. 1666 bezeichnet, stammt aus demselben Drahtvorrat von Heräus, dem die Normalelemente der Reichsanstalt von Holborn-Wien und Holborn-Day entnommen sind, und weicht nur wenig von der Tabelle ab, welche die Letztgenannten für ihr Normalelement veröffentlicht haben.¹⁾ Um die Konstanz seiner Angaben während des Gebrauches zu prüfen, wurde es vor und nach den Versuchen mit einem anderen aus demselben Drahtvorrat hergestellten (Nr. 6) verglichen. Beide Elemente stimmten jederzeit innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung, d. h. bis auf 1 pro mille überein. Zuweilen war der Unterschied noch erkennbar, aber nicht meßbar. Nach den Versuchen mit Resonanzrohr I wurde Element Nr. 3 zur Aichung eingesandt und dient seitdem als Normalelement des hiesigen Institutes. Bei Rohr II wurde das Element Nr. 6 benutzt, das auch wieder nach Beendigung der Versuche mit jenem verglichen und unverändert gefunden wurde.

Die Temperatur wurde auf der ganzen in Betracht kommenden Länge des Resonanzrohres von Zentimeter zu Zentimeter gemessen, und das Mittel aus den Ablesungen zwischen den Endpunkten der beobachteten halben Wellenlänge genommen. Auf gleichmäßige Erwärmung des Rohres wurde große Sorgfalt verwandt, indem zunächst die Heizspirale sehr regelmäßig gewickelt

Thermoelemente erhalten, bei der zufälligerweise der Barometerstand innerhalb weniger Tage sehr stark schwankte. Seine Genauigkeit ist nicht groß, genügt aber, wenn der Barometerstand B nicht zu weit von 745 mm abweicht.

1) l. c. p. 522.

wurde, und bei den Versuchen die kälteren Partien durch Umlegen von Messingschutzmänteln oder Umwickeln mit Asbestschnur noch besonders geschützt wurden. Die örtlichen Abweichungen vom Mittel betragen auch bei den höchsten Temperaturen gewöhnlich weniger als 10° , nur an einzelnen Stellen gehen sie zuweilen darüber hinaus, besonders bei den letzten Versuchsreihen. Die allmähliche Verschlechterung dieser Art von elektrischen Öfen rührt von dem Verbrennen des Nickeldrahtes her. Da an den heißeren Stellen der Draht schneller verbrennt, wächst der Widerstand dieser Partien und es wird auf ihnen mehr Wärme erzeugt als auf anderen gleichlangen Strecken des Rohres, wodurch wieder die Verbrennung noch mehr beschleunigt wird. Die Öfen funktionieren deshalb zu Anfang am besten. Je höher übrigens die mittlere Temperatur des ganzen Rohres ist, desto schneller und besser gleichen sich Unterschiede derselben durch Strahlung aus, wie auch Holborn und Wien beobachtet haben.

Die Durchmessung, welche je nach der Größe der Wellenlänge bis zu 35 Einzelmessungen umfaßte, dauerte etwa 45 Min bis 1 Stunde. Wegen der langen, noch durch die akustischen Messungen vergrößerten Beobachtungsdauer mußte die Temperatur zeitlich sehr konstant sein. In dieser Hinsicht leistet nun die elektrische Heizung ganz Vorzügliches. So wurde z. B. an einem Tage bei 450° innerhalb 3 Stunden ein Steigen der Temperatur um nur 2° und ein andermal bei 700° in derselben Zeit ein Fallen um 3° beobachtet.

Gewöhnlich verfuhr ich bei den Messungen folgendermaßen: Nach dem Anheizen bis in die Nähe der gewünschten Temperatur wurde gewartet, bis dieselbe konstant geworden war. Während dieser Zeit wurde die dem Ofen pro Sekunde zugeführte Energiemenge dauernd kontrolliert und wenn nötig durch Änderung des Vorschaltwiderstandes reguliert. Gleichzeitig wurde an mehreren Stellen des Rohres ab und zu die Temperatur gemessen. Änderte sich dieselbe nicht mehr, was je nach der gerade benutzten Temperatur in 1 bis $1\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Beginn des Heizens eintrat, so wurde die Wellenlänge gemessen, hierauf die Temperaturmessung längs der ganzen Röhre ausgeführt, dann wieder mehrere Male die Wellenlänge und zum Schluß die Temperatur an einigen Stellen, meist

von 5 zu 5 cm, bestimmt. Während der Beobachtungen wurde von Zeit zu Zeit die Luft des Rohres durch neue, in einer Trockenröhre von Feuchtigkeit befreite, ersetzt. Dazwischen mußte natürlich Stromstärke und Spannung kontrolliert, sowie auch der Saitenunterbrecher in Ordnung gehalten werden. Durch die Häufung dieser verschiedenen Tätigkeiten, die eine stundenlange dauernde Inanspruchnahme aller Kräfte bedeutet, wurde der Genauigkeit eine gewisse Grenze gezogen; besonders trat gegen Ende jeder Versuchsreihe stets eine merkbare Ermüdung des Ohres ein.

Was den akustischen Teil der Beobachtungen betrifft, so muß überhaupt gesagt werden, daß er, soweit die Übereinstimmung der einzelnen Werte untereinander in Frage kommt, der unsicherste ist. Auch die Mittelwerte der einzelnen Beobachtungssätze weichen zum Teil noch erheblich voneinander ab. Die Genauigkeit der Einstellung auf das Tonmaximum hängt außer von den Eigenschaften des Apparates (Tonquelle etc.) in hohem Maße von der körperlichen Disposition des Beobachters ab, einem Faktor, den man nicht zahlenmäßig in Rechnung setzen kann. So konnte ich an manchen Tagen nur schwierig mit derjenigen Genauigkeit messen, die sonst immer erreicht wurde. Der Ermüdung des Ohres als einer ebenfalls in der Person des Beobachters liegenden Fehlerquelle habe ich schon gedacht. Dazu kommen äußere, die Arbeit erschwerende Ursachen, vor allem das schon bei den Stevensschen Versuchen erwähnte Abnehmen der Tonintensität mit steigender Temperatur wegen der starken Verdünnung der Luft durch die Erhitzung, das noch vermehrt wird durch die unvermeidliche Reflexion an der Grenze der kalten und heißen Luft. Die Maxima sind deswegen bei hoher Temperatur weniger scharf und auch der Grundton tritt störend auf. Da die Schallgeschwindigkeit und mit ihr die Wellenlänge proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur wachsen, also langsamer als diese, während die Dichte proportional der ersten Potenz abnimmt, so werden die Schwierigkeiten mit steigender Temperatur immer größer, die Fehler relativ bedeutender. Dies ist übrigens auch wohl ein wesentlicher Grund dafür, daß das Quinckesche akustische Thermometer bisher keine weitere Anwendung gefunden hat: es wird eben in hoher Temperatur unempfindlich.

Beobachtungen bei Zimmertemperatur.

Wie schon früher bemerkt wurde, habe ich nicht den Grundton mit 1024 Schwingungen pro Sekunde benutzt, sondern zwei hohe Obertöne, hauptsächlich den siebenten, dessen Schwingungszahl also ca. 7170 ist. Da seine Wellenlänge nur $\frac{1}{7}$ von jener des Grundtones ist, so kann man bei gleicher relativer Genauigkeit der Einstellung doch absolut genauer messen, wenn man die Gesamtlänge mehrerer Wellen mißt, wie es ja auch bei den Kundtschen Staubfiguren geschieht. Um nicht durch den noch vorhandenen Rest des Grundtones gestört zu werden, habe ich immer solche Maxima benutzt, welche auf Minima des Grundtones fallen. Ihre Entfernung ist somit stets gleich der halben Wellenlänge desselben oder einem Vielfachen derselben. Alle in den Tabellen mitgeteilten Werte der halben Wellenlänge gelten deshalb für den Ton mit der Schwingungszahl 1024. Die Richtigkeit dieser Zahl habe ich nicht geprüft, da ja nur die Änderung der Wellenlänge mit der Temperatur gemessen werden sollte.

Zunächst wurde in Rohr I eine Anzahl Beobachtungen bei Zimmertemperatur gemacht, welche die Brauchbarkeit der Methode und des Apparates bewiesen. Aus denselben wurde die Wellenlänge bei 0° berechnet nach der Formel

$$\lambda_t = \lambda_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad (\alpha = 0,00367),$$

die sich aus der Formel (3) für die Schallgeschwindigkeit ergibt, da $\lambda = v/n$ ist. Diese Beobachtungen wurden zum Teil zwischen denen bei höheren Temperaturen ausgeführt und umfassen 18 Beobachtungssätze. Anfangs glaubte ich mit dem einen Rohr auskommen zu können, da wegen der hohen Schwingungszahl die Kirchhoffsche Korrektion mit der von Stevens bestimmten Konstante γ berechnet nur etwa 4 pro mille betrug. Es zeigte sich jedoch bald notwendig, noch ein zweites Rohr zu benutzen und die Wellenlänge für unendlich großen Durchmesser zu extrapolieren. Die Beobachtungen bei Zimmertemperatur, welche ebenso wie bei I gemacht wurden, umfassen acht Sätze. Tab. 1 und 2 geben eine Zusammenstellung aller Werte und die daraus abgeleiteten Mittelwerte bei 0°, welche den weiteren Rechnungen zu Grunde liegen; $2r$ ist der Rohrdurchmesser.

Tabelle 1.

Rohr I; $2r = 12,5$ mm.

t	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda_0}{2}$ mm
19,0°	167,17	161,63
19,0	166,41	160,87
18,7	167,34	161,89
18,7	167,35	161,90
18,0	165,62	160,38
18,0	166,95	161,74
19,0	166,87	161,33
19,0	167,47	161,93
17,3	167,02	161,99
17,3	166,26	161,23
18,2	166,83	161,53
18,2	166,90	161,60
18,7	167,33	161,88
18,7	168,82	163,37
18,7	166,16	160,71
18,5	166,04	160,68
18,5	166,59	161,23
18,5	168,85	163,49
		2909,38 : 18 = 161,63 mm

Tabelle 2.

Rohr II; $2r = 20,0$ mm.

t	$\frac{\lambda'}{2}$ mm	$\frac{\lambda_0'}{2}$ mm
19,8°	166,90	161,09
19,8	168,17	162,36
19,8	167,88	162,07
18,7	168,15	162,70
18,7	167,26	161,81
17,7	167,18	162,02
17,7	166,61	161,45
18,1	167,08	161,81
		1295,31 : 8 = 161,91 mm

Jeder Wert $\lambda/2$ ist die Differenz zweier Zahlen, die selbst wieder Mittelwerte aus mehreren — meist zehn — Einzelbeobachtungen sind. Als Beispiel gebe ich zwei Beobachtungsreihen aus meinem Journal für Rohr I in Tab. 3.

Tabelle 3.

Rohr I; $t = 17,3^\circ$.

2. Max.	1. Max.	2. Max.	2. Max.	1. Max.	2. Max.
mm	mm	mm	mm	mm	mm
247,5	78,5	246,2	216,2	49,0	215,0
245,6	80,0	248,0	217,2	50,2	218,2
245,7	80,4	245,5	216,8	49,5	217,0
245,6	79,3	248,3	216,9	51,7	217,2
247,8	80,2	245,0	218,0	49,0	217,2
245,4	80,0	246,8	217,0	50,8	216,6
248,2	81,5	246,2	215,7	50,8	216,1
248,5	80,0	246,4	215,2	53,0	217,9
249,3	80,2	248,0	216,7	50,5	215,6
248,0	80,7	246,7	215,0	51,0	216,8
Mittel 247,16	80,08	246,71	216,47	50,55	216,76

Die Werte für das 2. Maximum in Tab. 3 geben als Mittel 246,93 bez. 216,62 mm. Wegen der Fehler des Maßstabs, die durch sorgfältige Vergleichung mit einem Normalmaßstab bestimmt und häufig kontrolliert wurden, erhält man schließlich als Lage der Maxima

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{247,20 \text{ mm} + 216,88 \text{ mm}}{2} = 167,02 \text{ mm}$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{80,18 \text{ mm} + 50,62 \text{ mm}}{2} = 166,26 \text{ mm}$$

woraus die angegebenen Werte der halben Wellenlänge hervorgehen. Die Übereinstimmung beider ist nicht besonders gut, die Reihen sind willkürlich herausgegriffen. Die verschiedene Lage der Maxima erklärt sich durch verschiedene Länge der gläsernen Rohrstutzen, welche als Mündung dienen.

Aus den Mittelwerten der Tab. 1 und 2 erhält man die halbe Wellenlänge in freier Luft

$$\frac{\lambda_0}{2} = 162,37 \text{ mm.}$$

Die zur Berechnung dienende Formel ergibt sich aus der Kirchhoffschen Formel

$$(4) \quad v = \frac{V}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}}},$$

oder angenähert, wenn $\gamma/2r\sqrt{\pi n}$ klein ist gegen 1,

$$(4a) \quad v = V \left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}} \right).$$

Hierin bedeuten V und v die Schallgeschwindigkeit in freier Luft und in einem Rohr vom Durchmesser $2r$, n die Schwingungszahl und γ die schon erwähnte Konstante. Dieselbe Formel gilt natürlich, wenn man v und V mit λ und Λ vertauscht. Indem man für Rohr II v' und r' schreibt, erhält man

$$V - v = \frac{V\gamma}{2r\sqrt{\pi n}},$$

$$V - v' = \frac{V\gamma}{2r'\sqrt{\pi n}}.$$

Multipliziert man mit r bez. r' nach links und setzt die linken Seiten einander gleich, so folgt:

$$V = \frac{rr - v'r'}{r - r'},$$

oder, indem man die Wellenlängen einführt,

$$\Lambda = \frac{\lambda r - \lambda' r'}{r - r'}.$$

Diese Formeln sind aber nur dann brauchbar, wenn die Korrektur

$$\frac{V - v}{V} = \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}}$$

ein kleiner Bruch ist, da diese Voraussetzung schon in der Näherungsformel (4a) steckt. Sonst geben sie etwas zu kleine Werte. Stevens hat sie noch benutzt, wenn die Korrektur 5 Proz. betrug; in einem Falle wird dadurch V um 1 pro mille kleiner als bei Anwendung der genauen Formel (4), aus der sich auch leicht die entsprechende Extrapolationsformel herleiten läßt, die nur etwas unbequemer ist.

Beobachtungen bei hoher Temperatur.

Der Wert $\lambda_0/2 = 162,37$ mm ist als Ausgangswert, mit dem die Werte bei höherer Temperatur verglichen werden sollen, wichtig und deshalb mit besonderer Sorgfalt gemessen worden. Man muß dabei aber berücksichtigen, daß wegen der Extrapolation seine Genauigkeit geringer ist als diejenige der λ , aus denen er abgeleitet ist. Ein Fehler von 0,1 mm in $\lambda_0'/2$ verursacht z. B. einen solchen von 0,26 mm in $\lambda_0/2$, d. h. mehr als doppelt soviel; Fehler von $\lambda_0/2$ wirken weniger, doch ist der resultierende Fehler immer größer als der verursachende. Genau dasselbe gilt natürlich auch für alle anderen Messungen. Die folgenden Tab. 4 und 5 enthalten die Resultate derselben. Als Beobachtungstemperaturen wählte ich 300°, 450°, 700°, 900°; die beiden ersteren wegen der Möglichkeit der Eichung des Elementes unabhängig von der Reichsanstalt. Doch wurde bei 300° nur mit Rohr I beobachtet; die Messung erschien weniger wichtig, weil die zu erwartende Verkleinerung von F gegen den theoretischen Wert zu gering, die Temperaturmessung weniger scharf ist. Von den beiden mit Rohr II bei 900° gemachten Beobachtungsreihen ist leider nur die eine, allerdings sehr gute brauchbar, da bei der anderen infolge Erschöpfung der Akkumulatorenbatterie die Temperatur nicht konstant zu halten war.

Die Tabellen enthalten in Columnne 2 die mit l bezeichnete, bereits wegen Skalenfehler korrigierte Länge zwischen den Maximis, in Columnne 3 die halbe Wellenlänge $\lambda/2$, welche unter Berücksichtigung der Ausdehnung des Porzellanschaftes des Stempels aus den λ hervorgeht. Diese Korrektur ist nach den Angaben von Holborn und Day¹⁾ über die Ausdehnung des Berliner Porzellans, aus dem meine Apparate bestanden, berechnet. In der letzten Columnne ist der bei konstantem k zu erwartende Wert angegeben, wobei freilich vorausgesetzt wird, daß die Kirchhoffsche Konstante γ von der Temperatur unabhängig ist, was nicht ganz zutrifft und auch nach den Stevensschen Versuchen zu erwarten war.

1) L. Holborn u. A. Day, l. c. p. 509.

Tabelle 4.

Rohr I; $2r = 12,5$ mm.

t	l mm	$\frac{\lambda}{2}$ mm	$\frac{\lambda}{2}$ ber.
294,3°	233,14	233,36	233,07
290,2	229,09	229,31	232,23
448,3	259,83	260,23	262,86
449,0	260,75	261,15	263,00
446,6	262,11	262,51	262,55
447,0	262,49	262,89	262,63
702,7	301,89	302,64	305,77
702,6	303,24	303,99	305,77
897,5	332,38	333,53	334,93
875,0	328,17	329,32	331,64
875,0	329,27	330,42	331,64

Tabelle 5.

Rohr II; $2r = 20,0$ mm.

t	l mm	$\frac{\lambda'}{2}$ mm	$\frac{\lambda'}{2}$ ber.
455,2°	263,45	263,85	264,59
458,1	265,40	265,80	265,10
440,5	259,25	259,65	261,88
440,7	261,26	261,66	261,98
697,8	302,95	303,70	305,71
691,3	300,58	301,33	304,70
691,3	302,29	303,04	304,70
919,6	336,29	337,50	338,64

Wie man sieht, sind die berechneten Werte fast alle, zum Teil sogar beträchtlich größer als die beobachteten, was aber ebensowohl durch eine Verkleinerung von λ wie durch eine Aenderung von γ bewirkt werden kann. Zur bequemen Berechnung der Wellenlänge im freien Luftraum wurden alle λ auf die runden Temperaturen 300°, 450°, 700°, 900° umgerechnet durch lineare Interpolation mittels des aus der Gleichung $\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + 0,00367 \cdot t}$ leicht zu bestimmenden Diffe-

rentialquotienten. Die geringen Abweichungen, welche dadurch entstehen, daß der Gang der beiden λ nicht genau mit dem von A übereinstimmt, bleiben, wie man leicht ausrechnen kann, auch bei der weitesten Interpolation — um 25° — noch ganz unmerklich. Die so gefundenen Werte sind in Tab. 6 und 7 enthalten.

Tabelle 6.
 $\lambda/2$ in Rohr I.

300°	450°	700°	900°
—	260,54	—	—
—	261,38	—	333,89
234,53	263,13	302,21	332,90
231,32	263,44	303,56	334,00
Mittel 232,93	262,11	302,89	333,60 mm

Tabelle 7.
 $\lambda'/2$ in Rohr II.

450°	700°	900°
262,90	—	—
264,32	304,04	—
261,38	302,69	—
263,36	304,60	334,69
Mittel 262,99	303,71	334,69 mm

Durch Kombination der Mittelwerte nach dem p. 251 geschilderten Verfahren ergeben sich schließlich die in Tab. 8 zusammengestellten Werte für den freien Luftraum. Zur Ergänzung ist der früher gefundene Wert für 0° hinzugefügt. Die dritte Kolumne enthält die nach der Formel

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + \alpha t}$$

berechneten Werte. Kolumne 4 und 5 geben die Differenzen der beobachteten gegen die berechnete Halbwellenlänge, und zwar 4 in Millimetern, 5 in Tausendsteln der halben Wellenlänge.

Tabelle 8.

t	$\frac{\lambda}{2}$ beob.	$\frac{\lambda}{2}$ ber.	Diff. ber.-beob.	Diff.
0°	162,37 mm	—	—	—
300	(234,73)	235,35 mm	+ 0,62 mm	2,6 ‰
450	264,45	264,40	- 0,05	- 0,2
700	305,08	306,75	+ 1,67	5,4
900	336,51	336,82	+ 0,31	0,9

Der eingeklammerte Wert 234,73 bei 300° ist unsicher; da keine Beobachtungen mit Rohr II vorlagen, so ist die Korrektur 1,80 mm durch lineare Interpolation aus den für die übrigen Temperaturen gefundenen berechnet, und zu dem in Tah. 6 enthaltenen Wert 232,93 mm hinzuaddiert worden. Im übrigen ist dieser Wert auch deshalb sehr unsicher und wahrscheinlich zu klein, weil der eine der beiden Werte in Tah. 6, nämlich 231,82, weniger Beobachtungen umfaßt und unsicherer ist als der andere.

Die Differenzen der beobachteten gegen die berechneten Halbwellenlängen betragen nach Kolumne 5 im Maximum bei 700° 5,4 pro mille, die anderen sind verschwindend klein. In Anbetracht der Schwierigkeiten, welche die Messungen bieten, kann diese Abweichung wohl noch auf Beobachtungsfehlern beruhen, wenn ihr Betrag auch gegenüber den anderen etwas reichlich groß erscheint. Will man das nicht zulassen, so würde sich allerdings bei Glühtemperaturen eine Abnahme von k ergeben, welche das verzögerte Wachsen von V mit der Temperatur erklärt; dieselbe müßte jedoch weit kleiner sein als die von Stevens gefundene. Bis 450° ist jedenfalls keine Verkleinerung von k bemerkbar, wie die gerade bei dieser Temperatur sehr zuverlässigen und zahlreichen Messungen zeigen. Nimmt weiterhin k mit steigender Temperatur ab, und zwar, wie man voraussetzen kann, gleichmäßig bis zu einem Grenzwert, so würde auch die Differenz zwischen beobachteten und berechneten λ allmählich zunehmen müssen. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes hätte man dieselbe etwa anzusetzen: bei 700° = ca. 2 pro mille, bei 900° ca. 3 his

3,5 pro mille. Danach könnte die Abnahme von k in Tausendsteln seines Wertes betragen

bei 700° ca. 4 pro mille

bei 900° „ 6 bis 7 pro mille.

Mithin würde

bei 900° $k = 1,39$

zu setzen sein, während Stevens bei 950° $k = 1,34$ angegeben hatte. Die endgültige Entscheidung erwarte ich von Versuchen, die nach der hier beschriebenen Methode mit unglasierten Röhren bei noch höheren Temperaturen ausgeführt werden sollen. Jedenfalls scheint aber bis jetzt mit ziemlicher Sicherheit festzustehen, daß bis 900° nur bei sehr genauen Messungen eine Abnahme von k überhaupt in Betracht kommen könnte.

Zum Schluß sei es mir gestattet Hrn. Geheimrat Quincke für das große Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Heidelberg, Physikal. Inst. d. Univ., November 1902.

(Eingegangen 8. Februar 1903.)

2. *Notiz über elektrische Widerstandsöfen; von Alfred Kalähne.*

In meiner vorangehenden Abhandlung über „Schallgeschwindigkeit und Verhältnis der spezifischen Wärmen der Luft bei hoher Temperatur“ habe ich ganz kurz zwei elektrische Widerstandsöfen beschrieben, die als Interferenzröhren zur Messung der Wellenlänge eines Tones bei Temperaturen bis 1000° dienen. Es ist vielleicht zweckmäßig, im Anschluß daran mit wenigen Worten über meine Erfahrungen zu berichten, die ich mit diesen und mehreren anderen ähnlich konstruierten gemacht habe. Besonders mag die Kenntnis der zur Erhitzung auf eine bestimmte Temperatur aufzuwendenden Energiemenge bei gegebenen Ofendimensionen manchem erwünscht sein. Allerdings kann dieselbe nur ganz roh angegeben werden, da sie von dem größeren oder geringeren Wärmeverlust durch Strahlung und Leitung abhängt, der durch die spezielle Konstruktion bedingt ist.

Alle von mir benutzten Öfen bestehen aus nicht zu dünnwandigen Röhren aus feuerfestem Material (Berliner Porzellan, Marquardtsche Masse), um welche eine oder zwei Spiralen aus Nickeldraht gewickelt sind. Als Wärmeschutz ist ausgeglühte Asbestschnur gewöhnlich in mehreren Lagen herumgelegt und das Ganze außen von einem Messingrohr umhüllt, das lose über die Asbestpackung übergeschoben wird. Meist habe ich außerdem noch ein zweites 1—2 cm weiteres Messingrohr übergeschoben, das an den Enden durch zwei um das innere Rohr gelegte Asbestschnurringe getragen wird, so daß zwischen beiden ein Luftmantel von 0,5—1 cm Dicke als Wärmeschutz bleibt. Es scheint übrigens, als ob die Asbestwicklung besser wirkt als der Luftmantel, wahrscheinlich weil bei diesem die Luftströmungen sehr viel Wärme nach außen transportieren. Ein idealer Schutzmantel würde ein luftleer gepumpter Hohlzylinder sein, dessen innere Wand spiegelt, wie bei den Dewarschen Flaschen für flüssige Luft. Die Konstruktion eines solchen ist aber hier mit großen

Schwierigkeiten verknüpft, und ich habe deshalb davon abgesehen.

Als Spiegel sollten freilich die Metallmäntel wirken, sie erfüllen diesen Zweck aber nicht ganz, weil sie beim Warmwerden anlaufen und ihr Reflexionsvermögen zum großen Teil verlieren.

Auch der andere Zweck, dem sie dienen sollen, nämlich Temperaturverschiedenheiten längs des Ofen durch ihr gutes Wärmeleitungsvermögen auszugleichen, wird nur mangelhaft erfüllt, da die Wärme immer erst die dicke schlechtleitende Asbestschicht passieren muß, um zum Metalle zu gelangen. Immerhin wird man bis zu einem gewissen Grade eine Wärme-regulierung durch die Metallhüllen annehmen können, da, wie die Erfahrung lehrt, eine lokale Erwärmung oder Abkühlung der Messinghülle eine Temperaturänderung an der betreffenden Stelle im Innern des Ofens zur Folge hat. Kommt es auf örtliche Konstanz der Temperatur längs einer größeren Strecke an, so ist die exakte Wickelung der Heizspirale das einzige Mittel, das zum Ziele führt. Wegen der stärkeren Wärmeabgabe an den Enden sind hier die Windungen etwas näher aneinander zu legen, wenn die Temperatur bis zu den Enden dieselbe sein soll wie in der Mitte. Ich habe die Ganghöhe der Spirale an den Enden und in der Mittelstrecke des Rohres etwa im Verhältnis 4:5 genommen und damit gute Resultate erzielt.

Die exakte Umwicklung des Rohres mit der Spirale gelingt, wenn auch mit einiger Mühe, selbst mit 1,5 mm dickem Nickeldraht, falls er wie der für diese Zwecke von der *Berndorfer Metallwarenfabrik (A. Krupp) in Berndorf* bezogene Draht weich geglüht ist. Schwieriger ist es ihn in dieser Lage festzuhalten, wenn er sich beim Erwärmen ausdehnt. Beim Aufwickeln entstehen in der Spirale leicht Spannungen, die sich sofort durch Verschieben der einzelnen Windungen ausgleichen, wenn der Draht infolge der Ausdehnung sich etwas von dem Ofenkern abhebt. Zum Fixieren der Enden dienen zwei (oder bei zwei Spiralen vier) Klemmringe aus nicht sehr starkem Messingblech von 1—2 cm Breite, die man sich leicht selbst herstellen kann. Dazu werden die Blechstreifen etwa 4—5 cm länger genommen als der Umfang des Rohres und die Enden so weit umgebogen, daß der Umfang des Ringes

etwas kleiner wird als der Rohrumfang. Beim Umlegen des Ringes bleibt dann zwischen den senkrecht zur Rohrachse stehenden Lappen ein Zwischenraum von 1—2 mm Breite. Preßt man nun die Lappen mit Klemmschrauben aneinander, so legt sich der Ring mit sanfter Federkraft dicht an das Rohr an und sitzt so auch auf glatten glasierten Röhren ganz fest. An den Klemmschrauben werden die Enden der Heizspirale befestigt. Andere Klemmen, die auf die Lappen aufgesetzt werden, dienen zur Befestigung der Leitungsdrähte. Die Messingringe können bis zum starken Anlaufen erhitzt werden, ohne daß eine Lockerung eintritt.

Zum Fixieren der Drahtwindungen längs des Rohres dient die Asbestschnur, deren Dicke gleich der Ganghöhe der Spirale (ca. 5 mm) genommen wurde, sodaß sie den Raum zwischen je zwei Windungen ganz ausfüllt. Besser wird der Draht durch eine Chamotteumhüllung statt des Asbestes festgehalten. So sind z. B. die Öfen konstruiert, die von Holborn und Day¹⁾ in der *Physikalisch-Technischen Reichsanstalt* benutzt worden sind. Ich habe diese Methode auch angewandt — einer der Öfen war von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Berlin in dieser Weise hergestellt —, jedoch gefunden, daß solche Öfen schneller zerstört werden, indem wahrscheinlich durch die hartgebrannte Chamotte, in der der Draht teils fest, teils locker darinsteckt, der glühende Draht zerrissen oder zerschnitten wird, weil sich beide ungleich stark ausdehnen. Auch bildet die Chamotte nicht eine dichte gleichmäßige Hülle, sondern zeigt zahlreiche Risse und Sprünge, sodaß der Zweck, den Draht luftdicht abzuschließen und vor dem Verbrennen zu schützen, nur unvollkommen erreicht wird. Da ferner der Asbest ein besserer Wärmeschutz zu sein scheint als Chamotte und die Neubewickelung, wenn der Draht durchgebrannt ist, bequemer bei Benutzung der Asbestpackung anzuführen ist, so habe ich schließlich allein diese angewandt.

Die ersten Öfen hatten zwei Nickelspiralen, die nebeneinander aufgewunden waren. Die Absicht war, durch diese Anordnung eine zweckmäßige Ausnutzung der elektrischen

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 836. 1899.

Energie zu erzielen. Da der Widerstand des Nickeldrahtes mit steigender Temperatur sehr stark wächst (bei 1000° beträgt er etwa das Vierfache des Widerstandes bei 20°), so muß die Drahtdicke so groß gewählt werden, daß die vorhandene Spannung genügt, auch bei dem erhöhten Widerstand einen hinreichend starken Strom zu erzeugen. Der Widerstand des kalten Drahtes ist dann aber so klein, daß man beim Anheizen, und wenn man nicht bei der höchsten erreichbaren Temperatur arbeitet, sehr viel Spannung in Vorschaltwiderständen vernichten muß, wodurch ein beträchtlicher Verlust an Energie entsteht und oft auch eine Belästigung durch die von dem Vorschaltwiderstand ausgehende Erwärmung. Das vermeidet man durch die Anwendung zweier Heizspiralen, die man beliebig hinter- oder nebeneinander schalten, oder auch einzeln benutzen kann. Die von Stevens¹⁾ bei seinen akustischen Messungen benutzten $1\frac{1}{2}$ m langen Öfen waren ebenfalls mit zwei Spiralen versehen, die in der angegebenen Weise geschaltet werden konnten. Ich bin jedoch später von der Benutzung zweier Spiralen abgegangen, weil das Aufwickeln und Befestigen der Drähte besonders wegen der notwendigen Isolierung gegeneinander schwieriger ist als bei einfachen Spiralen. Auf jeden Fall ist die Anwendung nur einer Spirale bei Öfen mit kleinen Dimensionen vorzuziehen, die nur eine geringe Energiemenge beanspruchen.

Die Anwendung des Nickeldrahtes als Heizspirale erlaubt Temperaturen bis etwa 1200° zu erzeugen; allerdings verbrennt der Draht hierbei ziemlich schnell. Geht man nur bis 1000° , so halten die Öfen lange Zeit, immer vorausgesetzt, daß man den Draht nicht öfteren, wenn auch kurzen Überlastungen aussetzt. Letzteres geschieht bei zu schnellem Anheizen, und ist besonders gefährlich, wenn der Ofen schon eine hohe Temperatur hat. Indem bei plötzlichem Ausschalten von viel Widerstand der Strom stark ansteigt, kann der Draht an einzelnen Stellen so hoch erhitzt werden, daß er durchbrennt oder durchschmilzt. Steigert man den Strom nur langsam, so daß die mehr entwickelte Wärme Zeit hat in die Umgebung

1) E. H. Stevens, Verhandl. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 3. p. 54. 1901.

abzfließen, so kann man ohne Gefahr die oben angegebene Temperatur von 1200° erreichen, bei der allerdings Porzellanröhren weich werden und sich durchbiegen. Viel weiter wird man mit Nickeldraht nicht gehen dürfen; für höhere Temperaturen kommt nur noch Platin in Betracht, wie es jetzt von Heräus in Form dünner Blechstreifen von etwa 0,007 mm Dicke verwandt wird. Störend tritt aber bei Temperaturen über 1400° die Verdampfung des Platins und mehr noch der Umstand auf, daß die Rohrmasse (Marquardtsche Masse) elektrolytisch leitend wird.

Die Öfen sind mit Ausnahme eines großen 2 m langen (M_1) aus Marquardtscher Masse, alle für eine Spannung von 65—70 Volt berechnet, die von der Akkumulatorenbatterie des hiesigen Instituts geliefert wurde. Bei allen Versuchen, wo es auf Konstanz der Temperatur ankommt, ist es nötig eine Stromquelle zu haben, deren Spannung konstant bleibt. Die Benutzung des von der städtischen Zentrale Heidelbergs gelieferten Stromes mit 220 Volt Spannung ergab wegen der starken Spannungsschwankungen bei dem Ofen M_1 recht schlechte Resultate bezüglich der zeitlichen Temperaturkonstanz.

Es genügt auch im allgemeinen nicht, allein die Stromstärke zu messen, sondern man muß gleichzeitig die Spannung an den Enden der Spirale bestimmen, um aus beiden die dem Ofen pro Sekunde zugeführte Energiemenge in Watt berechnen zu können; einfacher ist es, dieselbe mit einem Wattmeter direkt zu beobachten, doch bietet die unabhängige Bestimmung von Strom und Spannung andere Vorteile, so z. B. daß man in jedem Augenblick kontrollieren kann ob die Spannung der Batterie konstant bleibt oder wegen Erschöpfung derselben sinkt.

Die anzuwendende Spannung richtet sich nach den Dimensionen des Ofens. Im allgemeinen ist es zweckmäßig nicht zu hohe Spannungen zu benutzen, da beim Durchbrennen des Drahtes der dabei entstehende Lichtbogen um so länger dauert und um so größere Zerstörungen an dem Rohr anrichtet, je höher die Spannung ist. So wurde z. B. die Wand eines dem Ofen M_1 gleichen Ofens in dieser Weise auf eine größere Strecke hin vollkommen geschmolzen, als an dieser Stelle der Draht durchbrannte und ein Lichtbogen von 220 Volt entstand.

Die Dimensionen der Öfen sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Ofen Nr.	Material	Länge	Durchmesser des Heizrohres		Zahl der Spiralen	Zahl der Windungen	Ganghöhe der Spirale	Drahtdicke	Bewickelte Rohrlänge	Drahtlänge	Widerstand bei 20°	Äußerer Ofendurchmesser
			innen	außen								
3	Porzellan	mm	mm	mm	2	je 60	mm	mm	mm	in	$\left\{ \begin{array}{l} 6,29 \\ 6,36 \end{array} \right.$	35,5
3a	"	400	10	13	1	70	5,14	0,60	360	3,19	1,76	35,5
4	{ Porzellan } (A.E.G.)	600	13	16	2	—	—	—	500	—	$\left\{ \begin{array}{l} 2,37 \\ 2,33 \end{array} \right.$	40
4a	Porzellan	600	13	16	1	83	—	1,0	—	—	ca. 1,2	40
5	"	600	12,5	16	1	108	4,77	0,80	515	5,62	1,90	40
6a	"	720	20	27,5	1	134	ca. 4,6	1,50	615	11,91	1,25	60
2	"	750	20	28	2	je 75	9,46	1,00	710	6,75	ca. 1,8	70
M ₁	Marquardt	2020	22	43	1	306	—	1,5	—	—	ca. 3,3	90

Ofen 2 ist einer der ältesten. Die Temperaturmessungen sind sehr unsicher; deshalb ist er später nicht mehr aufgeführt.

Die Öfen 3 und 3a sowie 4 und 4a haben als Kern dieselben Rohre, die nach dem Durchbrennen der ersten Spiralen neu bewickelt wurden. Nr. 3, 3a, 6a und 2 sind beiderseits glasiert, 4, 4a und 5 nur innen. Unterschiede in der Haltbarkeit des Nickeldrahtes haben sich dadurch nicht ergeben. Nur sind die außen glasierten Rohre wegen ihrer Glätte schwerer gleichmäßig zu bewickeln.

In Tab. 2—5 sind für einige dieser Öfen die pro Sekunde zuzuführenden Energiemengen in Watt und die dabei im Innern erzeugten Temperaturen angegeben. Letztere wurden mit Le Chatelierschen Thermoelementen aus Platin und einer Legierung von Platin mit 10 Proz. Rhodium gemessen, indem die elektromotorische Kraft derselben nach dem Kompensationsverfahren durch Vergleich mit Normalclark- oder Kadmiumelementen bestimmt wurde. Die kalten Lötstellen hatten Zimmertemperatur. Bei der Messung wurde meist der in der voranstehenden Abhandlung über „Schallgeschwindigkeit der

Luft . . .“ auf p. 240 beschriebene Lindecksche Kompensationsapparat benutzt. Einige der Thermoelemente waren in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt durch Vergleichung mit einem Normalthermoelement geeicht worden, die anderen wurden mit diesen verglichen und so an die luftthermometrische Temperaturskala der Reichsanstalt angeschlossen. Zu Grunde liegen die neuesten von Holborn und Day veröffentlichten Werte, die von den früheren Holborn-Wiensen erheblich abweichen.

In den Tabellen bedeuten: J die Stromstärke in Amp., V die Spannung in Volt, JV die Leistung in Watt, t die Ofentemperatur in Celsius, $V/J = W$ den Widerstand der Heizspirale in Ohm, W/W_{20} das Verhältnis dieses Widerstandes zum Widerstand bei 20° .

Tabelle 2.

Ofen 5.

J Amp.	V Volt	$J \cdot V$ Watt	t	$V/J = W$ Ohm	W/W_{20}
4,18	17,0	70,7	290,2°	4,06	2,14
4,10	16,9	69,3	294,4	4,12	2,17
5,28	25,0	131,0	446,6	4,77	2,52
6,74	39,1	263,0	702,7	5,80	3,06
7,40	47,8	354,0	875,0	6,46	3,40
7,83	49,0	384,0	897,5	6,26	3,29

 $W_{20} = 1,90 \text{ Ohm.}$

Tabelle 3.

Ofen 6a.

J Amp.	V Volt	$J \cdot V$ Watt	t	$V/J = W$ Ohm	W/W_{20}
8,58	26,0	223,0	440,6°	3,03	2,43
8,70	26,3	228,5	455,2	3,02	2,42
11,18	39,7	445,0	691,3	3,56	2,85
13,19	53,2	700,0	919,6	4,03	3,22

 $W_{20} = 1,25 \text{ Ohm.}$

Tabelle 4.

Ofen 3a.

J Amp.	V Volt	$J \cdot V$ Watt	t	$V/J = W$ Ohm	W'/W_{30}
3,67	15,9	58,5	300,0°	4,33	2,46
4,62	23,0	103,2	446,4	4,98	2,83
5,53	30,6	170,0	605,6	5,54	3,15
6,34	39,8	252,0	806,8	6,27	3,56
7,15	50,8	363,0	992,9	7,10	4,04

$$W_{30} = 1,76 \text{ Ohm.}$$

Tabelle 5.

Ofen M_1 .

J Amp.	V Volt	$J \cdot V$ Watt	t	$V/J = W$ Ohm	W'/W_{30}
7,7	74	570	405,2°	9,61	2,92
* 7,3	74	540	447,0	10,13	3,07
* 7,4	79,4	588	494,0	10,73	3,25
9,2	104	956	613,7	11,30	3,42
10,5	125	1310	691,4	12,00	3,64
* 9,6	118	1130	766,3	12,30	3,73
13,0	176	2285	965,0	13,54	4,10

$$W_{30} = 3,30 \text{ Ohm.}$$

Die angeführten vier Tabellen mögen genügen. In Fig. 1 ist eine graphische Darstellung der Resultate gegeben. Es sind auch die Kurven für Ofen 4 sowie für Ofen 3 mit eingezeichnet, deren Gestalt etwas von den anderen abweicht, die sich sonst ganz ähnlich sind. Bei Ofen M_1 sind die Ordinaten (die Leistungen in Watt) im Verhältnis 1 : 3 verkleinert, um die Kurve bequem einzeichnen zu können. Die wirklichen Energiemengen erhält man also für diesen Ofen durch Multiplikation der aus der Kurve entnommenen Zahlen mit 3. In der Tab. 5 sind natürlich die richtigen Werte von $J \cdot V$ angegeben.

Die Daten für M_1 sind am wenigsten genau, da die Temperatur starke örtliche Variationen zeigte, und die Strom-

messung mit einem gewöhnlichen, nicht sehr genauen Ampèremeter ausgeführt wurde.

Auch störten die beträchtlichen Spannungsschwankungen in der städtischen Leitung, wie schon p. 261 bemerkt wurde. Die großen Abweichungen einiger, in Tab. 5 mit Sternen (*) bezeichneten, Werte von den übrigen rühren jedoch nicht von diesen Ungenauigkeiten der Messung her, sondern hauptsächlich davon, daß mehrfach der Wärmeschutzmantel durch Umlegen weiterer Messingrohre verstärkt wurde, wodurch jedesmal die zur Erreichung einer gewissen Temperatur nötige Energiemenge bedeutend sank. Aus der Kurve folgt übrigens, daß ohne die verstärkten Schutzhüllen der Energieaufwand bei M_1 etwa dreimal so groß ist wie bei 6a.

Alle fünf Kurven steigen mit wachsender Temperatur immer steiler an, d. h.: damit die Temperatur um 1° erhöht wird, muß um so mehr Energie pro Sekunde zugeführt werden, je höher die Temperatur des Ofens ist. Das kommt offenbar von dem schnellen Anwachsen der äußeren Strahlung mit steigender Temperatur. Hiergegen verschwindet die Wärmeleitung an den Enden um so mehr, je länger der Ofen ist.

Eine einfache Beziehung zwischen der Größe des elektrischen Ofens und der zur Heizung nötigen Energiemenge ist aus den mir vorliegenden Daten nicht mit Sicherheit abzuleiten. Nach dem soeben über den Einfluß der äußeren Strahlung Gesagten wird es wesentlich auf die Größe und Temperatur der äußeren Oberfläche ankommen, die bei meinen Ofen immer von einem Messingzylinder gebildet wurde. Die Temperatur derselben habe ich nicht gemessen; ich schätze sie bei den höchsten Ofentemperaturen auf $200\text{--}300^\circ$; sie ist natürlich von der Dicke der Schutzhülle abhängig und deshalb

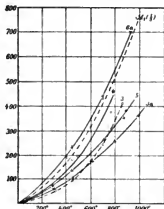


Fig. 1.

Abzissen: Ofentemperaturen in Celsius.

Ordinaten: Energieverbrauch in Watt.

niedriger bei denjenigen Öfen, welche zwei konzentrische Messingmäntel erhalten haben. Bei diesen, d. h. den Öfen 5 und 6a stehen die aufzuwendenden Energiemengen ungefähr im Verhältnis der äußeren Oberflächen der Schutzmäntel. Zum Beispiel ist für Ofen 5 die Oberfläche $O = 630 \text{ cm}^2$, für Ofen 6a $O' = 1130 \text{ cm}^2$, der Quotient $1130/630 = 1,79$. Bei 700° sind die Energiemengen in Watt 260 und 455; der Quotient $455/260 = 1,75$ stimmt bis auf wenige Prozent mit dem ersten überein. Bildet man die entsprechenden Quotienten für Ofen 6a und 3a, nämlich

$$\frac{O'}{O''} = \frac{1130}{379} = 2,97 \quad \text{und} \quad \frac{E'}{E''} = \frac{455}{210} = 2,17,$$

so sieht man, daß diese nicht mehr gleich sind. Sie würden aber einander näher kommen, wenn man die Dicke der Schutzhülle von 3a verstärkte, sodaß O'' größer wird, wobei auch zugleich E'' heruntergedrückt würde. Doch sind das offenbar nur rohe Annäherungen, da die Temperatur der äußeren Hülle unbekannt ist.

Die Kurven für Ofen 4 und 5 bestätigen das auf p. 259 Gesagte über den besseren Wärmeschutz des Asbestes gegenüber der Chamotte. Beide haben dieselben Dimensionen und abgesehen von der Chamotte dieselben Hüllen. Ofen 3 hatte nur eine dünne Lage Asbestschnur, im übrigen aber einen Luftmantel als Wärmeschutz; auch hier ist, besonders in höherer Temperatur, die Wärmeabgabe größer als bei dem sonst ganz gleichen Ofen 3a, bei dem der Luftmantel durch Asbest ersetzt ist.

Was die Temperaturverteilung im Innern der Öfen betrifft, so hängt sie sehr von der mehr oder minder gleichmäßigen Wicklung der Spirale ab. Kleine Abweichungen von der mittleren Temperatur an einzelnen Stellen kann man dadurch korrigieren, daß man an diesen Stellen den äußeren Wärmeschutz verstärkt oder schwächt, ersteres durch Überschieben eines kurzen Metallrohres oder besser durch Umwickeln der Stelle mit Asbestschnur, letzteres indem man die betreffende Stelle durch Umhüllung mit nassen Lappen abkühlt. Je dicker aber der ganze Schutzmantel ist, um so langsamer und unvollkommener wirkt dies Mittel. Man tut

daher gut, wenn die Temperatur nicht von vornherein auf der ganzen zu benutzenden Strecke konstant genug ist, den Schutzmantel nicht zu dick zu wählen, um die Temperatur bequem regulieren zu können.

Auch die Art des Anheizens hat nach meiner Erfahrung Einfluß auf die Temperaturverteilung. Bei langsamem Heizen ist dieselbe gleichmäßiger als bei schnellem. Das rührt offenbar von der Vergrößerung des Drahtwiderstandes durch Erhöhung der Temperatur her. Diejenigen Teile der Spirale, die aus irgend einem Grunde — etwa weil sie schon stärker verbrannt sind — größeren Widerstand haben als andere gleich lange, werden höher erwärmt, ihr Widerstand wächst weiter und infolgedessen nimmt auch die Erwärmung weiter zu. Man vermeidet solche partielle Überhitzung, indem man durch langsame Steigerung der Stromstärke der Wärme Gelegenheit gibt, nach den kälteren Stellen abzufließen oder auszustrahlen. Letzterer Vorgang ist besonders bei hohen Temperaturen sehr wesentlich.

Um zu zeigen, in welcher Weise die Temperatur längs des Rohres variierte¹⁾, gebe ich zwei Messungsreihen, welche die Temperatur auf den mittleren Strecken der Öfen 5 und 6a von Zentimeter zu Zentimeter enthalten. Es war in Ofen 5 bei der mittleren Temperatur 449,0°:

<i>s</i> cm	<i>t</i> °	<i>s</i> cm	<i>t</i> °	<i>s</i> cm	<i>t</i> °	<i>s</i> cm	<i>t</i> °	<i>s</i> cm	<i>t</i> °	<i>s</i> cm	<i>t</i> °
1	450,7	6	448,7	11	443,2	16	452,7	21	452,2	26	447,7
2	450,7	7	447,2	12	442,7	17	456,2	22	448,7	27	448,7
3	451,2	8	446,2	13	443,2	18	457,2	23	446,7	28	450,2
4	450,7	9	444,7	14	445,7	19	457,2	24	444,7	29	450,2
5	449,7	10	443,7	15	448,7	20	454,2	25	445,7	30	450,2

s bedeutet die Lage des Thermoelementes in Zentimetern,
bei Teilstück 15 war die Mitte des Ofens.

In Ofen 6a wurde gefunden bei der mittleren Temperatur 919,6°:

1) Vgl. hierzu die Tabelle bei L. Holborn u. E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 6. p. 187. 1901.

s cm	t°	s cm	t°	s cm	t°	s cm	t°	s cm	t°	s cm	t°	s cm	t°
1	919,1	6	915,5	11	920,0	16	915,5	21	905,8	26	919,1	31	931,6
2	915,5	7	917,3	12	920,0	17	912,9	22	911,1	27	921,8	32	931,6
3	914,6	8	923,6	13	921,8	18	907,6	23	912,9	28	924,5	33	932,5
4	914,6	9	926,3	14	921,8	19	904,0	24	913,8	29	929,8	34	936,9
5	913,8	10	921,8	15	919,1	20	900,4	25	915,5	30	930,7	35	941,4

Die Rohrmitte lag bei Teilstrich $s = 17$ cm.

Um die Temperatur im Innern der Öfen zu bestimmen, kann man, wenn es nicht auf große Genauigkeit ankommt, die Widerstandsvermehrung durch die Temperatursteigerung benutzen. Dazu ist nur die Kenntnis der Temperaturkoeffizienten des Heizdrahtes nötig. Allerdings wird diese Bestimmung

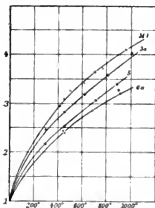


Fig. 2.

Abszissen: Ofentemperaturen in Celsius.

Ordinaten: Widerstandsverhältnis W/W_0 .

ist der Temperaturüberschuß des Drahtes über den Ofen bald größer, bald kleiner. Aus allen diesen Gründen ist die Widerstandsvermehrung bei gleichen Ofentemperaturen für verschiedene Öfen recht ungleich. Die Tab. 2—5 zeigen in der fünften Kolumne das Anwachsen des Widerstandes. In der sechsten Kolumne sind zur besseren Vergleichung der verschiedenen Öfen die Quotienten dieser Widerstände dividiert durch die

nung deshalb sehr unsicher, weil die Spirale wegen des Temperaturabfalles an den Enden des Ofens nicht überall dieselbe Temperatur hat. Je länger der Ofen im Verhältnis zu seinem Umfang und je steiler der Temperaturabfall an den Enden ist, um so genauer arbeitet die Methode. Zu berücksichtigen ist ferner, daß die Temperatur der Spirale immer höher ist als die Innentemperatur des Ofens, weil die Drahtoberfläche verhältnismäßig klein, der Wärmeübergang auf den Ofenkern also erschwert ist, besonders wenn der Draht nicht überall gleichmäßig anliegt. Je nach der Güte des äußeren Wärmeschutzes

betreffenden Widerstände bei 20° (Zimmertemperatur) angegeben, Fig. 2 zeigt diese Quotienten in graphischer Darstellung als Ordinaten, während die zugehörigen Ofentemperaturen die Abszissen bilden. Man erkennt deutlich, wie verschieden sich die Öfen verhalten. Je besser der Wärmeschutz ist, desto flacher verlaufen die Kurven.

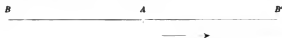
Hat man einmal die zusammengehörigen Größen (Stromstärke, Spannung, Ofentemperatur) gemessen, so bieten die Kurven für jeden der Öfen die Möglichkeit einer recht genauen Temperaturbestimmung. Dasselbe gilt dann aber auch für die Kurven der Fig. 1, da der Wattverbrauch die Temperatur bestimmt.

Heidelberg, Physik. Inst. d. Univ., Januar 1903.

(Eingegangen 8. Februar 1903.)

**3. Über den Einfluß der Erdbewegung auf die
Intensität des Lichtes;
von A. H. Bucherer.**

In neuerer Zeit sind manche Versuche unternommen und Vorschläge gemacht worden, welche auf eine Lösung der Frage bezüglich der Beweglichkeit des Äthers hinzielen. Ein hierhin gehöriger Vorschlag Fizeaus, welcher von experimentellem und theoretischem Interesse ist, scheint dabei fast in Vergessenheit geraten zu sein. Fizeau schließt auf Grund der Hypothese eines ruhenden Äthers, daß die Intensität irdischer Lichtquellen durch die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne in meßbarer Weise beeinflußt werde. Befinden sich in gleichen Abständen von der Lichtquelle A zwei Punkte B und B' auf der durch A gehenden Bewegungslinie der Erde:



Richtung der Bewegung.

so sollen die Intensitäten der Strahlung in B und B' verschieden sein. Ist die Richtung der Bewegung von B nach B' , so hat das in B absorbierte Licht nicht die Strecke $AB = s$ zurückgelegt, sondern eine kleinere Strecke:

$$\frac{sv}{v + u},$$

wenn man mit v die Lichtgeschwindigkeit und mit u die Geschwindigkeit der Erde bezeichnet. Das in B' auffallende Licht hat nach Fizeau eine größere Strecke:

$$\frac{sv}{v - u}$$

zurückgelegt. Da nun die Intensität der Strahlung umgekehrt proportional dem Quadrate der vom Licht zurückgelegten Strecke ist, so muß die Intensität J in B und B' verschieden

sein von derjenigen J_0 , welche im Ruhezustand bestehen würde. Fizeau findet demgemäß bei Vernachlässigung von u^2/v^2

$$(1) \quad J = J_0 \left(1 \pm \frac{2u}{v} \right).$$

Setzt man die Werte von u und v ein, so wird

$$J = J_0 \left(1 \pm \frac{1}{5000} \right).$$

Um diese Formel zu prüfen, schlägt Fizeau vor, in den Punkten B und B' zwei gegeneinander geschaltete Thermo-
elemente zur Bestrahlung aufzustellen, eine vorhandene elektro-
motorische Kraft zu kompensieren und dann den Apparat um
 180° zu drehen, sodaß B und B' ihre Lagen vertauschen. Aus
dem hierbei auftretenden Galvanometerausschlag ließe sich
dann die Formel und damit die Richtigkeit der zu Grunde
liegenden Annahme eines ruhenden Äthers prüfen. — Über
eine Ausführung des Fizeauschen Versuches ist bisher nichts
veröffentlicht worden, was vielleicht der Schwierigkeit zuzu-
schreiben ist, welche in der Messung eines so kleinen Effektes
besteht. Sagt doch Poincaré¹⁾: „Es ist absolut unmöglich,
eine Lichtintensität bis auf $1/5000$ zu messen.“

Auf diesen Vorschlag Fizeaus wurde ich von Hrn. Prof.
Kayser aufmerksam gemacht, als ich elektrische Experimente
plane, welche gleichfalls die Untersuchung der Frage der Be-
weglichkeit des Äthers zum Gegenstande hatten.

Obwohl ich nun die theoretischen Voraussetzungen Fizeaus
für anfechtbar hielt und eher der Ansicht zuneigte, daß die
Erdbewegung ohne Einfluß auf die Intensität sein würde, so
hielt ich doch die Ausführung des von Fizeau vorgeschlagenen
Versuches aus allgemeineren Gründen für nützlich. Hr. P.
Nordmeyer hat unter meiner Leitung die Experimente unter-
nommen mit dem Ergebnis, daß *wenn überhaupt eine Wirkung
der Erdbewegung vorhanden ist, diese die Intensität jedenfalls
um $1/300000$ nicht ändert.*

Eine eingehende Beschreibung der betreffenden Versuche
wird in der demnächst erscheinenden Inaugural-Dissertation des
Hrn. P. Nordmeyer erscheinen.

1) H. Poincaré, *Electricité et Optique* p. 534. 1901.

Der Zweck dieser Mitteilung ist eine theoretische Erörterung der Beeinflussung der Intensität des Lichtes durch die Bewegung.

Was zunächst die Überlegungen Fizeaus betrifft, so liegt ihnen die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, daß bei gemeinsamer Bewegung von Quelle und Beobachter nur die stattfindende Änderung der Amplitude ausschlaggebend sei; daß also die bei Annahme eines ruhenden Äthers eintretende Änderung der Periode der Wellenbewegung des Mediums keinen Einfluß habe.

Fizeau gibt jedoch keine Umschreibung des Mechanismus der Strahlung und der Eigenschaften des Mediums, um eine derartige Auffassung zu stützen. Daß man aber je nach den zu Grunde liegenden Hypothesen die abweichendsten Resultate erzielen kann, geht aus den Arbeiten von Eötvös¹⁾ und Ketteler²⁾ hervor, welche ebenfalls Theorien über den Einfluß der Bewegung auf die Intensität der Strahlung veröffentlicht haben. Schwer fällt auch bei den genannten drei Physikern ins Gewicht, daß sie die Rolle des Strahlungsdruckes bei der Bewegung von Lichtquelle und Beobachter nicht in Rechnung gezogen haben. Bewegt sich nämlich ein absorbierender Körper gegen die Richtung der Strahlung, so wird eine Arbeit von *äußeren Kräften* geleistet, deren Äquivalent als Wärme in dem Körper auftritt. Definiert man nun die Intensität der Strahlung als diejenige Energie, welche in der Zeiteinheit pro Einheit der senkrecht zur Strahlenrichtung konstruierten Fläche eines total absorbierenden Körpers von letzterem aufgenommen wird — und diese Auffassung des Begriffes der Intensität liegt den bisherigen Entwicklungen zu Grunde —, so muß ein Außerachtlassen des erwähnten Wärmehetrages zu unrichtigen Werten der Intensität führen.

Wir wenden uns nunmehr der Beantwortung der Frage zu, ob die allgemeinere Maxwellsche Theorie eindeutige Aussagen über eine Beeinflussung der Intensität der Strahlung durch die Bewegung gestattet. Wie wir gleich eingangs hervor-

1) E. Eötvös, Pogg. Ann. 152. p. 513—535. 1874.

2) H. Ketteler, Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichtes. Bonn 1873 bei P. Neusser; Pogg. Ann. 154. p. 260—271. 1875.

heben müssen, erfordert die Behandlung des Gegenstandes auf Grund der Maxwellschen Theorie die Zulassung einer Voraussetzung, welche angesichts unserer fast vollständigen Unkenntnis molekularer Vorgänge als durchaus willkürlich bezeichnet werden muß: Die Annahme, daß die Schwingungsbewegungen der molekularen Strahlungsquellen selbst durch die Bewegung nicht geändert werden.

An Stelle der molekularen Lichterreger setzen wir ein System Hertzscher Oszillatoren. Es wäre zunächst die Intensität der Strahlung zu berechnen, welche von einem ruhenden System herrührt. Alsdann wäre abzuleiten, wie sich diese Intensität an dem betrachteten Punkte ändert, wenn die Quelle sich mit geradliniger gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Schließlich wäre zu zeigen, welchen Wert die Intensität annimmt, wenn der total absorbierende Körper sich ebenso bewegt wie die Lichtquelle.

Man wird zugeben, daß es hinreichen wird, an Stelle eines Systems von Oszillatoren einen einzelnen Oszillator in Betracht zu ziehen, indem durch einfache geometrische Superposition die Wirkung mehrerer Erreger ableitbar ist.

Die Maxwellschen Gleichungen, welche die Grundlage für elektromagnetische Strahlung bilden, sind für ein isotropes Medium:

$$(1) \quad \text{curl } \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

$$(2) \quad \text{curl } \mathfrak{H} = K \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

$$(3) \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Wir denken uns einen Hertzschen Oszillator im Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Richtung der Schwingungen falle in die Richtung der Z-Achse. Es ist dann das Kraftfeld symmetrisch um diese Achse. Ist dann \mathfrak{A} eine Lösung der Gleichung:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \mathfrak{A} = 0,$$

so läßt sich nach Hertz durch Substitution in (1), (2) und (3) leicht zeigen, daß \mathfrak{E} und \mathfrak{H} sich in folgender Weise durch \mathfrak{A} , den Tensor von \mathfrak{A} darstellen lassen:

$$(5) \quad \begin{cases} E_x = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial x}, & E_y = -\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}, & E_z = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ H_x = K \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial t}, & H_y = -K \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t}, & H_z = 0. \end{cases}$$

Wir setzen als partikuläre Lösung für \mathfrak{A} :

$$(6) \quad \mathfrak{A} = \frac{a}{r} \sin n \left(\frac{r}{v} - t \right),$$

wo $n/2\pi$ die Anzahl von Schwingungen bedeutet, welche der Oszillator in der Zeiteinheit erregt; t ist die Zeit, r der Abstand vom Anfangspunkt. a ist ein konstanter Vektor in der Richtung der zunehmenden z , dessen Zahlenwert von den Dimensionen des Oszillators abhängt.

Wir betrachten nun das Kraftfeld in einem Punkte auf der X -Achse, welcher sehr weit vom Anfangspunkte entfernt ist. Dann werden höhere Potenzen von $1/r$ zu vernachlässigen sein gegen niedrige und eine Wellenlänge wird gegen r verschwindend klein sein.

Für Punkte auf der X -Achse ist

$$(6a) \quad \mathfrak{A} = \frac{a}{x} \sin n \left(\frac{x}{v} - t \right).$$

\mathfrak{A} ist also nur noch Funktion von x und von t . Folglich gemäß den Gleichungen (5)

$$(7) \quad E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

$$(8) \quad H_x = H_z = 0, \quad H_y = -K \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t}.$$

Durch Einsetzen von (6a) wird:

$$(9) \quad E_z = -\frac{a n^2}{x v^2} \sin n \left(\frac{x}{v} - t \right),$$

$$(10) \quad H_y = \frac{a n^2 K}{x v} \sin n \left(\frac{x}{v} - t \right).$$

Nach dem Poyntingschen Theorem strömt durch eine in dem Punkte konstruierte der yz -Ebene parallele Einheitsfläche ein Energiestrom \mathfrak{B} :

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}],$$

und da nach (9) und (10) \mathfrak{E} senkrecht zu \mathfrak{H} , so wird:

$$(11) \quad \mathfrak{B} = \frac{a^2 n^4 K}{4\pi x^2 v^3} \sin^2 n \left(\frac{x}{v} - t \right).$$

Ein in dem Punkte befindlicher absolut absorbierender Körper, dessen dem Oszillator zugewandte Fläche parallel der $y z$ -Ebene ist, wird den Mittelwert dieses Betrages pro Flächen- und Zeiteinheit absorbieren. Der Mittelwert von (11) während einer vollen Periode ist:

$$(11a) \quad W_m = \frac{a^2 n^4 K}{8 \mu x^2 v^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Intensität der Strahlung von dem Quadrat der Amplitude und der vierten Potenz der Anzahl der Schwingungen des Mediums pro Sekunde abhängig ist.

Bewegt sich nun der Oszillator geradlinig in Richtung der zunehmenden x , so wird die Intensität der Strahlung aus zwei Ursachen eine Änderung erleiden. Erstens ändert sich die Amplitude. Zweitens ändert sich die Schwingungszahl nach dem Dopplerschen Prinzip.

Unter Änderung der Schwingungszahl ist die Änderung der periodischen Störung des Mediums verstanden, indem wir ja vorausgesetzt haben, daß die Schwingungsbewegung des Erregers nicht beeinflußt werde. Nach dem Dopplerschen Prinzip wird nun die Frequenz $n'/2\pi$ der Wellenbewegung, wenn sich eine Lichtquelle A auf einen Punkt B' zu bewegt, in diesem Punkte (vgl. Figur)

$$\frac{n'}{2\pi} = \frac{n}{2\pi} \left(1 + \frac{u}{v}\right).$$

Die Änderung der Amplitude berechnet sich ganz im Einklang mit den eingangs erwähnten Überlegungen Fizeaus. Zur Zeit t_0 befindet sich der Oszillator in A .



Die Strahlung, welche in einem gegebenen Zeitpunkt in B' eintrifft, hat die Lichtquelle bez. den Oszillator zur Zeit t verlassen. Zu dieser Zeit befand sich aber der Oszillator noch nicht in A , sondern in A' . Nun ist

$$A'B' = (t_0 - t)v,$$

$$A'A = (t_0 - t)u.$$

Bezeichnen wir den Abstand des Oszillators von B' zur Zeit t_0 mit d , wo $d = AB'$, so wird:

$$A'B = d \left(1 + \frac{u}{v} \right).$$

Folglich wird die Amplitude der Strahlung im Verhältnis $1:(1+u/v)$ verringert. Und es wird die Intensität der Strahlung im Punkte B' anstatt:

$$W = \frac{a^2 n^4 K}{8 \pi x^3 v^3},$$

$$W'' = \frac{K a^2 n^4 \left(1 + \frac{u}{v} \right)^4}{8 \pi x^3 v^3 \left(1 + \frac{u}{v} \right)^3}.$$

Vernachlässigen wir höhere Potenzen von u/v , so wird:

$$W'' = \frac{K a^2 n^4 \left(1 + \frac{2u}{v} \right)}{8 \pi x^3 v^3}.$$

Die Maxwellsche Theorie führt also zu dem Ergebnis, daß die Intensität einer Lichtquelle, welche sich mit der Geschwindigkeit u auf einen Punkt zu bewegt, $(1 + 2u/v)$ mal größer ist, als wenn dieselbe in demselben Abstände ruhte.

Daß eine translatorische Bewegung senkrecht zu AB ohne Einfluß sein muß, ist so offenbar, daß wir nicht näher auf diesen Punkt einzugehen haben.

Das abgeleitete Resultat bildet die Grundlage zu dem nunmehr zu untersuchenden Falle, wo Lichtquelle und schwarzer Körper eine gleichgerichtete gemeinsame Geschwindigkeit haben.

Zunächst ist einleuchtend, daß, wenn sich der absorbierende Körper in Richtung des mit der Lichtgeschwindigkeit v fließenden Energiestromes bewegt, letzterer mit einer relativen Geschwindigkeit $v - u$ sich gegen den schwarzen Körper bewegt. Die infolge dieser Strömung absorbierte Energie W''' ist daher nur der $(v-u)/v$ te Teil derjenigen, welche im Ruhezustand vom schwarzen Körper aufgenommen wird:

$$W''' = \frac{K a^2 n^4 \left(1 + \frac{2u}{v} \right) \left(1 - \frac{u}{v} \right)}{v^3 x^3 8 \pi}.$$

Von diesem Betrage ist noch die von der Strahlungskraft geleistete Arbeit abzuziehen. Indem sich nämlich der Körper mit der Geschwindigkeit u in Richtung der Strahlung fortbewegt, leistet die Strahlungsdruckkraft eine Arbeit, welche gleich ist dem Produkte aus der Kraft und dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg. Offenbar kann diese Arbeit nur auf Kosten der vom Körper absorbierten Wärme geleistet werden.

Nach Maxwell ist der Strahlungsdruck P numerisch gleich dem Inhalt der elektromagnetischen Energie pro Volumeneinheit, und dieser Inhalt ist gleich dem Energiestrom W'' , dividiert durch v . Das heißt:

$$P = \frac{K a^2 n^4}{8 \pi v^3 x^3} \left(1 + \frac{2u}{v} \right) \frac{1}{v}.$$

Die von P in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist daher pro Quadratcentimeter bestrahlter Fläche:

$$Pu = \frac{K a^2 n^4}{8 \pi v^3 x^3} \left(1 + \frac{2u}{v} \right) \frac{u}{v}.$$

Zieht man diesen Betrag von W'' ab, so findet man für die bei gemeinsamer Bewegung von Lichtquelle und absorbierendem Körper bestehende Intensität unter Vernachlässigung von u^2/v^2 :

$$\begin{aligned} W''' &= W'' - Pu, \\ &= W'. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man höhere Potenzen von u/v , so wird die Intensität der Strahlung bei gemeinsamer translatorischer Bewegung von Lichtquelle und Beobachter nicht geändert.

Das Resultat der im hiesigen Institut ausgeführten Versuche befindet sich also nicht im Gegensatz zur Maxwellschen Theorie.

Daß auch auf Grund der spezielleren Voraussetzungen der Lorentzschen Theorie kein wahrnehmbarer Einfluß der Erdbewegung auf irdische Lichtquellen zu erwarten ist, folgt aus einer in den Sitzungsberichten der Amsterdamer Akademie erschienenen Abhandlung von H. A. Lorentz.¹⁾

Lorentz gibt nur einen Überblick über die Entwicklungen, indem er auf sein Werk „Versuch einer Theorie der

1) H. A. Lorentz, Kgl. Akad. d. Wissensch. zu Amsterdam p. 678 bis 681. 1902.

optischen Erscheinungen“ hinweist. Im wesentlichen gestaltet sich die Theorie eines Einflusses der Erdbewegung auf irdische Lichtquellen auf Grund der Elektronenhypothese wie folgt.

Die Grundgleichungen für die elektrische Verschiebung \mathfrak{D} und die magnetische Kraft \mathfrak{H} sind für den reinen Äther, d. h. außerhalb der Materie:

$$(1) \quad \text{curl } \mathfrak{H} = 4 \pi \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \text{curl} [\mathfrak{v} \mathfrak{D}] \right\},$$

$$(2) \quad \mathfrak{F} = 4 \pi v^2 \mathfrak{D} + [\mathfrak{v} \mathfrak{H}].$$

\mathfrak{F} bedeutet die gesamte auf die Einheit der Ladung ausgeübte Kraft; \mathfrak{v} ist die Erdgeschwindigkeit. Das Zeichen $\partial/\partial t$ bedeutet eine Differentiation bei konstanten relativen Koordinaten, d. h. bei Konstanz der Koordinaten eines an der Bewegung der Erde teilnehmenden Koordinatensystems. Man setzt zunächst:

$$(3) \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4 \pi [\mathfrak{v} \mathfrak{D}],$$

dann schreibt sich (1)

$$(4) \quad \text{curl } \mathfrak{H}' = 4 \pi \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Man führt ferner eine andere Zeit t' ein:

$$(5) \quad t' = t - \frac{\mathfrak{v} r}{c^2},$$

wo

$$r = ix + jy + kz.$$

Dann wird der Operator ∇ sich ebenfalls ändern, sodaß für einen beliebigen Vektor \mathfrak{U}

$$(6) \quad \nabla \mathfrak{U} = \nabla' \mathfrak{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} [\mathfrak{v} \mathfrak{U}].$$

Das Symbol ∇' bedeutet eine Variation bei konstantem t' .

Daher nimmt $\text{curl } \mathfrak{H}'$ die Form an:

$$(7) \quad \text{curl } \mathfrak{H}' = [\nabla' \mathfrak{H}'] = \text{curl}' \mathfrak{H}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}'].$$

Hier deutet curl' eine Variation bei konstantem t' an.

Gemäß Gleichung (4) ist dann:

$$(8) \quad \text{curl}' \mathfrak{H}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}'] = 4 \pi \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Aus Gleichung (2) kann man aber den Wert für die rechte Seite einsetzen und erhält:

$$(9) \quad \text{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t'} [v(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})] + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t'} \mathfrak{H}.$$

Setzt man aus (3) den Wert von $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}$ in der ersten Term der rechten Seite ein, so erkennt man sofort, daß dieser Term den Faktor v^2/v^2 erhält. Solche Ausdrücke vernachlässigen wir und erhalten demgemäß:

$$(10) \quad \text{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t'} \mathfrak{H}.$$

Wir führen nun eine Hilfsgröße ψ ein und setzen

$$(11) \quad \mathfrak{H}' = -\text{curl}' \psi,$$

wo

$$(12) \quad \psi = -\frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{m}{r_0} \right),$$

m bezeichnet Lorentz als das elektrische Moment des Elektrons, d. h. als das Produkt aus seiner Ladung und seiner Verschiebung aus der Gleichgewichtslage.

Es läßt sich zeigen, daß dieser Wert von ψ allen Anforderungen genügt, d. h. die Gleichungen (1) und (2) befriedigt, wenn für m gesetzt wird:

$$(13) \quad m = a \cos n \left(t' - \frac{r}{v} \right).$$

Es sei nun m ein Vektor in Richtung der zunehmenden y , also $m = jm$. Wir untersuchen dann das von dem schwingenden Elektron erzeugte Feld sehr weit entfernt von demselben, sodaß gegen r_0 die Wellenlänge und die Amplitude verschwindend klein sind. Das Elektron befinde sich im Anfangspunkt des mitbewegten Koordinatensystems. Dann ist in einem Punkte der positiven X -Achse:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}' &= -\text{curl}' \mathfrak{A} = \frac{\partial}{\partial t'} \text{curl}' \frac{m}{r_0} \\ &= t \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)' \frac{a}{r_0} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) \\ &= t \frac{a n^2}{r_0 v} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) \end{aligned} \right.$$

und

$$\text{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{\partial}{\partial t'} \text{curl}'^2 \frac{a}{r_0} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right).$$

Nun ist:

$$\text{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t'} \mathfrak{F},$$

daher:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{v^2} \mathfrak{F} &= \text{curl}'^2 \frac{a}{r_0} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) \\ &= \left\{ \mathcal{P}' \left(\mathcal{P}' \frac{m}{r_0} \right) - \mathcal{P}'^2 \frac{m}{r_0} \right\} = -\mathcal{P}'^2 \left(\frac{m}{r_0} \right) \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{a}{r_0} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) \\ &= \frac{a}{r_0} \frac{n^2}{v^2} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right). \end{aligned} \right.$$

Diesen Wert setzen wir in Gleichung (2) ein und erhalten:

$$(16) \quad 4\pi \mathfrak{D} = \frac{a}{r_0} \frac{n^2}{v^2} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{v^2} [\mathfrak{H} v].$$

Da wir Glieder mit dem Faktor p^2/v^2 vernachlässigen, so dürfen wir die rechte Seite auch schreiben:

$$(17) \quad 4\pi \mathfrak{D} = \frac{a}{r_0} \frac{n^2}{v^2} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{v^2} [\mathfrak{H}' v].$$

Gleichung (14) liefert für \mathfrak{H}' :

$$(18) \quad \mathfrak{H}' = \frac{1}{r_0 v} \frac{a n^2}{v} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right).$$

Folglich nimmt (17) die Form an:

$$4\pi \mathfrak{D} = \frac{a n^2}{r_0 v^2} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right) + \frac{p n^2 a}{v^3 r_0} \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right),$$

$$\mathfrak{D} = \frac{a n^2}{r_0 4\pi v^2} \left(1 + \frac{p}{v} \right) \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right).$$

Dieses ist der Wert der elektrischen Verschiebung, wie sie von einem an der Bewegung nicht teilnehmenden Beobachter wahrgenommen wird.

Setzt man die gefundenen Werte von \mathfrak{H}' und \mathfrak{D} in Gleichung (3) ein, so ergibt sich:

$$(19) \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{r_0 v} \frac{a n^2}{v} \left(1 + \frac{p}{v} \right) \cos n \left(t' - \frac{x}{v} \right).$$

Lorentz bildet nun weiter den Ausdruck für die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit, U :

$$\begin{aligned} U &= 2\pi v^2 \mathfrak{D}^2 + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \\ &= \frac{a^2 n^4}{r_0^2 v^2 4\pi} \left(1 + \frac{p}{v} \right)^2 \cos^2 n \left(t' - \frac{x}{v} \right). \end{aligned}$$

Und der Mittelwert hiervon während einer vollen Periode ist:

$$U = \frac{a^2 n^4}{8 \pi v^2 r_0^2} \left(1 + \frac{p}{v}\right)^2.$$

Folglich ist die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Strahlenrichtung stehende, in Bezug auf den Äther ruhende Fläche ω' strömt:

$$U v \omega' = \frac{a^2 n^4}{8 \pi v^2 r_0^2} \left(1 + \frac{p}{v}\right)^2 \omega'.$$

Der Ausdruck $U v$ stellt die Intensität der Strahlung für einen im Äther ruhenden Beobachter dar.

Nach Lorentz ändert sich nun die von einem schwarzen Körper aufgenommene Energie, wenn ihm dieselbe Bewegung erteilt wird, wie der Lichtquelle.



Bedeutet in der Figur A eine irdische Lichtquelle, ω' die im Äther ruhende Bodenfläche des Zylinders C , und ω die an der Erdbewegung teilnehmende Fläche, so wird, wenn die Bewegungsrichtung $A\omega$ ist, der Energieinhalt des Zylinders zunehmen, und zwar um den Betrag

$$p U \omega$$

in der Zeiteinheit. Um diesen Betrag verringert sich die von ω aufgenommene Energie. Ferner verringert sich letztere infolge der von der Druckkraft der Strahlung geleisteten Arbeit. Die auf die Fläche ω wirkende Kraft ist:

$$U \omega.$$

Daher ist die Arbeit dieser Kraft in der Zeiteinheit:

$$U \omega p.$$

Im ganzen wird daher von ω absorbiert:

$$U v \omega - 2 U p \omega.$$

Setzt man den Wert von U ein und vernachlässigt p^2/v^2 , so erhält man den Wert für die Intensität irdischer Lichtquellen:

$$\frac{a^2 n^4}{8 \pi v^2 r_0^2}.$$

Die Intensität wird also nicht beeinflusst durch die Erdbewegung.

Aus den gegebenen Entwicklungen erhellt, daß die Hypothese eines ruhenden Äthers mit dem Resultate der von Hrn. Nordmeyer ausgeführten Versuche nicht im Widerspruche steht. Wir dürfen aber diese Versuche nicht als positive Stütze der Lorentzschen Theorie auffassen. Vielmehr scheinen dieselben eine weitere Begründung der sich immer mehr geltend machenden Erkenntnis zu liefern, daß elektrische und magnetische, ebenso wie die Strahlungserscheinungen nur beeinflußt werden, wenn Materie sich relativ zu Materie bewegt.

Keine einzige Erfahrungstatsache widerspricht dieser Auffassung. Wollte man sich konsequent auf diesen Standpunkt stellen, so müßte man auf das von den Ätherhypothesen gewährte Bild einer zeitlichen Ausbreitung elektromagnetischer Störungen verzichten. Fällt aber dieser Verzicht so schwer in die Wagschale gegenüber der Tatsache, daß die Hypothese eines ruhenden Äthers sich sowohl mit dem Experiment — ich meine das Michelson-Morleysche — als auch mit einem sehr wichtigen Prinzip der Mechanik: der Erhaltung des Schwerpunktes, im Widerspruch befindet? Mit dem Satze: Es gibt nur Wirkungen von Materie zu Materie, würde man die künstlich von der Materie in den Äther verlegten Eigenschaften in die Materie zurückverlegen und so von einer dualistischen Naturauffassung zu einer monistischen übergehen.

Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes würden in ihrer Form weniger als in ihrer Deutung geändert werden. Die von mir auf Grund der Hypothese eines ruhenden Äthers gegebenen Gleichungen¹⁾ wären dann in der Weise zu deuten, daß die Geschwindigkeiten u als relativ zur Materie aufzufassen wären:

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{B} u] - \nabla V,$$

$$\mathfrak{H} = [u \mathfrak{F}] - \nabla \varphi,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf die Bewegungen von Ladungen und von Magneten bez. stromführenden Leitern.

Bewegt sich dielektrische Materie geradlinig relativ zu geladenen Körpern, so ist:

$$\mathfrak{D} = (K - 1)[u \mathfrak{E}].$$

1) A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. 8. p. 326. 1902.

Bewegt sich ein paramagnetisches Medium geradlinig relativ zu stromführenden Leitern oder zu Magneten, so ist:

$$\mathfrak{E} = (\mu - 1) [\mathfrak{H} u].$$

Von den vielfachen bemerkenswerten Konsequenzen einer solchen Auffassung der elektromagnetischen Erscheinungen möchte ich nur kurz eine erwähnen, welche für die Elektronentheorie von besonderer Wichtigkeit ist.

Ein geladener Körper, welcher von aller anderen Materie weit entfernt ist, wird im Gegensatz zur Maxwell-Lorentz'schen Theorie kein magnetisches Feld mit sich führen, wenn er sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Ein Beobachter, welcher an der Bewegung teilnimmt, wird ferner weder eine Änderung der elektrischen Kraft noch der elektrischen Energie wahrnehmen. Ein geladener Kondensator wird deshalb infolge der Erdbewegung kein magnetisches Feld mit sich führen. Der Begriff der elektromagnetischen Masse eines Elektrons wäre folglich ohne Einbeziehung der Umgebung nicht definierbar, wodurch die großen Schwierigkeiten einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik noch erhöht werden würden.

Bonn, den 6. Februar 1903.

(Eingegangen 7. Februar 1903.)

**4. Über den Einfluß der Erdbewegung
auf die Verteilung der Intensität der Licht- und
Wärmestrahlung;**

von Paul Nordmeyer.

(Auszug aus der Bonner Dissertation.)

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Ausführung eines von Fizeau¹⁾ vorgeschlagenen Experimentes, welches auf die Untersuchung der Frage nach der Beweglichkeit des Äthers hinzielt. Fizeau schließt unter der Annahme eines unbeweglichen Äthers, daß die Intensität irdischer Lichtquellen durch die Erdbewegung beeinflusst werde, und zwar auf Grund folgender Betrachtung. Es sollen sich eine Lichtquelle A und ein Schirm B im unveränderlichen Abstände d voneinander mit der Geschwindigkeit u in der Richtung $A \rightarrow B$ bewegen. In der Zeit, in der ein Lichtstrahl von A nach B gelangt, ist aber B schon weiter gerückt; erst in einem Punkte C treffe der Lichtstrahl den Schirm. Zum Durchlaufen dieser Strecke $AC = d'$ brauche er die Zeit t , sodaß wir erhalten:

$$d = t(v - u),$$

$$d' = d + ut,$$

$$d' = d \left(1 + \frac{u}{v - u} \right) = d \left(1 + \frac{u}{v} \right),$$

wo v die gegen u sehr große Lichtgeschwindigkeit ist. Nun wendet Fizeau das Gesetz an, daß die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt, und erhält, wenn J_0 die Intensität der Ruhe bezeichnet:

$$J = J_0 \frac{d^2}{d'^2} = J_0 \left(\frac{1 - \frac{u}{v}}{1 + \frac{u}{v}} \right)^2$$

oder

$$J = J_0 \left(1 - \frac{u}{v} \right)^2 = J_0 \left(1 - \frac{2u}{v} \right).$$

1) H. Fizeau, Pogg. Ann. 92. p. 652—655. 1854; dazu Cosmos 1. p. 690. 1852.

Für die Bewegungsrichtung $B \rightarrow A$ erhält man entsprechend

$$J = J_0 \left(1 + \frac{2u}{v} \right).$$

Zur Prüfung dieser Formel macht Fizeau folgenden Vorschlag: Es seien auf einer um ihren Mittelpunkt horizontal drehbaren Stange in der Mitte eine Glühlampe und an beiden Enden zwei Thermolemente aufgestellt. Letztere seien gegeneinander geschaltet, sodaß bei gleicher Bestrahlung — sonstige Gleichheit der Elemente etc. vorausgesetzt — die entstehenden Ströme sich aufheben. Bewirkt man dieses, wenn die Stange in der Richtung der Erdbewegung steht, und dreht dann um 180° , so soll also nach Fizeau infolge der veränderten Intensität ein Strom entstehen, der mit einem Galvanometer gemessen werden kann. Die Stärke dieses Stromes läßt sich nach obiger Formel für eine solche Drehung um 180° leicht berechnen zu $\frac{1}{1250}$ des in der Ruhe in einem Thermolement erzeugten Stromes, wobei die Lichtgeschwindigkeit mit 300 000 km/sec und die Erdgeschwindigkeit mit 30 km/sec in Rechnung gezogen ist.

Auch Ketteler¹⁾ und Eötvös²⁾ berechnen einen Einfluß, wohingegen Lorentz³⁾ ebenfalls unter der Annahme eines ruhenden Äthers zu dem Schluß gelangt, daß ein meßbarer Einfluß nicht bestehe. Ein eingehenderes Referat über diese Abhandlungen habe ich in meiner Inaugural-Dissertation⁴⁾ gegeben. Ferner behandelt diese Frage eine Arbeit von A. H. Bucherer⁵⁾, in der gezeigt wird, daß die Maxwellsche Theorie ganz allgemein zu dem von Lorentz abgeleiteten Resultat eines nicht vorhandenen Einflusses führt. Hier muß ich mich mit einem Hinweis auf diese Abhandlungen begnügen, ohne näher auf sie eingehen zu können.

1) E. Ketteler, *Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichtes*. Bonn 1873 bei P. Neusser. Und Pogg. Ann. 154. p. 260—271. 1875.

2) R. v. Eötvös, Pogg. Ann. 152. p. 513—535. 1874.

3) H. A. Lorentz, *The intensity of radiation and the motion of the earth*. Amsterdamer Akademie 1902.

4) P. Nordmeyer, *Inaug.-Dissert.* Bonn 1903.

5) A. H. Bucherer, *Ann. d. Phys.* 11. p. 270. 1903.

Angesichts dieser ausgedehnten theoretischen Behandlung unserer Frage erschien mir eine Ausführung des Fizeauschen Versuches hinreichend von Nutzen zu sein. Dabei galt es nun, einen leuchtenden Körper und Thermoelemente drehbar und geschützt vor fremden Einflüssen in Verbindung mit einem empfindlichen, störungsfreien Galvanometer aufzustellen. Was nun zunächst das letztere anbetrifft, so waren die dabei auftretenden Schwierigkeiten nicht gering. Denn da das Bonner physikalische Institut leider großen Erschütterungen durch vorbeifahrende Wagen ausgesetzt ist, so war es erstes Erfordernis, für eine erschütterungsfreie Aufstellung des Galvanometers zu sorgen. Ich erreichte dieses durch eine der Juliuschen Aufhängung nachgebildete Anordnung, wobei der aus einer Holzplatte bestehende Galvanometertisch durch Vermittelung von dicken Gummischläuchen an den Stahldrähten befestigt war. Dadurch war das Galvanometer lotrechten Erschütterungen kaum noch ausgesetzt. Um auch etwaige seitliche Schwingungen schnell zu dämpfen, ist in die Holzplatte nach unten hin eine Messingstange eingeschraubt, die an ihrem Ende mit einer vierflügeligen Schaufel in ein Ölbad eintaucht. Die Stromzuleitung geschah mittels zweier in Paraffin gebetteter und auf der Holzplatte aufgestellter Quecksilbernäpfchen, weil eine starre Verbindung zu leicht einen Zwang auf das Galvanometer ausgeübt hätte. Gegen Luftzug, äußere Berührung etc. wurde das Galvanometer dadurch geschützt, daß die Zimmercke, in der es hing, durch Glasfenster und unten durch ein bis zum Boden reichendes Tuch abgegrenzt wurde. Infolge dieser Vorkehrungen stand das Galvanometer fast gänzlich ruhig; nur schwerste Lastwagen machten sich noch bemerkbar.

Ich benutzte zuerst ein astatisches Spiegelgalvanometer nach du Bois und Rubens, in dem an einem Quarzfaden das zum Instrument gehörige kleinere Gehänge hing. Da letzteres aber magnetischen Einwirkungen von inner- oder außerhalb des Zimmers bewegten Eisenteilen zu sehr zugänglich war, brachte ich eine nach Prof. Broca in Paris verfertigte Nadel an, der außer anderen guten Eigenschaften besonders größere Unempfindlichkeit gegen magnetische Einflüsse nachgerühmt war. Sie bestand aus einem sehr dünnen Stahlröhrchen, das in Form eines Rechteckes von der Größe

70 × 2 mm gebogen und so magnetisiert war, daß in der Mitte Gegenpole vorhanden waren. Diese Nadel wurde ebenfalls an einem Quarzfaden aufgehängt, sodaß die Ebene des Rechteckes vertikal lag. Leider erfüllten sich die an diese Nadel geknüpften Hoffnungen nur in geringem Maße; eine kleine Besserung war jedoch zu verspüren, sodaß ich mit diesem Instrument den Versuch durchführen zu können glaubte.

Da traten nach den Pfingstferien sehr starke Schwankungen auf; es ergab sich, daß diese durch vagabundierende Ströme hervorgerufen wurden, welche von der neu eröffneten elektrischen Bahn Bonn-Beuel ausgingen. Ich benutzte deshalb

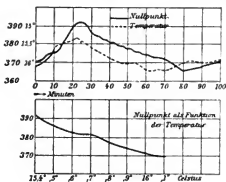


Fig. 1.

vorübergehend ein Galvanometer nach Deprez-d'Arsonval, das ja gegen magnetische Einflüsse so gut wie unempfindlich ist. Dagegen traten bei ihm andere gesetzmäßig erscheinende Schwankungen auf, die sich im wesentlichen auf Temperaturschwankungen zurückführen ließen. Letztere bewirken wahrscheinlich eine Änderung in der Elastizität der Messingaufhängung. Von den beistehenden Kurven (Fig. 1) gibt die erste die zeitliche Änderung von Nullpunkt und Temperatur wieder; die zweite zeigt die Nullpunktsänderung als — nahezu lineare — Funktion der Temperatur.

Die Skala stand bei diesem Instrument 9 m vom Spiegel entfernt; doch genügte auch die dadurch erreichte Empfindlichkeit nicht, da aus später angegebenen Gründen nach der Fizeauschen Formel ein Effekt von nur 4—5 Skt. zu erwarten

war. Doch hat dieses Instrument insofern gute Dienste getan, als bei ihm Ausschläge, die sicherlich von Störungen herrührten, leichter zu beobachten waren, und so der Drehapparat so weit vervollkommenet werden konnte, bis ein empfindlicheres Instrument wieder notwendig war. Als solches nahm ich das zuerst benutzte nach du Bois und Rubens, versah es jedoch an Stelle der Glasglocke mit einem 2 cm dicken Panzer aus weichem Eisen von derselben Form, wie die Glasglocke. Vorn war darin zur Spiegelablesung eine kreisrunde Öffnung, die durch eine planparallele Glasplatte geschlossen war. An die Stelle des früheren Messingdeckels kam ein Eisendeckel, ebenso wurde unter das Instrument eine Eisenplatte gelegt. Als Nadel hatte ich wieder das zum Instrument gehörige leichte Gebänge genommen, nachdem ich als Richtmagneten für sie auf den Boden innerhalb des Panzers ein Stückchen magnetisierter Stricknadel gelegt hatte. Darauf gelang denn die Astasierung mittels der zum Instrument gehörigen äußeren Magneten sehr gut, wenn auch nur nach großer Mühe. Da sich nun trotz dieses Panzers magnetische Störungen noch immer etwas bemerkbar machten, so wurde um das ganze Galvanometer nebst Aufhängung herum noch ein Zylinder aus weichem Eisen gesetzt von $\frac{1}{2}$ cm Dicke, 75 cm Höhe und 62 cm Durchmesser. Vorn war wieder eine Öffnung zur Spiegelablesung, die — wie noch erwähnt sein möge — durch Fernrohr und Skala, welche 3 m vom Spiegel entfernt standen, vorgenommen wurde. Durch diesen zweiten Panzer war dann endlich die magnetische Störung auf ein Minimum herabgedrückt. Nur starke Funkeninduktoren, mit denen zeitweilig im Institut in ca. 30 m Entfernung gearbeitet wurde, machten sich noch bemerkbar. Mit diesem Instrument konnte ich die in Betracht kommenden Messungen mit voller Sicherheit ausführen.

Gleichzeitig mit den Arbeiten am Galvanometer war mit der Aufstellung der Thermoelemente und der Glühlampe begonnen worden, wobei sich zahlreiche, nicht geringe Schwierigkeiten zeigten. Denn bei der Geringfügigkeit des zu erwartenden Effektes war natürlich die Möglichkeit sehr groß, daß ein solcher Effekt durch andere Ursachen verdeckt bez. vorgetäuscht wurde. Wenn z. B. der Boden, auf dem die

Thermoelemente stehen, sich etwas verzieht, oder wenn die Elemente bei der Drehung gerüttelt werden und durch diese oder andere Ursachen der Lampe — und sei es nur um $\frac{1}{4}$ mm — näher kommen, so ist ein nicht geringer Ausschlag im Galvanometer die Folge. Oder es ändert sich bei der Drehung die Umgebung der Elemente: es wird dann die veränderte Strahlung einen Ausschlag und zwar eventuell einen durchaus regelmäßigen hervorrufen. Es mußte sich also die nächste Umgebung mitdrehen und Einflüsse der weiteren Umgebung ausschließen. Ich gelangte so zur Konstruktion eines drehbaren Kastens, der zur Aufnahme der Elemente und der Lampe diente. Dieser Kasten entstand ganz allmählich, indem eine Störung nach der anderen beseitigt wurde. Die schließlich noch auftretenden, wohl kaum zu vermeidenden ließen sich durch geeignete Maßnahmen bei den Messungen eliminieren, wovon später noch die Rede sein wird. Der Kasten, wie er zuletzt benutzt wurde, bot dem Beschauer den Anblick einer geschlossenen Zinkblechtrommel von etwa $\frac{1}{2}$ m Höhe und 1 m Durchmesser. Er stand vermittelst dreier Rollen auf einer $\frac{1}{2}$ cm dicken Spiegelglasplatte, die auf einem festen Experimentiertische lag, und konnte um seine Mittelachse horizontal gedreht werden. Fig. 2 gibt einen Querschnitt durch den Apparat in der Richtung der Thermoelemente.

Auf einer kreisrunden Holzplatte *a*, an welcher die drei Rollen befestigt sind, liegt eine dicke Watteschicht, auf welche dann der eigentliche Kasten für die Elemente frei aufgesetzt ist. Dieser besteht aus dem kreisförmigen Holzboden *b*, der von einem nach innen mit Stanniol beklebten Pappezyylinder *c* rings umschlossen ist. Auf den Boden *b* sind Holzplatten aufgeschraubt, welche die Unterlage bilden für ein Zinkgefäß mit dem Boden *d* und der angelöteten, zylinderförmigen Wand *d'*. Die Zwischenräume zwischen *b* und *d*, *c* und *d'* sind mit Watte gefüllt. Trotz dieser Pappe-, Watte-, Zinkwand waren die innerhalb aufgestellten Thermoelemente doch noch nicht genügend gegen äußere Strahlung geschützt, z. B. gegen die der Sonne. Daher wurde um den Pappezyylinder noch eine Watteschicht und noch ein Zinkmantel *e* herumgelegt. Sowohl der Pappe- wie der innere Zinkzyylinder *d d'* sind nach oben hin durch abnehmbare, mit Latten versteifte Zinkdeckel *f f'* ge-

schlossen. Der ganze innerste Raum war schwarz angestrichen, um eine Reflexion nach Möglichkeit zu verhindern. Die Thermoelemente und die Glühlampe wurden auf ein schmales, trockenes Brett *n* montiert, und dieses wurde auf den Boden *d* fest aufgeschraubt. Die Glühlampe war — natürlich in der Mitte — mit ihrer Fassung fest in einen in das Brett eingeleimten Holzsockel *k* eingeklemmt. Gebracht wurde bei den Endversuchen eine gewöhnliche Glühlampe mit Kohleschleife zu 50 Kerzen,

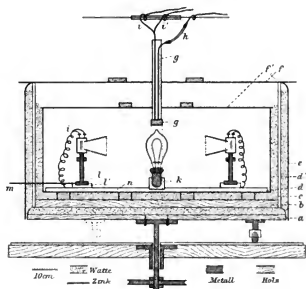


Fig. 2.

40 Volt und 7,75 Amp. Diese Lampe gab an die Thermoelemente nur etwa 5 mal soviel Wärme ab, wie eine gewöhnliche Stearinkerze, und dies war bei Benutzung des d'Arsonval-Galvanometers viel zu wenig. Nachdem ich noch die Anwendung von Petroleumlampen verschiedener Konstruktion, jedoch ohne Erfolg, versucht hatte, blieb mir, um die sonst sehr zweckmäßige und vor allem konstante Glühlampe weiter benutzen zu können, nur der Weg übrig, ein empfindlicheres Galvanometer aufzustellen, wovon ja schon die Rede gewesen ist. Zu beiden Seiten dieser Glühlampe standen nun die nach Rubens konstruierten Thermo-

elemente; diese waren mit ihrem schweren Metallfuß *l* in viereckige Holzklötzchen *l'* fest eingelassen. Letztere waren zwischen zwei Leisten in der Richtung auf die Lampe zu verschiebbar und zwar eines von außen her mittels der hölzernen Handhabe *m*. Zum Schutze gegen im Kasten auftretende Luftströmungen und gegen äußere Einflüsse hatte ich die Elemente zuerst in Watte gepackt und Holzkästen mit Zinkeinlage um sie herum gesetzt, sodaß nur zur Lampe hin eine Öffnung blieb. Die Elemente erhitzen sich aber dabei zu stark, auch war eine solche Umgebung bei der Erwärmung und Drehung zu inkonstant. Desbalb nahm ich die Kästen wieder fort, sodaß also schließlich die Thermoelemente frei etwa in der Mitte zwischen Glühlampe und Wand in dem Kasten standen.

Als Führung für die Leitungsdrähte war in den Boden *b* quer über die Glühlampe ein Holzgalgen *g* eingeleimt, von dem aus in der Mittelachse des ganzen Apparates eine Holzstange *g'* ins Freie führte. Die dicken, wie gewöhnlich isolierten Lichtdrähte gingen direkt am Holz entlang zur Lampe hin. Zur Thermostromleitung *ii'* wurde gewöhnlicher, gut isolierter Klingelleitungsdraht benutzt und zwar wurde er durch Glasröhren an der Stange entlang und über den Boden zu den Elementen geführt. Zuerst war im Kasten jeder Draht einzeln verlegt worden; da aber durch die Drehung die Fläche der Drähte ihre Stellung zum erdmagnetischen Feld änderte, und dadurch sehr störende Induktionsströme auftraten, wickelte ich die Drähte umeinander, nachdem ich sie durch eine dicke Gummibandwicklung noch besser isoliert hatte. Die Induktionsströme fielen von da ab vollständig fort. Etwa einen halben Meter über dem Apparat waren die Drähte an einem Glasrohr befestigt, das über einen quer durchs Zimmer straff gespannten Draht gezogen war. Die Lichtdrähte, die sofort an diesem Draht befestigt waren, hatten zwischen diesem und der Holzstange ein Verbindungsstück *h* aus ganz weicher Leitungsschnur, sodaß sie keinen Zug auf die Holzstange ausüben konnten; sie schlossen sich dann weiterhin an das von der Akkumulatorenbatterie des Instituts ausgehende Stromnetz an. Die Leitung von den Thermoelementen zum Galvanometer bez. zum Stromschlüssel wurde nur über bez. durch Glasröhren geführt; auch der Stromschlüssel stand auf einer Glas-

platte, sodaß die Isolation wohl nichts zu wünschen übrig ließ. Der Schlüssel bestand aus zwei Kupferbarren auf einer Hartgummiplatte, die durch einen Kupferstöpsel verbunden werden konnten; an jeder Barre war eine Klemmschraube, und alle diese Teile waren, um Thermostrome zu vermeiden, aus demselben Kupferblock gearbeitet. Außerdem wurde der Schlüssel während der Versuche durch ein darüber gestülptes Holzkästchen gegen äußere Bestrahlung geschützt. An der ganzen Leitung war nur eine Lötstelle, und diese war dick mit Watte umwickelt, sodaß also Thermostrome nicht mehr in Frage kamen.

Von dieser Lötstelle aus zweigte ein Draht ab, damit auch das Galvanometer allein eingeschaltet werden konnte,

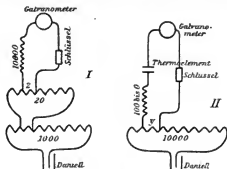


Fig. 3.

wie es zu Empfindlichkeitsbestimmungen nötig war. Diese wurde nach Fig. 3, Schema I gemacht; dabei ergibt sich, unter x den beobachteten Ausschlag verstanden, daß 1 Amp. $x/2 \cdot 10^8$ Skt. liefert. Die Kraft, welche die Glühlampe in einem Thermoelemente erzeugt, wurde nach Schema II gemessen. Dabei war der Widerstand der Thermoelemente, Leitungsdrähte und des Galvanometers zusammen 15 Ohm. Es liefert also ein Thermoelement $1,1/15 \cdot 10^{-4} y$ Amp. oder $1,1/3 \cdot 10^3 xy$ Skt., wo y die Anzahl Ohm bedeutet, die man dem vom Strom eines Daniell durchflossenen Widerstand entnehmen muß. Von diesen Skalenteilen sind nach Fizeau $1/1250$ bei der Drehung um 180° zu erwarten; es wäre also der zu erwartende Ausschlag $0,29333 \dots xy$ Skt. In den Tabellen habe ich den hiernach berechneten nach Fizeau zu

erwartenden Ausschlag für jede Versuchsreihe angegeben. Bei dieser Berechnung, wie bisher überhaupt ist stillschweigend angenommen, daß die elektromotorische Kraft sich in gleicher Weise, wie die Intensität, ändere; ich unterwarf diese Annahme einer experimentellen Prüfung, wobei sie sich als vollkommen berechtigt herausstellte: es gaben nämlich zwei gleichartige Kerzen genau den doppelten Ausschlag, wie jede einzelne.

Ein für das Gelingen der Versuche nicht unwesentlicher Faktor war noch der ruhige und sichere Gang des Kastens beim Drehen, der dadurch erreicht wurde, daß der Kasten, wie schon erwähnt, mittels leicht sich drehender Rollen auf einer Spiegelglasplatte lief. Um ihn nun vom Beobachtungsplatze aus leicht bewegen zu können, war folgender Mechanismus angebracht. In der Mitte des Brettes *a*, an dem auch die Rollen befestigt sind, ist genau senkrecht nach unten hin eine Stahlstange angeschraubt, die durch die Glas- und Tischplatte hindurchgeht und in letzterer eine genau passend gedrehte, festgeschraubte Stahlführung besitzt. Unterhalb der Tischplatte ist auf die Stange eine Eisenrolle von 20 cm Durchmesser aufgeschraubt, die durch ein beim Beobachtungsplatz stehendes Treibrad von 30 cm Durchmesser mittels einer Schnur ohne Ende gedreht werden kann. So konnte ich bei gleichzeitiger Beobachtung die Stellung des Kastens beliebig variieren. Vielleicht ist noch erwähnenswert, daß dieser mitten im Zimmer stand, sodaß um ihn herum nach allen Seiten hin ein freier Raum von mindestens 2 m war. Dadurch wurden die äußeren Bedingungen in betreff der Temperatur, die in dem Zimmer durch die teilweise über 1 m dicken Wände und infolge davon, daß direkte Sonnenstrahlung durch Verkleben der Fenster mit dickem Packpapier abgehalten wurde, an und für sich schon recht gleichmäßig waren, womöglich noch gleichmäßiger gestaltet. Hiermit glaube ich alles Wesentliche über die zu den Versuchen benutzten Apparate gesagt zu haben.

Die Versuche selbst wurden nun in der Weise angestellt, daß eine Stunde vor Beginn der Beobachtungen die Glühlampe angezündet wurde, da die Erfahrung gezeigt hatte, daß sich erst dann im Kasten ein einigermaßen stationärer Zustand herstellte. Ferner wurde dann zwischen jeder Drehung und der zugehörigen Ablesung genau $3\frac{1}{2}$ Min. gewartet, da

erst nach dieser Zeit die Ruhelage wieder erreicht war. Während der $3\frac{1}{2}$ Min. schwankte die Nadel stark, und zwar ergaben sich, wenn alle halbe Minute abgelesen wurde, beispielsweise folgende Zahlen (das Drehen ist mit \vee bezeichnet):

215	\vee	215	230	315	250	225	250
215	\vee	200	205	295	285	260	246
220	\vee	215	350	300	290	253	270
260	\vee	270	260	280	320	310	265
245	\vee	240	320	350	315	287	280
268 \vee u. s. w.							

Diese Schwankungen erkläre ich mir an der Hand der heistehenden Figur folgendermaßen: A und B seien die beiden Thermoelemente. In Stellung I seien sie kompensiert, wobei aber die A umgebende Luft aus irgend einem Grunde wärmer

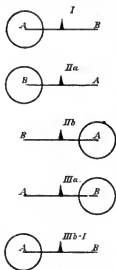


Fig. 4.

bleibe, als um B . Es könnte z. B. der nicht zu vermeidende Umstand, daß ein Element schwächer ist als das andere, und daher näher an der Lampe, also in wärmerer Luft steht, oder daß die Krümmung des Zinkzylinders hinter den Elementen verschieden ist, diese Erscheinung hervorrufen. Drehe ich nun, so dreht sich die Luft nicht mit: B kommt in wärmere, A in kältere Luft (IIa) und wir erhalten einen Ausschlag. Erst allmählich stellt sich der dem Kasten eigentümliche Zustand wieder her, so daß A wieder in wärmerer Luft steht (IIb) und damit der Ausschlag wieder verschwunden ist. Drehe ich dann wieder, so tritt dieselbe Erscheinung auf, wie es Stellung $IIIa$ und $IIIb = I$ zeigen: wir erhalten immer einen Ausschlag nach

derselben Seite hin, was dem tatsächlichen Befunde vollkommen entspricht.

Während der langen Zeit, die so zwischen den einzelnen Messungen gewartet werden mußte, war natürlich die Möglichkeit sehr groß, daß sich der Kompensationspunkt z. B. durch langsames Verziehen infolge von Erwärmung änderte. Da ein derartiger „Drift“, der manchmal auch sprunghaft vor sich

ging, natürlich nichts mit einem etwaigen Einfluß der Erdbewegung zu tun hat, so entfernte ich ihn aus den Resultaten durch eine, wie man zugeben wird, vollkommen statthafte Rechnung. Dieser Drift zeigte sich dadurch, daß die Nadel bei der Rückdrehung in die erste Stellung nicht in ihre alte Lage zurückkehrte; diesen Ausschlag brachte ich auf die Ausschläge bei der einzelnen Drehung in Anrechnung. In den Tabellen, die ich jetzt folgen lasse, habe ich mit a die Stellung bezeichnet, in der das von außen bewegbare Element nach Osten stand, und entsprechend b, c, d für Süden, Norden, Westen. Unter dieser Stellungsbezeichnung steht in der zweiten Reihe jeder Tabelle die entsprechende, beobachtete Zahl; in den vier weiteren Reihen ist der Unterschied zwischen je zwei Stellungen ausgerechnet, also z. B. zwischen a und c , zwischen a und dem nächsten a etc. In der Vertikalreihe rechts sind die Durchschnittswerte dieser Unterschiede angegeben und zwar für $a:c$ bez. $c:c$ etc. durch 2 dividiert, entsprechend ihrer Verwertung zur Korrektur der anderen Zahlen. In der untersten Reihe ist dann noch der nach Fizeau zu erwartende Ausschlag angegeben. Die Zeitangabe zählt vom Augenblick der ersten Ablesung bis zu dem der letzten.

18. November, abends 10⁴⁴ bis 10⁴⁴.

	a	c	a	c	a	c
	265	262	263	260	274	278
$a:c$	-3		-3		+4	
$a:a$	-2		+11			
$c:a$	-1		+14			
$c:c$	-2		+18			

Zu erwartender Ausschlag: 66,0

19. November, mittags 12⁴⁰ bis 12⁴⁰.

	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
	165	155	175	175	165	170	175	170	170	185	190
<i>a : c</i>		+20		-10		+5		±0		+5	+4,0
<i>a : a</i>		+20		-5		±0		+15			+3,8
<i>c : a</i>	-10		±0		+5		-5		+15		+1,0
<i>c : c</i>		+10		-10		+10		-5		+20	+2,5

Zu erwartender Ausschlag: 88,0

19. November, nachmittags 6¹⁴ bis 6⁴⁹.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	215	215	220	260	245	268	268	235	250	248	247
<i>a</i> : <i>c</i>		± 0		+ 40		+ 23		- 33		- 2	+ 5,6
<i>a</i> : <i>a</i>		+ 5		+ 25		+ 23		- 13		- 3	+ 3,2
<i>c</i> : <i>a</i>		+ 5		- 15		± 0		+ 15		- 1	+ 0,8
<i>c</i> : <i>c</i>			+ 45		+ 8		- 33		+ 13		+ 4,1

Zu erwartender Ausschlag: 84,0

19. November, abends 10⁰⁷ bis 10⁴³.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	218	212	220	220	218	230	255	239	260	258	267
<i>a</i> : <i>c</i>		- 6		± 0		+ 12		- 16		- 2	- 2,4
<i>a</i> : <i>a</i>		+ 2		- 2		+ 37		+ 5		+ 7	+ 4,9
<i>c</i> : <i>a</i>		+ 8		- 2		+ 25		+ 21		+ 9	+ 12,0
<i>c</i> : <i>c</i>			+ 8		+ 10		+ 9		+ 19		+ 7,0

Zu erwartender Ausschlag: 88,0

20. November, mittags 12¹⁸ bis 12⁵¹.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	338	340	325	310	355	358	351	358	350	342	337
<i>a</i> : <i>c</i>		+ 2		- 15		+ 3		+ 7		- 8	- 2,2
<i>a</i> : <i>a</i>		- 13		+ 30		- 4		+ 1		- 13	+ 0,1
<i>c</i> : <i>a</i>		- 15		+ 45		- 7		- 8		- 5	+ 2,0
<i>c</i> : <i>c</i>			- 30		+ 48		± 0		- 6		+ 1,5

Zu erwartender Ausschlag: 88,0

20. November, nachmittags 5¹² bis 5⁴⁷.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	368	375	345	352	350	362	345	358	364	378	400
<i>a</i> : <i>c</i>		+ 7		+ 7		+ 12		+ 13		+ 14	+ 10,6
<i>a</i> : <i>a</i>		- 23		+ 5		- 5		+ 19		+ 36	+ 3,2
<i>c</i> : <i>a</i>		- 30		- 2		- 17		+ 6		+ 22	- 4,2
<i>c</i> : <i>c</i>			- 23		+ 10		- 4		+ 20		+ 2,1

Zu erwartender Ausschlag: 84,0

20. November, abends 11⁰⁰ bis 11⁴⁴.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	343	380	400	412	431	428	423	431	430	440	460
<i>a</i> : <i>c</i>	+37		+12		-3		+8		+10		+12,8
<i>a</i> : <i>a</i>	+57		+31		-8		+7		+30		+11,7
<i>c</i> : <i>a</i>	+20		+19		-5		-1		+20		+10,6
<i>c</i> : <i>c</i>	+32		+16		+3		+9				+7,5

Zu erwartender Ausschlag: 84,0

21. November, mittags 11⁰⁰ bis 12⁰⁰.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	140	165	200	205	195	200	210	225	210	235	255
<i>a</i> : <i>c</i>	+25		+5		+5		+15		+25		+15,0
<i>a</i> : <i>a</i>	+60		-5		+15		±0		+45		+11,5
<i>c</i> : <i>a</i>	+35		-10		+10		-15		+20		+8,0
<i>c</i> : <i>c</i>	+40		-5		+25		+10				+8,7

Zu erwartender Ausschlag: 84,0

21. November, nachmittags 5⁰⁰ bis 6⁰⁰.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	404	408	422	430	430	435	440	442	454	450	462
<i>a</i> : <i>c</i>	+4		+8		+5		+2		-4		+3,0
<i>a</i> : <i>a</i>	+18		+8		+10		+14		+12		+6,2
<i>c</i> : <i>a</i>	+14		±0		+5		+12		+12		+8,6
<i>c</i> : <i>c</i>	+22		+5		+7		+8				+6,0

Zu erwartender Ausschlag: 84,0

21. November, abends 12⁰⁰ bis 12⁴⁵.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	230	221	220	198	230	222	228	230	260	258	255
<i>a</i> : <i>c</i>	-9		-12		-8		+2		-2		-5,8
<i>a</i> : <i>a</i>	-10		+10		-2		+32		-5		+2,5
<i>c</i> : <i>a</i>	-1		+32		+6		+30		-3		+14,8
<i>c</i> : <i>c</i>	-23		+24		+8		+28				+4,6

Zu erwartender Ausschlag: 84,0

23. November, mittags 12¹¹ bis 12⁴⁰.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	221	224	220	213	176	165	168	143	152
<i>a</i> : <i>c</i>		+3		-7		-11		-25	-10,0
<i>a</i> : <i>a</i>		-1		-44		-8		-16	-8,6
<i>c</i> : <i>a</i>		-4		-37		+3		+9	-7,3
<i>c</i> : <i>c</i>			-11		-48		-22		-13,5

Zu erwartender Ausschlag: 73,0

23. November, nachmittags 6⁰⁰ bis 6³⁵.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	192	198	212	205	214	207	210	206	237	244	270
<i>a</i> : <i>c</i>		+16		-7		-7		-4		+7	+1,0
<i>a</i> : <i>a</i>		+30		+2		-4		+27		+33	+8,8
<i>c</i> : <i>a</i>		+14		+9		+3		+31		+34	+18,2
<i>c</i> : <i>c</i>			+7		+2		-1		+33		+5,8

Zu erwartender Ausschlag: 73,0

23. November, abends 10²⁵ bis 11⁰⁰.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	329	336	380	345	358	350	356	375	385	393	395
<i>a</i> : <i>c</i>		+8		-35		-3		+19		+13	-0,6
<i>a</i> : <i>a</i>		+52		-22		-2		+29		+10	+6,7
<i>c</i> : <i>a</i>		+44		+13		+6		+10		-3	+14,0
<i>c</i> : <i>c</i>			+9		+5		+25		+23		+7,7

Zu erwartender Ausschlag: 73,0

24. November, nachmittags 6²⁰ bis 6⁴⁰.

	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
	513	515	520	502	518	508	530	560	580
<i>b</i> : <i>d</i>		+2		-18		-10		+30	+1,0
<i>b</i> : <i>b</i>		+7		-2		+12		+50	+8,4
<i>d</i> : <i>b</i>		+5		+16		+22		+20	+15,7
<i>d</i> : <i>d</i>			-13		+6		+52		+7,5

Zu erwartender Ausschlag: 147,0

24. November, abends 11¹⁵ bis 11⁴⁵.

<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
360	342	360	370	370	375	380	465	490	504	510

<i>b</i> : <i>d</i>	-18	+10	+5	+85	+14	+19,2
<i>b</i> : <i>b</i>	±0	+10	+10	+90	+20	+13,0
<i>d</i> : <i>b</i>	+18	±0	+5	+25	+6	+10,8
<i>d</i> : <i>d</i>	+28	+5	+90	+39		+20,2

Zu erwartender Ausschlag: 131,0

25. November, nachmittags 6¹⁵ bis 6⁴⁵.

<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
440	448	457	460	478	475	475	468	505	530	548

<i>b</i> : <i>d</i>	+8	+3	-4	-7	+25	+5,0
<i>b</i> : <i>b</i>	+17	+21	-3	+30	+43	+10,8
<i>d</i> : <i>b</i>	+9	+18	±0	+37	+18	+16,4
<i>d</i> : <i>d</i>	+12	+15	-7	+62		+10,2

Zu erwartender Ausschlag: 117,0

25. November, abends 12¹¹ bis 12⁴⁶.

<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
445	452	480	492	473	485	490	490	482	485	480

<i>b</i> : <i>d</i>	+7	+12	+12	±0	+3	+6,8
<i>b</i> : <i>b</i>	+35	-7	+17	-8	-2	+3,5
<i>d</i> : <i>b</i>	+28	-19	+5	-8	-5	+0,2
<i>d</i> : <i>d</i>	+40	-7	+5	-5		+4,1

Zu erwartender Ausschlag: 107,0

26. November, nachmittags 6²⁵ bis 6⁴⁵.

<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
260	264	285	267	273	269	264

$a:c$	+4	-18	-4	-6,0
$a:a$	+25	-12	-9	+0,7
$c:a$	+21	+6	-5	+7,3
$c:c$	+3	+2		+1,2

Zu erwartender Ausschlag: 117,0

26. November, abends 11⁰⁰ bis 11³⁰.

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
	425	430	430	425	430	435	480	488	480	491	485
<i>a</i> : <i>c</i>	+5		-5		+5		+8		+11		+4,8
<i>a</i> : <i>a</i>	+5		±0		+50		±0		+5		+6,0
<i>c</i> : <i>a</i>	±0		+5		+45		-8		-6		+7,2
<i>c</i> : <i>c</i>		-5		+10		+53		+3			+7,6

Zu erwartender Ausschlag: 117,0

Die folgenden Angaben sind in Prozent des nach Fizeau zu erwartenden Ausschlages ausgedrückt.

Mittags ca. 12 Uhr.

Datum	<i>a</i> : <i>c</i>	<i>c</i> : <i>a</i>	Korrektur
19. XI.	+ 4,54	+1,14	- 3,54
20. XI.	- 2,50	+2,27	- 0,91
21. XI.	+17,86	+9,52	-12,05
23. XI.	-13,70	-9,93	+15,15
Durchschn.:	+ 1,55	+0,75	- 0,34

Mit Korrektur:

$$a : c = + 1,21, \quad c : a = + 0,41.$$

Abends ca. 12 Uhr.

Datum	<i>a</i> : <i>c</i>	<i>c</i> : <i>a</i>	Korrektur
18. XI.	+ 1,06	+11,36	- 4,70
19. XI.	- 2,73	+13,86	- 6,05
20. XI.	+15,24	+12,62	-11,43
21. XI.	- 6,90	+17,62	- 4,24
23. XI.	- 0,82	+19,18	-10,00
26. XI.	+ 4,10	+ 6,15	- 5,85

$$\text{Durchschn. : } + 1,66 \mid +13,46 \mid - 7,05$$

Mit Korrektur:

$$a : c = - 5,39, \quad c : a = + 6,41.$$

Mittags und abends zusammen: $a : c = - 2,09, \quad c : a = + 3,41.$

Nachmittags ca. 6 Uhr.

Datum	<i>a</i> : <i>c</i>	<i>c</i> : <i>a</i>	Korrektur
19. XI.	+ 6,67	+ 0,95	- 4,36
20. XI.	+12,62	- 5,00	- 2,13
21. XI.	+ 3,57	+10,24	- 6,81
23. XI.	+ 1,37	+24,93	-10,00
26. XI.	- 5,13	+ 6,27	- 0,82
Durchschn.:	+ 3,82	+ 7,48	- 4,82

Mit Korrektur: $a : c = - 1,00, \quad c : a = + 2,66.$

Nachmittags ca. 6. Uhr.

Datum	$b:d$	$d:b$	Korrektur
24. XI.	+0,67	+10,67	-5,41
25. XI.	+4,28	+14,01	-9,00
Durchschn.:	+2,47	+12,34	-7,20

Mit Korrektur:

$$b:d = -4,73, \quad d:b = +5,14.$$

Abends ca. 12 Uhr.

Datum	$b:d$	$d:b$	Korrektur
24. XI.	+14,66	+8,24	-12,69
25. XI.	+6,85	+0,19	-3,56
Durchschn.:	+10,50	+4,21	-8,12

Mit Korrektur:

$$b:d = +2,38, \quad d:b = -3,91.$$

Von diesen Resultaten ist das wichtigste das aus denjenigen Messungen erhaltene, welche in der Ost-West-Richtung des mittags und abends ca. 12 Uhr vorgenommen sind, denn um diese Zeit und in dieser Richtung ist die in Betracht kommende Resultante der Erdbewegung, also auch ihr etwaiger Einfluß am stärksten. Da ergibt sich nun für die Drehung $a:c$: $-2,09$ Proz. und für $c:a$: $+3,41$ Proz., also rund ein Ausschlag von ∓ 3 Proz., anstatt nach Fizeau ∓ 100 Proz. Ob dieser Ausschlag nun wirklich durch die Erdbewegung hervorgerufen ist, oder ob er auf Versuchsfehler zurückzuführen ist, ist nicht leicht zu entscheiden; für ersteres spricht der Umstand, daß bei derselben Drehung auch des nachmittags ein Ausschlag und zwar nach derselben Richtung hin vorhanden ist, ein Ausschlag, wie er sich in geringerer Größe aus der Bewegung der Erde um ihre Achse berechnen ließe. Für die zweite Auffassung sprechen entschieden die Resultate aus der Nord-Süd-Stellung, nach denen um 12 Uhr ein Ausschlag von ± 3 Proz. — also gerade entgegengesetzt, wie bei der Ost-West-Stellung — und um 6 Uhr ein solcher von ∓ 5 Proz. entstand, während überhaupt keiner hätte auftreten dürfen. Nach meiner Überzeugung hat die Erdbewegung keinen Einfluß auf die Verteilung der Intensität der Licht- und Wärmestrahlung, oder höchstens einen solchen, der von der zweiten Potenz des Quotienten aus Licht- und Erdgeschwindigkeit abhängig, also jedenfalls nach der von Fizeau vorgeschlagenen Methode so gut wie unmeßbar ist.

Vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität zu Bonn angefertigt. Für das Wohlwollen, das

der Direktor desselben, Hr. Prof. Dr. Kayser, mir stets gezeigt hat, möchte ich ihm auch an dieser Stelle meinen Dank ausdrücken. Ganz besonders aber gilt mein Dank Hrn. Privatdozent Dr. Bucherer, der mir bei der Ausführung der Versuche jederzeit in liebenswürdigster Weise mit Rat und Tat zur Seite gestanden und mir die zu den Versuchen nötigen Apparate freundlichst zur Verfügung gestellt hat.

Bonn, Neujahr 1903.

(Eingegangen 10. März 1903.)

**5. Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit
von Argon und Helium nach der Methode von
Schleiermacher;
von Walther Schwarze.**

(Der Teil über Argon ist ein Auszug aus der Dissertation des Verfassers.)

Die kinetische Gastheorie liefert zwischen dem Koeffizienten der Wärmeleitung k und dem der Reibung η die Beziehung ¹⁾:

$$k = f \cdot \eta \cdot c_v.$$

c_v ist die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, f ein konstanter Faktor, der nach den Rechnungen von Conran und Neugebauer = 1,6027 ist. Dies sollte für einatomige Gase am besten zutreffen. Es war deshalb für die kinetische Gastheorie von großer Bedeutung, die jetzt bekannten einatomigen Gase daraufhin zu untersuchen.

Auf Anregung und mit freundlicher Unterstützung des Hrn. Prof. Dr. Dorn habe ich im Winter 1901—1902 die Wärmeleitungsfähigkeit von Argon und zum Vergleich auch die von Luft nach der Methode von Schleiermacher untersucht. ²⁾ Ende 1902 konnte ich den früheren Versuchen noch die über Helium hinzufügen.

Grundidee der Methode.

Nach Schleiermacher ³⁾ wird ein in der Achse eines Glasrohres, welches das Gas enthält, ausgespannter Platindraht durch einen galvanischen Strom erwärmt. Wenn die

1) O. E. Meyer, Die kinet. Theorie der Gase, 2. Aufl., Math. Zusätze, p. 128. 1899.

2) W. Schwarze, Inaug.-Diss. Halle 1902.

3) A. Schleiermacher, Wied. Ann. 34. p. 623. 1888.

Glaswand auf konstanter Temperatur erhalten bleibt, wird nach kurzer Zeit auch die Temperatur des Drahtes stationär. Man mißt Stromstärke und Widerstand des Drahtes und erhält daraus die durch Leitung und Strahlung dem Draht entzogene Wärme. Ist ferner die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur bekannt, so ist durch den Widerstand auch die Temperatur des Drahtes bestimmt. Hat man die Dimensionen des Apparates ermittelt, so besitzt man alle Daten zur Berechnung der Leitungsfähigkeit des Gases, wenn die durch Strahlung übergeführte Wärme für sich durch besondere Versuche ermittelt worden ist.

Dies Verfahren wurde deswegen gewählt, weil es gestattet, mit einer relativ kleinen Gasmenge lange dauernde Beobachtungen auszuführen, ohne daß man eine Verunreinigung zu befürchten hat.

I. Beschreibung der Apparate.¹⁾

In der Achse eines Glasrohres GG' ist ein dünner Platindraht ausgespannt; an a ist ein dickerer Platindraht, an a' eine Stahl- und darin befindliche Kupferdrahtspirale und an deren Enden ebenfalls ein dickerer Platindraht P' angelötet. Die Stahlfeder ist leicht gespannt und zieht den Draht aa' , wenn er durch den galvanischen Strom erwärmt wird und sich ausdehnt, wieder straff, sodaß er immer in der Achse der Röhre bleibt.

Sämtliche Lötungen sind mit Feingold ausgeführt. Die noch dünneren Platindrähte e und e' sind an den Enden vorher galvanisch vergoldet, einmal um den Draht aa' herumgeschlungen und dadurch angelötet, daß man den Draht aa' durch einen starken galvanischen Strom zum Glühen brachte. Hierdurch wird die Lötstelle sehr fein und die Verhältnisse in der Nähe derselben am wenigsten modifiziert. e und e' sind an ihren Enden wieder an dickere Platindrähte angelötet.

Die dickeren Platindrähte sind in Glas eingeschmolzen und darüber Röhren angesetzt, die zur Aufnahme von Quecksilber dienen. Die Röhre p führt zur Luftpumpe. Die Glas-

1) Fig. 1. der Dissertation.

bläserarbeit der beiden verwendeten Apparate wurde von Hrn. F. O. R. Götze, Leipzig, ausgeführt.

II. Maße der Apparate und ihre Bestimmung.

Der Durchmesser der Platindrähte aa' wurde mikroskopisch und aus Masse und spezifischem Gewicht bestimmt, die Länge mit dem Kathetometer gemessen. Der innere Durchmesser der Glasröhren wurde folgendermaßen ermittelt: Die vorhergehenden und folgenden Stücke der Glasröhren, aus welchen die Röhren GG' angefertigt wurden, wurden an einem Ende zugeschmolzen und mit Quecksilber gefüllt, die Höhe des Quecksilbers mit dem Kathetometer gemessen, ein Teil des Quecksilbers vorsichtig abgesaugt, die Höhe wieder gemessen und das abgesaugte Quecksilber gewogen.

Aus dieser Wägung wurde unter Berücksichtigung der Temperatur des Quecksilbers der innere Durchmesser und mittels Kathetometer der äußere bestimmt.

Die Differenz beider ergab die Glasdicke. Auf diese Weise erhielt man die Glasdicke zu beiden Seiten der Röhren GG' . Für jede Röhre wurde aus den beiden Messungen das Mittel genommen. Nun wurde an den Röhren selbst mit dem Kathetometer an vielen Stellen der äußere Durchmesser ermittelt. Die Differenz des äußeren Durchmessers und der mittleren Glasdicke ergab die lichte Weite der Röhren. Dies Verfahren wurde deshalb angewandt, um die Apparate nach den Beobachtungen nicht zerbrechen zu müssen.

Die Messungen ergaben:

	Apparat I	Apparat II
Länge des Platindrahtes . . .	420,2 mm	417,0 mm
Zwischen den Elektroden . . .	840,23 "	841,62 "
Durchmesser des Drahtes ¹⁾ . . .	0,4038 "	0,4014 "
Länge der Elektroden	15,0 "	15,0 "
Durchmesser der Elektroden . .	0,1 "	0,1 "
Lichter Durchmesser der Röhren	23,710 "	15,054 "
Dicke der Glaswand	0,849 "	0,596 "
Widerstand w_0 bei 0°	0,47454 Ω	0,47059 Ω

1) Mikroskop: I = 0,4040, II = 0,4018 mm,

Wägen: I = 0,4036, II = 0,4010 mm.

III. Versuchsanordnung.

Der Apparat liegt horizontal in einem Kasten aus Weißblech von etwa 15 Liter Inhalt, welcher das Bad von konstanter Temperatur enthält. Der Apparat ist so aufgehängt, daß man den Kasten darunter hinwegnehmen kann, und steht auf einem Tische, welcher auf einer auf das Kellergewölbe des Instituts aufgemauerten Steinplatte ruht.

An die Röhre p ist ein Glasrohr angeschmolzen, welches mit Blattgold gefüllt ist, um Quecksilberdämpfe vom Wärmeleitungsapparat abzuhalten. Der ganze Apparat wurde durch eine Kundtsche Glasfeder mit einer Töplerpumpe verbunden.

Um jeden mit Fett gedichteten Hahn zu vermeiden, konnte die Verbindung nach außen durch ein U-förmiges Glasrohr¹⁾ mit Quecksilber abgedichtet werden, sodaß der ganze Apparat nur durch Quecksilber und Glas verschlossen war.

Bei den Versuchen wurde der Platindraht aa' ²⁾ durch einen galvanischen Strom erwärmt, den eine Batterie von 1—2 Akkumulatoren lieferte. Außer dem Platindraht lag in diesem Stromkreise eine Einheit³⁾ von 1 Ohm von Wolff, geprüft in der Reichsanstalt, ein Ampèremeter von Siemens & Halske und, um eine bestimmte Stromstärke zu erhalten, ein Regulierwiderstand von etwa 75 Ohm.

Von der Einheit ging eine Abzweigung durch einen Rheostaten R zu einem Draht des Differentialgalvanometers G . Von den beiden Elektroden e und e' ging eine zweite Abzweigung durch den zweiten Galvanometerdraht, und zwar so, daß die Ströme die Drähte in entgegengesetztem Sinne durchliefen.

Bei schwachem Hauptstrom — etwa 0,03 A. — wird in R so viel Widerstand eingeschaltet, daß der Galvanometerspiegel in Ruhelage bleibt. Der Temperaturüberschuß des Drahtes ist hierbei merklich gleich Null. In gleicher Weise wird bei starkem Hauptstrom (bis zu 0,5 A.), der den Draht auf die gewünschte Temperatur bringen soll, verfahren. Man erhält aus diesen Beobachtungen w_0 und w_r .

1) Fig. 3 der Dissertation.

2) Fig. 2 der Dissertation.

3) Die Einheit war aus Manganin und befand sich in einem Petroleumbad von Zimmertemperatur.

Der Widerstand jeder Galvanometerrolle betrug ca. 600 Ohm und wurde, weil er sich mit der Zimmertemperatur veränderte, vor und nach jeder Beobachtung mit Hilfe eines zweiten Galvanometers bestimmt; auch wurden die Zuleitungen und Widerstände der Elektroden e und e' bei 0° und 100° berücksichtigt.

Die Einstellung des kompensierenden Widerstandes in R konnte nur bis zu 0,1 Ohm geschehen; die weitere bis zu 0,01 Ohm erhielt man durch Interpolation.

Das Galvanometer (Kohlrausch) stand auf einer in die Wand eingelassenen Steinplatte und war, um äußere Einflüsse möglichst abzuhalten, mit einem aus Transformatorblech gewickelten Mantel umgeben. Es hatte eine Empfindlichkeit von 1 mm Skt. = $2 \cdot 10^{-9}$ A.; Abstand der Skala gleich 2 m.

Der Widerstand R war ein neuer Kurbelrheostat aus Manganin von Wolff, von Hrn. Prof. Dorn selbst entworfen und geprüft. Die Stromstärke im Hauptstrome wurde durch ein Ampèremeter von Siemens & Halske gemessen; seine Angaben wurden mit einem Silbervoltmeter verglichen. Man konnte 0,0001 Amp. ablesen.

Die Stromstärke blieb während der Beobachtungen konstant, Thermoströme wurden nicht bemerkt, würden auch durch Wenden des Hauptstromes unschädlich gemacht sein. Für jede Beobachtung wurden vier Ablesungen gemacht, zwei bei kommutiertem Hauptstrome und zwei bei kommutiertem Strome in den Abzweigungen.

IV. Theorie der Beobachtungen.

Die Gleichung für stationären Zustand bei radialer Wärmeleitung in dem Raume zwischen zwei Zylinderflächen ist

$$0 = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr},$$

wo r den Radius und u die Temperatur bedeutet.

Die Lösung hierfür ist $u = C \log r + C'$; ist ferner u_1 die Temperatur des Drahtes, u_2 die des Bades, r_1 der Radius des Drahtes, r_2 der der Röhre, so wird

$$C = \frac{u_1 - u_2}{\log r_1 - \log r_2}.$$

Wenn k der Koeffizient der Wärmeleitungsfähigkeit des Gases ist, so ist die durch Leitung dem Draht entzogene Wärme für die Fläche 1

$$= -k \frac{d u}{d r},$$

also:

$$= k \frac{u_1 - u_2}{r_1 (\log r_2 - \log r_1)}$$

für die ganze Länge L zwischen den Elektroden (Fläche gleich $2 \pi r_1 L$)

$$= k \frac{2 \pi L (u_1 - u_2)}{\log r_2 - \log r_1}.$$

Die im Platindraht entwickelte Wärmemenge Q muß aber gleich der durch Leitung und Strahlung (S) fortgeführten sein. Wir erhalten also in Grammkalorien/Sekunden

$$Q = k \frac{2 \pi L (u_1 - u_2)}{\log r_2 - \log r_1} + S.$$

Nach Joules Gesetz ist aber $Q = 0,239 i^2 w_0 (1 + \alpha u_1)$, wenn α der Temperaturkoeffizient der Widerstandsänderung der Platindrähte ist, i in Ampère und w in Ohm gemessen sind. Durch Gleichsetzung folgt:

$$0,239 i^2 w_0 (1 + \alpha u_1) = k \frac{2 \pi L (u_1 - u_2)}{\log r_2 - \log r_1} + S,$$

daraus läßt sich k berechnen:

$$k = \frac{[0,239 i^2 w_0 (1 + \alpha u_1) - S u_1] (\log r_2 - \log r_1)}{2 \pi L (u_1 - u_2)},$$

$S u_1$ ist die für u_1 berechnete Strahlung.

Die Strahlung wird durch besondere Versuche ermittelt, für die entsprechende Temperatur u_1 in Grammkalorien umgerechnet und von der entwickelten Wärmemenge abgezogen. Die Temperatur u_1 des Drahtes wurde aus dem Widerstande w_0 desselben bei 0° und dem Widerstande w_{u_1} bei u_1° durch sukzessive Näherung auf Grund der Beziehung $w_{u_1} = w_0 (1 + \alpha u_1)$ ausgerechnet. Es war deshalb nötig, den Temperaturkoeffizienten der Widerstandsänderung der Platindrähte möglichst genau zu bestimmen.

V. Bestimmung des Temperaturkoeffizienten der Widerstandsänderung der Platindrähte.

a) Bevor die Drähte in die Apparate eingeschmolzen waren, wurde der Temperaturkoeffizient der Widerstands-

änderung nach F. Kohlrausch mit übergreifendem Nebenschluß bestimmt, und zwar für Draht I und einen zweiten Draht B, der später zu Grunde ging.

Die Drähte befanden sich in einem Petroleumbade; der eine wurde auf möglichst konstanter Temperatur gehalten, der andere auf 10°, dann auf 20° und zuletzt auf 30°. Die Messungen ergaben:

Mittlerer Temperaturkoeffizient zwischen 0° und					
10°		20°		30°	
I	B	I	B	I	B
0,0021034	0,0021040	0,0020997	0,0021000	0,0020957	0,0020960
21037	21035	21001	20996	20963	20964
21043	21035	20990	20998	20958	20956
Mittel: 0,0021038		Mittel: 0,0020997		Mittel: 0,0020959	

Es ergibt sich für den Temperaturkoeffizienten im Mittel:
 $\alpha = 0,0021078 - 0,0000004$.

b) Da, wie schon oben erwähnt, der mit B bezeichnete Draht zu Grunde ging, mußte ich einen neuen nehmen und bestimmte nun den Temperaturkoeffizienten nochmals, nachdem die Drähte schon in die Apparate eingeschmolzen waren.

Bei immer schwachem Hauptstrom, sodaß also der Draht keinen meßbaren Temperaturüberschuß hatte, wurde zuerst bei 0° aus dem kompensierenden Widerstand in R (Fig. 2) der Widerstand des Drahtes ermittelt, dann wurde der Apparat auf 100° erhitzt und wieder in R kompensiert. Um eventuelle Änderungen der Widerstände in den Zweigkreisen zu eliminieren, wurde die erste Einstellung bei 0° wiederholt. Außerdem wurden ähnliche Messungen zwischen 0° und 50° ausgeführt, um die Abhängigkeit des Koeffizienten von der Temperatur zu finden. Die Temperaturen um 50° wurden im Wasserbade durch Regulierung von Brennern erhalten und an zwei korrigierten Thermometern abgelesen. Das Wasserbad wurde durch eine Wasserschnecke in Bewegung gehalten, die von einer Turbine getrieben wurde.

Die Messungen ergaben folgende Werte:

Mittlerer Temperaturkoeffizient zwischen 0° und 100°

Apparat I	Apparat II
0,0020703	0,0020684
20684	20640
20680	20668
Mittel: 0,0020689	Mittel: 0,0020664

Mittlerer Temperaturkoeffizient zwischen 0° und 50°

Apparat I	Apparat II
0,0020886	0,0020868
20873	20870
20884	20864
Mittel: 0,0020881	Mittel: 0,0020867

Die Messungen zeigen, daß der Temperaturkoeffizient mit steigender Temperatur abnimmt. Die Drähte waren von einem Stück abgeschnitten, und da ihre Werte nahe übereinstimmen, wurden die Mittelwerte 0,0020677 und 0,0020874 zur Berechnung genommen. Es ergibt sich für den Temperaturkoeffizienten der Widerstandsänderung der Platindrähte der Wert: $\alpha = 0,0021077 - 0,0000004 u$. Die unter a) gefundenen Werte stimmen mit den unter b) ermittelten sehr gut überein.

VI. Strahlungsversuche.

Um die Werte für die Strahlung zu ermitteln, wurden die Apparate vor den Versuchen 12 Stunden lang im Luftbade auf etwa 200° erhitzt und mit einer Quecksilberluftpumpe nach Toepler-Hagen ausgepumpt. Während des Auspumpens wurden die Drähte durch einen starken Strom (bis 2,36 A.) häufig bis zur Rotglut erhitzt. Das Leuchten ist bekanntlich sehr stark von der Temperatur abhängig. Man konnte an den Stellen, wo die Elektroden angelötet waren, eine zu beiden Seiten etwa 1 cm lange dunklere Färbung des Platindrabtes wahrnehmen; nach den Enden zu hatte der Draht dieselbe Färbung wie in der Mitte. Bei den Versuchen selbst wurde das Vakuum geprüft und unverändert gefunden; außerdem wurde während der Beobachtungen die tiefste Biegung der Kundtschen Glasfeder¹⁾, welche Apparat und Pumpe verbindet,

1) Fig. 3 b der Dissertation.

in feste Kohlensäure gesteckt, um Quecksilberdämpfe zu kondensieren. Die Messungen sind entsprechend den Verhältnissen bei den Wärmeleitungsversuchen angestellt. u gleich Temperatur des Drahtes, u' die des Bades (die Siedetemperaturen wurden an zwei korrigierten Thermometern abgelesen), S die ausgestrahlten Wärmemengen im Grammkalorien pro Sekunde. Die Quotienten $S/(T^4 - T'^4)$, wo T und T' die absoluten Temperaturen von Draht und Bad sind, sollten nach dem Stefan'schen Strahlungsgesetz für „schwarze“ Strahlung konstant sein. Wie die Tabellen zeigen, nehmen sie mit steigender Temperatur langsam ab.

Tabelle I.

Apparat I.

$u' = 0^\circ$			$u' = 99,8^\circ$		
u	S in g-Kal. pro Sek.	$S/(T^4 - T'^4)$	u	S in g-Kal. pro Sek.	$S/(T^4 - T'^4)$
4,85°	0,0002955	7,290 · 10 ⁻¹³	103,72°	0,000676	7,624 · 10 ⁻¹³
7,89	4868	7,265	109,55	1469	6,992
12,28	7590	7,104	116,11	2410	6,679
32,79	0,002207	6,921	116,14	2407	6,656
46,50	3344	6,874			

Tabelle II.

Apparat II.

$u' = 0^\circ$			$u' = 100,00^\circ$		
u	S in g-Kal. pro Sek.	$S/(T^4 - T'^4)$	u	S in g-Kal. pro Sek.	$S/(T^4 - T'^4)$
2,89°	0,0001846	7,718 · 10 ⁻¹³	103,67°	0,0005128	6,638 · 10 ⁻¹³
5,76	3580	7,406	108,61	1214	6,405
9,11	5645	7,246	114,12	1990	6,417
25,59	0,001711	7,146	120,67	2987	6,409
37,63	2613	6,952			

Die Strahlung⁷ hat bei den vorliegenden Versuchen nur einen kleinen Anteil, im günstigsten Falle beträgt sie $\frac{1}{86}$ der Wärmeleitung, im ungünstigsten $\frac{1}{30}$. Danach würde ein Irrtum bei den Strahlungsversuchen um 10 Proz. im ersten Falle noch nicht ganz $\frac{1}{8}$ Proz., im letzten etwa $\frac{1}{3}$ Proz. Unterschied auf das Endresultat der Beobachtungen ausmachen.

VII. Versuche mit Luft.

Die Füllung der Apparate mit Luft geschah auf folgende Weise. Die Füllkugel q ¹⁾ wurde so tief gesenkt, daß das U-Rohr u frei wurde, dann wurde der Hahn c geöffnet und das ganze System bis zum Hahn c' vollkommen ausgepumpt. Durch Öffnen des Hahnes c' konnte die Luft langsam eingelassen werden. Die zu den Versuchen benutzte Luft ging erst durch eine Waschflasche mit Kalilauge, dann durch eine zweite mit konzentrierter Schwefelsäure; daran schloß sich ein 30 cm langes mit Natronkalk und Phosphorpentoxyd je zur Hälfte gefülltes Trockenrohr, zuletzt das 50 cm lange, nur Phosphorpentoxyd enthaltende Trockenrohr a' , welches direkt an das System angeschmolzen war; die übrigen Verbindungen waren mit dickwandigen Gummischläuchen hergestellt. Nachdem das System mehrfach gespült und der zu den Anfangsbeobachtungen gewünschte Druck, welcher an dem mit Kathetometer kalibrierten Manometer der Luftpumpe abgelesen werden konnte, vorhanden war, wurde die Füllkugel q wieder gehoben, sodaß das Hg im U-Rohr u den Apparat nach außen abspernte. Die Absperrung blieb während der sämtlichen Beobachtungen. Der Apparat ist also mit trockener, kohlenstofffreier Luft gefüllt. Nun wurden die Versuche unter den in III. angegebenen Bedingungen ausgeführt. Es dauerte etwa 15 Min., bis der Draht eine stationäre Temperatur hatte. Der Temperaturüberschuß wurde in den Grenzen von 5–12° gewählt, weil bei höheren Temperaturen infolge der schlechten Wärmeleitfähigkeit des Glases die innere Wand des Apparates eine merklich höhere Temperatur haben würde als die äußere, und dieser Umstand eine Ungenauigkeit in die Berechnung bringen würde.

Die folgenden Tabellen geben die Resultate der Beobachtungen an. u' ist die Temperatur des Bades, $u - u'$ der Temperaturüberschuß des Platindrahtes gegen die Umgebung, p der Druck des Gases in Millimetern Quecksilber, $L + S$ die durch Leitung und Strahlung, S die allein durch Strahlung, L die allein durch Leitung übergeführte Wärmemenge in

1) Fig. 3 der Dissertation.

Grammkalorien pro Sekunde. $L/u-u'$ eine der Leitungsfähigkeit proportionale Größe.

Tabelle III.
Apparat I. Luft.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$				
	$u - u'$	$L + S$ in g.-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
100,4	7,69°	0,02395	0,00047	0,02347	0,003054
81,0	7,77	2416	48	2368	3048
65,6	7,65	2384	47	2337	3055
49,0	7,69	2405	47	2358	3066
35,8	7,68	2400	47	2353	3063
23,8	7,75	2416	48	2368	3055
—	5,62	1744	34	1710	3042
9,6	7,78	2416	48	2368	3043
—	5,68	1753	35	1719	3027
5,2	7,84	2417	48	2368	3022
—	5,65	1753	35	1718	3040
1,8	7,27	2118	45	2078	2858
—	5,00	1435	30	1405	2810
0,6	8,32	2162	51	2111	2537
—	5,29	1420	32	1388	2622

Tabelle IV.
Apparat I. Luft.

p mm	Bad = siedendes Wasser				
	$u - u'$	$L + S$ in g.-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
23,8	12,29°	0,04886	0,00175	0,04711	0,003834
—	7,84	8070	114	2957	3769
9,6	12,47	4937	178	4759	3816
—	7,80	3083	113	2970	3809
5,2	8,42	3327	123	3204	3805
—	6,65	2626	99	2527	3801
1,8	8,76	3207	127	3080	3518
—	6,63	2460	98	2362	3563
—	6,82	2460	99	2361	3545

Tabelle V.
Apparat II. Luft.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$				
	$u - u'$	$L + S$ in g-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
92,2	7,86°	0,02777	0,00049	0,02728	0,008470
—	6,20	2194	39	2156	8478
73,8	7,86	2732	49	2683	8412
—	6,24	2165	39	2126	3407
55,8	7,83	2721	49	2672	8415
—	6,21	2155	39	2116	3410
43,8	6,11	2125	38	2087	3417
27,8	7,68	2664	48	2617	3408
18,2	6,06	2095	38	2057	3392
9,8	6,12	2095	38	2057	3363
4,8	7,84	2665	49	2617	8340

Tabelle VI.
Apparat II. Luft.

p mm	Bad = siedendes Wasser				
	$u - u'$	$L + S$ in g-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
73,8	7,19°	0,03172	0,00090	0,03082	0,004290
43,8	7,14	3147	92	3054	4278
27,8	7,20	3148	95	3053	4240
18,2	7,13	3134	94	3041	4263
9,8	5,70	2472	75	2397	4208
4,8	7,22	3070	96	2974	4119

Die Werte für $L/u - u'$ würden nach Schleiermacher der Wärmeleitungsfähigkeit bei den Temperaturen $u' + \frac{1}{2}(u - u')$ entsprechen. In den folgenden Tabellen sind sie mit Hilfe des sich aus ihnen ergebenden Temperaturkoeffizienten¹⁾ auf 0 bez. 100° umgerechnet.

1) Vgl. Tabelle IX.

Tabelle VII.
Apparat I. Luft.

p mm	Bad $u' = 0$		Bad $u' = 100^\circ$	
	$u - u'$	$L_0 / u - u'$	$u - u'$	$L_{100} / u - u'$
100,4	7,69°	0,003025	—	—
81,0	7,77	3019	—	—
65,6	7,65	3027	—	—
49,0	7,69	3037	—	—
35,8	7,68	3035	—	—
23,8	7,75	3025	12,99°	0,008792
—	5,62	3022	7,84	3747
9,6	7,78	3014	12,47	3774
—	5,68	3005	7,80	3785
5,2	7,84	2991	8,42	3777
—	5,65	3018	6,65	3781
1,8	7,27	2827	6,63	3544
—	5,00	2792	8,76	3492
0,6	8,32	2506	—	—
—	5,29	2603	—	—

Tabelle VIII.
Apparat II. Luft.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$		Bad $u' = 100^\circ$	
	$u - u'$	$L_0 / u - u'$	$u - u'$	$L_{100} / u - u'$
92,2	7,86°	0,003437	—	—
—	6,20	3452	—	—
73,8	7,86	3377	7,19°	0,004263
—	6,24	3380	—	—
55,8	7,83	3382	—	—
—	6,21	3383	—	—
43,8	6,11	3391	7,14°	0,004251
27,8	7,68	3376	7,20	4213
18,2	6,06	3366	7,13	4235
9,8	6,12	3337	5,70	4181
4,8	7,84	3309	7,22	4093

Die Zahlenwerte, soweit sie unmittelbar vergleichbar sind, stimmen in befriedigender Weise überein. Bei sehr niedrigen Drucken nimmt die Leitungsfähigkeit merklich ab. Für die Berechnung von $L_0/u-u'$ wurde das Druckintervall merklich konstanter Leitung benutzt. Es sind dies bei Apparat I die Werte für die Drucke 100,4 mm — 5,2 mm, für Apparat II für die Drucke 73,8 mm — 4,8 mm. In beiden Fällen sind die Mittelwerte genommen.

Mittelwerte:

Apparat I

0,003020

Apparat II

0,003367

Aus diesen Zahlen ergeben sich die Wärmeleitfähigkeiten k_0 bei 0° unter Benutzung der Formel

$$k_0 = \frac{-L_0}{u-u'} \cdot \frac{\log r_1 - \log r_2}{2\pi L}.$$

Apparat I

$k_0 = 0,00005753$

Apparat II

$k_0 = 0,00005685$

Mittelwert aus beiden Apparaten für Luft $k_0 = 0,00005719$.

Da ich die Wärmeleitungsfähigkeit bei 0 und 100° bestimmt habe, habe ich auf Grund der Formel $k=k_0(1+\gamma u)$ den Temperaturkoeffizienten γ ausgerechnet. Die folgende Tabelle enthält die Resultate.

Tabelle IX.

Temperaturkoeffizient für Luft.

Apparat I.

Apparat II.

Luft		Luft	
P	γ	P	γ
23,8	0,002537	73,8	0,002625
—	2399	43,8	2536
9,6	2523	27,8	2490
—	2595	18,2	2581
5,2	2627	9,8	2530
—	2527	4,8	2371
1,8	2536		
—	2506		

Mittel: 0,002531

Mittel: 0,002520

Mittelwert aus beiden Apparaten für Luft $\gamma = 0,00253$.

Zum Vergleich führe ich die von Schleiermacher¹⁾, Winkelmann²⁾ und Egon Müller³⁾ bestimmten Temperaturkoeffizienten an:

Schleiermacher:	Winkelmann:	Egon Müller:
$\gamma = 0,00281$	$\gamma = 0,00190$	$\gamma = 0,00196$

Der von mir bestimmte Temperaturkoeffizient liegt zwischen dem von Schleiermacher und Müller bestimmten, ist aber immer noch erheblich größer als letzterer.

VIII. Darstellung des Argons.

Bei der Herstellung des Argons habe ich mich im wesentlichen an die Arbeit des Hrn. H. Schultze⁴⁾ gehalten.

Das Argon wurde bis auf eine letzte Operation nach der von Ramsay und Travers⁵⁾ gegebenen Methode dargestellt.

Die Absorption des Sauerstoffs und Stickstoffs wurde in drei Stufen ausgeführt. In der ersten wurde der Sauerstoff durch rotglühendes metallisches Kupfer entfernt; in der zweiten wurde der argonhaltige Stickstoff zweimal über glühendes metallisches Magnesium geführt; in der dritten wurde das nun an Argon reiche Gas durch Überleiten über eine rotglühende Mischung von Magnesium und wasserfreiem Kalk von den Resten des Stickstoffs und durch rotglühendes Kupferoxyd von Wasserstoff befreit. Hiermit war die Darstellung des Argons beendet, das Funken des Argons in Sauerstoff wurde nicht vorgenommen.

Analyse des Argons.

Die Analyse des Argons wurde während der dritten Operation ausgeführt. Nachdem das System (Fig. 4) vollkommen

1) A. Schleiermacher, Wied. Ann. **34**. p. 637. 1888.

2) A. Winkelmann, Wied. Ann. **54**. p. 177 u. 429. 1891.

3) E. Müller, Sitzungsber. d. physik.-med. Sozietät zu Erlangen Heft 33. p. 85. 1901.

4) H. Schultze, Inaug.-Dissert. Halle 1901.

5) W. Ramsay u. M. W. Travers, Zeitschr. f. physik. Chem. **28**. p. 241 ff. 1899.

evakuiert war und mit dem Durchdrücken des Gases begonnen werden konnte, wurde der Hahn *t* geschlossen und die Toepler-Hagensche Pumpe an *Q* angelegt, bis zum Hahn *q* evakuiert und dann die Pumpe abgesperrt. Vor dem Absperrungshahne war noch eine Geißleröhre eingeschaltet, die mit einem von 3 Akkumulatoren getriebenen kleinen Induktionsapparat in Verbindung stand.

Nach 14 maligem Durchdrücken zeigten sich im Spektrum 1. Argonlinien, 2. Quecksilberlinien, sonst nichts, nach Herabsetzung des Druckes auf 2,4 mm auch nur Argon. Im ganzen wurde das Gas 16 mal durchgedrückt und vollkommen gereinigt.

Zur Dichtebestimmung des Argons diente der in Fig. 5 angegebene Apparat. Die Glaskugel *a* von etwa 60 ccm Inhalt steht durch ein enges Glasrohr und den Hahn *t* mit dem 3 cm weiten, 18 cm hohen Zylinder *β* in Verbindung, der unten in einen kurzen, 1,2 cm weiten Ansatz endet.

Bei der Dichtebestimmung habe ich mich wörtlich an die Ausführungen des Hrn. H. Schultze¹⁾ gehalten.

Die Wägungen stimmten sehr gut überein. Die Abweichungen der an beiden Wagen bestimmten Massen des Argons vom Mittelwert betrug $\frac{1}{10}$ Proz. Als Dichte des Argons ergab sich

$$19,948$$

bezogen auf Sauerstoff gleich 16.

Nach Rayleigh²⁾ und Ramsay ist die Dichte des reinen, von Neon, Xenon, Krypton noch nicht befreiten Argons 19,94. Das vorliegende Argon ist also rein, abgesehen von den kleinen Mengen der genannten Gase.

IX. Versuche mit Argon.

Die Füllung der Apparate geschah in ähnlicher Weise wie bei den Versuchen mit Luft. Die Gaspipette, in der sich

1) H. Schultze, Inaug.-Dissert. Halle 1901.

2) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 59. 1896.

das Argon befand, wurde durch ein dickwandiges Gummischlauchstück an das Trockenrohr a' ¹⁾ angeschlossen; dann wurde die Füllkugel q gesenkt, sodaß das U-Rohr frei wurde, und die Hähne c und c' geöffnet. Hierauf wurde bis zum Hahn der Gaspipette scharf evakuiert, der Hahn c' geschlossen und der der Gaspipette geöffnet und dann wieder geschlossen. Wenn man nun den Hahn c' öffnete, trat das Argon in den Apparat ein und hatte den gewünschten Druck von ca. 100 mm Hg. Nachdem die Hähne c und c' wieder geschlossen und durch Heben der Füllkugel der Apparat abgesperrt war, konnte mit den Versuchen begonnen werden. Die Messungen wurden in derselben Weise durchgeführt wie bei Luft.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate angegeben.

Tabelle X.
Apparat I. Argon.

P. mm	Bad $u' = 0^\circ$				
	$u - u'$	$L + S$ in g.-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
95,4	10,16°	0,02252	0,00063	0,02190	0,002155
—	10,11	2221	62	2158	2185
—	6,55	1473	40	1432	2187
70,6	9,87	2209	61	2148	2177
48,2	9,87	2149	61	2088	2115
—	8,04	1744	50	1694	2107
40,2	9,89	2149	61	2088	2111
—	8,01	1735	49	1686	2104
30,2	9,85	2129	61	2068	2100
—	7,91	1717	49	1668	2108
22,2	9,89	2129	61	2068	2090
—	7,98	1717	49	1668	2091
14,8	10,31	2221	64	2158	2092
—	7,45	1602	46	1556	2088
11,2	10,28	2201	64	2138	2079
2,4	10,47	2142	65	2077	1985
—	7,62	1568	47	1521	1996

1) Fig. 3 der Dissertation.

Tabelle XI.

Apparat I. Argon.

p mm	Bad: siedendes Wasser.				
	$u - u'$	$L + S$ in g-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
48,2	8,97°	0,02515	0,00125	0,02390	0,002663
—	6,64	1839	94	1745	2629
40,2	8,96	2481	130	2352	2631
—	6,49	1810	97	1713	2639
—	8,94	2481	129	2352	2633
30,2	8,92	2481	126	2354	2638
22,2	8,84	2444	124	2321	2627
—	6,49	1799	91	1708	2632
14,8	8,81	2444	123	2321	2634
—	6,46	1799	110	1689	2615
11,2	9,14	2529	180	2398	2624
—	6,78	1871	99	1772	2618

Tabelle XII.

Apparat II. Argon.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$				
	$u - u'$	$L + S$ in g-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
72,2	9,38°	0,02249	0,00058	0,02191	0,002348
—	7,58	1827	47	1780	2348
62,6	9,34	2249	58	2191	2347
52,4	8,21	1969	51	1918	2337
—	7,50	1790	47	1744	2326
42,6	8,24	1969	51	1918	2329
30,2	8,16	1950	51	1899	2327
—	7,44	1772	46	1726	2319
21,6	8,17	1950	51	1899	2324
9,6	8,24	1950	51	1899	2304
—	7,47	1763	46	1717	2299
5,2	8,22	1922	51	1871	2277
2,2	7,99	1810	50	1761	2205

Tabelle XIII.
Apparat II. Argon.

p mm	Bad: siedendes Wasser.				
	$u - u'$	$L + S$ in g-Kal. pro Sek.	S	L	$L/u - u'$
72,2	9,36°	0,02913	0,00122	0,02791	0,002981
62,6	8,47	2587	105	2482	2931
52,4	8,45	2587	105	2482	2939
42,6	7,47	2283	91	2191	2935
30,2	7,45	2283	91	2192	2942
21,6	7,43	2240	96	2144	2884
9,6	7,45	2228	96	2133	2864
5,2	7,07	2088	98	1989	2815

In den folgenden Tabellen sind die Werte von $L/u - u'$ mit Hilfe des sich aus ihnen ergebenden Temperaturkoeffizienten auf 0° bez. 100° umgerechnet.

Tabelle XIV.
Apparat I. Argon.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$		Bad $u' = 100^\circ$	
	$u - u'$	$L_0/u - u'$	$u - u'$	$L_{100}/u - u'$
95,4	10,16°	0,002127	—	—
—	10,11	2108	—	—
—	6,55	2169	—	—
70,6	9,87	2150	—	—
48,2	9,87	2087	8,97°	0,002644
—	8,04	2085	6,64	2616
40,2	9,89	2085	8,96	2613
—	8,01	2085	6,49	2611
—	—	2082	8,94	2624
30,2	9,85	2073	8,92	2619
—	7,91	2087	—	—
22,2	9,89	2063	8,84	2608
—	7,98	2069	6,49	2620
14,8	10,31	2064	8,81	2616
—	7,45	2068	6,46	2603
11,2	10,28	2051	9,14	2603
—	—	2051	6,78	2598
2,4	10,47	1956	—	—
—	7,62	1976	—	—

Tabelle XV.

Apparat II. Argon.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$		Bad $u' = 100^\circ$	
	$u - u'$	$L_0/u - u'$	$u - u'$	$L_{100}/u - u'$
72,2	9,33°	0,002319	9,36°	0,002955
—	7,58	2324	—	—
62,6	9,34	2319	8,47	2911
52,4	8,21	2312	8,45	2919
—	7,50	2303	—	—
42,6	8,24	2304	7,47	2917
30,2	8,16	2302	7,45	2924
—	7,44	2296	—	—
21,6	8,17	2301	7,43	2865
9,6	8,24	2280	7,45	2846
—	7,47	2278	—	—
5,2	8,22	2255	7,07	2796
2,2	7,99	2183	—	—

Die Zahlenwerte stimmen befriedigend überein. Bei sehr niedrigen Drucken nimmt die Leitungsfähigkeit ebenso wie bei Luft merklich ab. Für die Berechnung wurde wieder das Intervall merklich gleicher Werte von $L_0/u - u'$ benutzt, also für Apparat I die Werte für die Drücke 48,2 mm — 11,2 mm, für Apparat II für die Drücke 72,2 mm — 5,2 mm. In beiden Fällen sind die Mittelwerte genommen.

Mittelwerte:

Apparat I

Apparat II

0,002073

0,002300

Aus diesen Zahlen ergeben sich die Wärmeleitfähigkeiten k_0 bei 0° .

Apparat I

Apparat II

0,00003949

0,00003883

Mittelwert aus beiden Apparaten für Argon $k_0 = 0,00003916$.

Die folgende Tabelle enthält die Berechnungen für die Temperaturkoeffizienten, die genau wieder so ermittelt wurden, wie die von Luft.

Tabelle XVI.

Temperaturkoeffizient für Argon.

Apparat I.

Apparat II.

Argon		Argon	
p	γ	p	γ
48,2	0,002668	72,2	0,002743
—	2546	62,6	2549
40,2	2534	52,4	2624
—	2525	42,6	2662
—	2602	30,2	2701
30,2	2633	21,6	2451
22,2	2641	9,6	2481
14,8	2660	5,2	2396
—	2675		
—	2590		
11,2	2691		
—	2667		
Mittel: 0,002619		Mittel: 0,002576	

Mittelwert aus beiden Apparaten: für Argon $\gamma = 0,00260$.

Der Temperaturkoeffizient von Argon unterscheidet sich demnach nicht wesentlich von dem für Luft.

X. Untersuchung der Fehlerquellen.

Die Dimensionen der Apparate sind so genau bestimmt wie nur möglich, sodaß nach dieser Richtung hin keine erhebliche Ungenauigkeit in die Berechnung der Versuche kommen kann.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, welchen Einfluß die Ableitung erstens durch die dünnen Elektroden, zweitens durch die Enden am Hauptdraht hat, ferner, welchen Einfluß der Temperatursprung im Gase an der Wand der Glasröhre, und welchen die Dicke des Glases selbst hat.

Für die niedrigsten und höchsten benutzten Temperaturen des Platindrahtes bei niedrigstem und höchstem Druck wurde der Wärmeverlust durch die dünnen Elektroden für Apparat I und II ausgerechnet und zwar für die Wärmeleitungsversuche und auch für die Strahlung.

Der Wärmeverlust wurde durch eine Annäherungsrechnung bestimmt. Die Elektroden wurden als Stäbe, die auf einer Seite auf konstanter Temperatur gehalten wurden, angenommen; die „äußere Wärmeleitfähigkeit“ h aus den Versuchen unter Zugrundelegung des Newton-Lambertschen Gesetzes herechnet als $h = \tau^2 w / 4,18 \cdot 2 \pi l n$. Nun wurde die Wärmemenge, die durch den ersten Querschnitt der Elektrode geht, also dem Hauptdraht pro Sekunde entzogen wurde, berechnet nach $f = \frac{1}{2} u \sqrt{p' h q' k}$; da zwei Elektroden vorhanden sind, hat man das Zweifache zu nehmen. p' = Umfang des ersten Querschnittes der Elektrode, q' = Querschnitt, k = Wärmeleitfähigkeit des Platins.

Man kennt die in der Sekunde im Hauptdraht entwickelte Wärmemenge w , kann also nun den Bruchteil der durch die Elektroden fortgeführten herechnen gleich $2f/w$. Diese Rechnung wurde für die Leitungs- und Strahlungsversuche ausgeführt. Die Differenz beider Rechnungen ergab, daß man k_0 für Luft um $1/200$ und k_0 für Argon um $1/180$ verkleinern muß.

In ähnlicher Weise wurde der Wärmeverlust des Hauptdrahtes nach den Enden zu herechnet.

Die Ableitung durch die Enden hatte keinen nennenswerten Einfluß.

Der Fehler, der durch den Temperatursprung im Gase ¹⁾ an der Glaswand entsteht, würde ca. $1/2000$ Vergrößerung der Leitfähigkeit ausmachen, ist also zu vernachlässigen.

Der Fehler, welcher durch das schlechte Leitvermögen des Glases entsteht, ist verschwindend klein.

Als Endresultat für die Wärmeleitfähigkeit von Luft und Argon erhält man demnach:

Luft:	Argon:
$k_0 = 0,000\ 056\ 90,$	$k_0 = 0,000\ 038\ 94.$

In letzter Zeit habe ich auch von Helium den Wärmeleitungskoeffizienten bestimmt.

Versuchsanordnung.

An der Versuchsanordnung habe ich einiges geändert. Es waren diesmal heide Apparate zugleich an die Röhre p

1) E. Gebrcke, Ann. d. Phys. 2. p. 102. 1900.

angeschmolzen, sodaß die Versuche nebeneinander gemacht werden konnten, und zwar mit derselben Füllung, mit demselben Drucke und auch bei derselben Temperatur.

Infolge der Einführung einer Oberleitung für die elektrische Straßenbahn, die in der Nähe des Institutes vorbeiführt, war mein früher benutztes Differentialgalvanometer unbrauchbar geworden. Ich habe jetzt ein Panzerdifferentialgalvanometer ¹⁾ nach DuBois-Rubens, das nach Angaben des Hrn. Prof. Dr. Dorn von Siemens & Halske hergestellt war, benutzt; ebenso habe ich zur Bestimmung des Widerstandes der Galvanometerrollen ein Panzergalvanometer verwandt.

Der starke Hauptstrom, der den Platindraht auf die gewünschte Temperatur bringen soll, wurde bei diesen Versuchen bis zu 1,128 Amp. gesteigert.

Darstellung des Heliums.

Das von mir benutzte Helium war von Hrn. Dr. H. Schultze ²⁾ zu seinen Reibungsversuchen hergestellt worden. Es wurde von mir noch einmal gereinigt und die Dichte neu bestimmt. Die spektroskopische Analyse ergab dasselbe Resultat wie früher. ³⁾ Das Helium war frei von H, O, N, C und besaß nur eine geringe Beimengung, wahrscheinlich von Neon. Seine Dichte war 2,083 bezogen auf O = 10. (Nach Dr. Schultze gleich 2,084). Reines Helium hat die Dichte 1,98 und reines Neon 9,97, sodaß das Gas etwa 1,25 Volumenprocente Neon enthalten hat.

Die Füllung der Apparate geschah in derselben Weise wie bei Argon.

Versuche mit Helium.

Die Messungen wurden genau so durchgeführt wie bei Luft und Argon.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate angegeben. Die Werte für $L/u - u'$ sind mit Hilfe der sich aus ihnen ergebenden Temperaturkoeffizienten ⁴⁾ auf $L_0/u - u'$ bez. $L_{100}/u - u'$ umgerechnet.

1) Empfindlichkeit bei 2 m Skalenabstand: 1 mm Skt. gleich $7 \cdot 10^{-10}$ A.

2) H. Schultze, Ann. d. Phys. 6. p. 303. 1901.

3) H. Schultze, l. c. p. 307.

4) Vgl. Tab. XIX.

Tabelle XVII.
Apparat I. Helium.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$		Bad $u' = 100^\circ$	
	$u - u'$	$L_0 / u - u'$	$u - u'$	$L_{100} / u - u'$
70,9	7,41°	0,01801	—	—
56,0	7,63	1792	7,88°	0,02351
—	7,62	1814	—	—
47,8	7,64	1806	7,28	2380
—	7,63	1828	—	—
42,1	7,66	1802	7,20	2326
—	7,66	1800	—	—
34,7	7,77	1775	7,21	2322
27,9	8,02	1712	—	—
20,6	8,05	1704	6,95	2402
—	7,94	1721	7,14	2340
—	7,93	1720	7,30	2290
—	7,98	1719	—	—
15,8	8,16	1676	8,10	2043

Tabelle XVIII.
Apparat II. Helium.

p mm	Bad $u' = 0^\circ$		Bad $u' = 100^\circ$	
	$u - u'$	$L_0 / u - u'$	$u - u'$	$L_{100} / u - u_0$
70,9	9,25°	0,01973	—	—
56,0	7,20	1965	6,08°	0,02564
—	7,19	1964	—	—
47,8	7,09	1956	6,83	2488
—	7,09	1953	—	—
42,1	7,06	1958	6,29	2680
—	7,06	1961	—	—
20,6	7,42	1854	6,90	2460
—	7,54	1831	6,99	2426
15,8	7,69	1791	—	—

Die Übereinstimmung der Zahlenwerte halte ich für befriedigend. Bei niedrigen Drucken nimmt die Leitungsfähig-

keit ebenso wie bei Luft und Argon ab. Für die Berechnung wurde wieder das Intervall merklich gleicher Werte von $L_0/u-u'$ benutzt. Es sind dies bei Apparat I und II die Werte für die Drucke 70,9 mm — 42,1 mm. In beiden Fällen sind die Mittelwerte genommen.

Mittelwerte:

Apparat I	Apparat II
0,01806	0,01961

Aus diesen Zahlen ergeben sich die Wärmeleitfähigkeiten k_0 bei 0°.

Apparat I	Apparat II
0,0003441	0,0003312

Mittelwert aus beiden Apparaten für Helium $k_0 = 0,0003376$.

Die folgende Tabelle enthält die Berechnungen für die Temperaturkoeffizienten, die genau wie früher ermittelt wurden.

Tabelle XIX.

Temperaturkoeffizient für Helium.

p mm	Apparat I	Apparat II
	Helium	Helium
	γ	γ
56,0	0,00312	0,00305
47,8	318	272
42,1	291	369
34,7	308	—
20,6	371	327
—	357	325
—	332	
—	382	
15,8	219	

Mittel: 0,003155 Mittel: 0,003196

Mittelwert aus beiden Apparaten für Helium $\gamma = 0,00318$.

Der Temperaturkoeffizient ist etwas größer als bei Luft und Argon.

Auch bei Helium habe ich die Fehlerquellen in der früher angeführten Weise untersucht. Die Ableitung durch die dünnen

Elektroden hat eine Verkleinerung für k_0 um $1/468$ zur Folge, die Ableitung nach den Enden eine Vergrößerung von $1/700$ und die schlechte Leitung des Glases eine Vergrößerung von $1/281$.

Als Endresultat für die Wärmeleitfähigkeit von Helium erhalte ich demnach:

$$\text{Helium: } k_0 = 0,0003386.$$

Zum Schluß stelle ich die erhaltenen Resultate noch einmal zusammen.

Luft:	Argon:	Helium:
$k_0 = 0,00005690$	$k_0 = 0,00003894$	$k_0 = 0,0003386$

Der Wert von Luft ist in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Winkelmann¹⁾ und E. Müller²⁾ 0,0000568 bez. 0,000056).

Die Werte für Argon und Helium sind größer, als sie nach der kinetischen Gastheorie erwartet werden konnten. Diese verlangt zwischen dem Koeffizienten der Wärmeleitung k , dem der Reibung η und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen c_v eine Beziehung³⁾, die ausgedrückt ist durch die Formel:

$$k = f \cdot \eta \cdot c_v.$$

Conran und Neugebauer⁴⁾ fanden theoretisch $f = 1,6027$.

Benutzt man für k_0 bei Argon den oben angeführten Wert, außerdem nach H. Schultze⁵⁾ für $\eta_0 = 0,0002104$ und ferner für c_v nach Dittenberger⁶⁾ $0,1233/1,667 = 0,0740$ (was sicher nahe zutrifft), so erhält man für f den Wert:

$$f = 2,501.$$

Für Helium ist der Reibungskoeffizient an demselben Material von H. Schultze⁷⁾ für 0° gefunden $\eta = 0,0001891$.

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. 48. p. 180. 1893.

2) E. Müller, Wied. Ann. 60. p. 82. 1897.

3) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl., math. Zusätze p. 128. 1899.

4) O. E. Meyer, l. c.

5) H. Schultze, Diss. Halle 1901 und Ann. d. Phys. 5. p. 140. 1901.

6) W. Dittenberger, Diss. Halle 1897.

7) H. Schultze, Ann. d. Physik 6. p. 302. 1901.

Die spezifische Wärme bei konstantem Volumen gleich 0,7142 ermittle ich aus den Beziehungen:

$$\frac{c_p}{c_v} = f \quad \text{und} \quad c_p = \frac{t}{t-1} \cdot \frac{R}{E}.$$

Für einatomige Gase ist $f = 1,667$ und R ist gleich 29,27/0,1439, da die Dichte des benutzten Heliums bezogen auf Luft gleich 0,1439 ist. E ist das mechanische Wärmeäquivalent gleich 427.

Setzt man die Werte für k_0 , η_0 und c_v in die oben genannte Formel ein, so erhält man für den Faktor f den Wert:

$$f = 2,507.$$

Demnach ist der Faktor f für einatomige Gase nahe 2,50.¹⁾ Dieses Ergebnis steht in nahem Einklang mit den Rechnungen von Wüllner²⁾ über den — ebenso wie Argon und Helium — *einatomigen* Quecksilberdampf, für welchen der Faktor 3,15 sein müßte.

Daß die Versuche durch Konvektionsleitung merklich falsch wären, ist nicht anzunehmen:

Erstens stimmen die Versuche für Luft mit den besten von Winkelmann und E. Müller ermittelten sehr gut überein.

Zweitens hat O. Mehliss³⁾ nach der Stefan-Winkelmannschen Methode, die doch von der Schleiermacherschen so grundverschieden ist, bei Argon für k_0 den Wert 0,000038 gefunden.

Drittens wäre eine derartige Übereinstimmung des Faktors f bei Argon und Helium sehr merkwürdig, da beide Gase bei einem annähernd gleichen Reibungskoeffizienten einen so sehr verschiedenen Wärmeleitungskoeffizienten haben.

Der von mir gefundene Faktor f , der durchaus nicht erwartet wurde, stimmt mit der von Boltzmann⁴⁾ verbesserten Theorie von Maxwell⁵⁾ überein; nach dieser müßte der Faktor $f = \frac{5}{2}$ sein.

1) W. Schwarze, *Physik. Zeitschr.* 3. p. 264. 1902; 4. p. 229. 1903.

2) A. Wüllner, Zitiert nach O. E. Meyer, *l. c.* p. 295.

3) O. Mehliss, *Diss.* Halle 1902.

4) L. Boltzmann, *Pogg. Ann.* 157. p. 459. 1876.

5) J. C. Maxwell, *Phil. Mag.* (4) 35. p. 216.

Inwiefern die Rechnungen von Conran und Neugebauer, die auf Grund der kinetischen Gastheorie nach O. E. Meyer geführt wurden, einer Ergänzung fähig sind, mag einstweilen dahingestellt bleiben.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Dorn, für die freundliche Anregung und stete Unterstützung bei diesen beiden Arbeiten auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Halle a/S., Physik. Inst., 14. Februar 1903.

(Eingegangen 16. Februar 1903.)

6. Über Schallgeschwindigkeit in Röhren; von J. Müller.

(Auszug aus der Bonner Inaugural-Dissertation des Verfassers.)

I. Die Kirchhoffsche Formel.

Nach Helmholtz¹⁾ und Kirchhoff²⁾ wird die Schallgeschwindigkeit in einer Röhre durch die Formel

$$v = a \left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{n\pi}} \right)$$

ausgedrückt, wenn a die Schallgeschwindigkeit im freien Raum, r den Radius der Röhre, n die Schwingungszahl des benutzten Tones und γ eine Konstante bedeutet. Diese Konstante wird nach Kirchhoff durch die Reibung und Wärmeleitung des die Röhre füllenden Gases bestimmt.

Die Formel ist von Seebeck³⁾, Kayser⁴⁾, Webster Low⁵⁾ und Stevens⁶⁾ geprüft und mehr oder weniger als richtig befunden worden. Wenn sie richtig ist, muß man aus je zwei Bestimmungen von v die Schallgeschwindigkeit a in freier Luft berechnen können; denn man hat für konstantes n und variables r

$$(1) \quad a = \frac{v_1 r_1 - v_2 r_2}{r_1 - r_2},$$

und für konstantes r und variables n

$$(2) \quad a = \frac{r_1 \sqrt{n_1} - r_2 \sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2}}.$$

Ferner läßt sich γ in ähnlicher Weise finden:

$$(3) \quad \gamma = r_1 r_2 \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 r_1 - v_2 r_2} \cdot 2 \sqrt{n\pi},$$

und

$$(4) \quad \gamma = \sqrt{n_1 n_2} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 \sqrt{n_1} - v_2 \sqrt{n_2}} \cdot 2 r \sqrt{\pi}.$$

1) H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, 2. p. 383.

2) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134. p. 77. 1868.

3) A. Seebeck, Pogg. Ann. 139. p. 104. 1870.

4) H. Kayser, Wied. Ann. 2. p. 218. 1877.

5) J. W. Low, Wied. Ann. 52. p. 641. 1894.

6) H. Stevens, Ann. d. Phys. 7. p. 235. 1902.

Natürlich kann man γ auch einfach so erhalten, daß man für v den gefundenen und für a den aus (1) oder (2) berechneten Wert einsetzt in die Gleichung

$$(5) \quad \gamma = (a - v) r \frac{2 \sqrt{n \pi}}{a},$$

die nichts anderes ist als die Kirchhoffsche Formel selbst.

Merkwürdigerweise haben die genannten vier Physiker sämtlich verschiedene Werte für a gefunden: Seebeck 332,77 m, Kayser 332,5 m, Low 330,8 m, Stevens 331,2 m. Natürlich schwanken auch die Werte für γ , nur haben sie das gemeinsam, daß sie alle größer sind als der sich aus anderweitigen Bestimmungen von Reibung und Wärmeleitung ergebende Wert. Außer diesen Umständen ließ noch ein weiterer eine erneute Prüfung der Kirchhoffschen Formel wünschenswert erscheinen. In den genannten Arbeiten war nämlich entweder nur mit tiefen Tönen oder nur mit weiten Röhren untersucht worden; wenn sich also hier auch die Richtigkeit der Formel mit voller Sicherheit herausgestellt hätte, so wäre die Frage immer noch unentschieden geblieben: Wie verhält es sich bei engen Röhren und bei hohen Tönen? Die Beantwortung dieser Frage ist insofern von besonderer Wichtigkeit, als man mit engen Röhren und hohen Tönen Untersuchungen angestellt hat, welche die Richtigkeit der Kirchhoffschen Formel unter allen Umständen voraussetzen, so z. B. eine Arbeit von Rudolf Koenig in Paris über die Bestimmung von Schwingungszahlen sehr hoher Töne¹⁾; diese Arbeit ist die eigentliche Veranlassung zu der vorliegenden geworden, die zunächst in einer Prüfung der Kirchhoffschen Formel bestand.

II. Apparat und Versuchsanordnung. Die Kundtschen Staubfiguren.

Im wesentlichen hatte mein Apparat dieselbe Einrichtung wie der, den Kayser für seine Untersuchungen benutzt hat; ich verweise also auf seine ausführliche Beschreibung. Eine kleine Abweichung lag darin, daß ich die trockene Luft nicht wie Kayser in die Versuchsröhre hineinpreßte, sondern von

1) R. Koenig, Wied. Ann. 69. p. 626 u. p. 721. 1899.

einer Wasserstrahlpumpe durchsaugen ließ. Ferner schrieb der Stahlstab, dessen Töne die Kundtschen Figuren erzeugte, und neben ihm eine elektromagnetisch getriebene Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl die Schwingungen nicht auf einer rotierenden Trommel, sondern auf einem vorbeigezogenen Glasstreifen auf, der mit einer feinen Rußschicht überzogen war. Bei den tieferen Tönen schwang ein an dem Stahlstab befestigter Kork gegen eine Kautschukmembran, welche die Kundtsche Röhre verschloß; bei den höheren Tönen entstanden die Figuren aber nur dann gut, wenn der Kork direkt in die offene Röhre hineinschwang.

Auch die Versuchsanordnung wich kaum von der Kayser'schen ab. Nur muß ich bemerken, daß ich gewöhnlich mit einer Röhre sechs Versuche hindereinander anstellte, ohne den Staub in der Röhre zu erneuern. Während ferner Kayser die Schwingungszahl des betreffenden Tones des Stahlstabes bei jedem Versuch neu bestimmte, habe ich sie als wesentlich konstant angenommen. Ich erhielt zwar auch bei verschiedenen Bestimmungen, die sich auf die ganze Versuchszeit verteilen, verschiedene Werte; aber die Abweichungen sind doch nicht so groß, als daß man sie nicht aus den unvermeidlichen Fehlerquellen erklären könnte — man vergleiche dazu die Arbeit von Melde „Über einige Methoden der Bestimmung von Schwingungszahlen hoher Töne“. ¹⁾

Wie ich erwähnte, habe ich zur Bestimmung der Wellenlänge die Kundtschen Staubfiguren benutzt. Über die Art ihrer Entstehung ist man bis heute noch nicht völlig im klaren; es hat zwar an Erklärungsversuchen nicht gefehlt, aber bis jetzt hat noch keine Theorie ihre volle Bestätigung durch das Experiment gefunden. Ich erwähne als bedeutendste Arbeiten über diesen Gegenstand die von Walter König ²⁾ und von Cook. ³⁾ Jedenfalls sind noch weitere Untersuchungen nötig, ehe diese Frage endgültig entschieden werden kann, und da man bei den Staubfiguren mancherlei sonderbare Erscheinungen beobachtet, glaube ich, meine Wahrnehmungen mitteilen zu

1) F. Melde, Wied. Ann. 51. p. 661. 1894.

2) W. König, Wied. Ann. 42. p. 353 u. p. 513. 1891.

3) S. R. Cook, Phil. Mag. [6] 3. p. 471. 1902. *

sollen; vielleicht liefern sie einen Beitrag zu dem Material, mit dessen Hilfe sich später einmal sämtliche Erscheinungen erklären lassen.

Als Staub benutzte ich Samen *Lycopodii*. Die Versuche wurden in der bekannten Weise angestellt: eine kleine Menge Staub — nur so viel, daß die Figuren gut ausfielen — wurde in die Röhre gebracht und möglichst gleichmäßig darin verteilt. Beim Klopfen gegen die Röhrenwand sammelte sich der Staub in einem schmalen Streifen auf dem Boden der Röhre an; die Röhre wurde dann etwas gedreht, sodaß der Staub bei einer leisen Erschütterung herunterfallen mußte.

Nun kann man zwei Arten von Figuren unterscheiden. Bei der ersten Art, die gewöhnlich beobachtet wird, fällt der Staub in den Schwingungsbäuchen herab, während er in den Knoten liegen bleibt. Beim Fallen ordnen sich die Staubteilchen in Rippen, die senkrecht zur Röhrenachse stehen; sie sind am längsten in der Mitte der Bäuche und werden gegen die Knoten hin kürzer. Gerade das Entstehen der Rippen zu erklären, hat große Schwierigkeiten gemacht; man vergleiche dazu die beiden genannten Arbeiten.

Bei der zweiten Art von Staubfiguren fehlen diese Rippen ganz; der Staub ist aus den Schwingungsbäuchen ganz verschwunden und hat sich in den Knotenstellen angesammelt. Diese Art ist schon einfacher zu erklären: Der Staub wird aus den Punkten größter Bewegung zu den Punkten hingeweht, wo keine Bewegung stattfindet.

Es fragt sich jetzt, wann die eine und wann die andere Art entsteht; zur Beantwortung führe ich meine Beobachtungen an. Bei Ton I bis IV entsteht die erste Art, und zwar in allen von mir benutzten Röhren, bei engen aber nur dann, wenn ich den Stab ganz schwach anstreiche; bei stärkerem Streichen werden die Rippen zuerst unscharf, dann fängt der Staub an, zu den Knotenpunkten hinzuwandern, wobei er sich in der Regel von der Schallquelle entfernt. Es entsteht aber nicht die zweite Art von Figuren, offenbar, weil die Intensität der Schallbewegung nicht stark genug ist, um die ganze Menge des Staubes bis zu den Knoten zu treiben; die Figuren erscheinen verzerrt. Rudolf Koenig, der die gleiche Beobachtung machte, schob die Schuld darauf, daß die Röhre für die be-

treffende Tonhöhe entweder zu eng oder zu weit sei.¹⁾ Aber nicht die Röhrenweite spielt hier die Hauptrolle, sondern die Intensität der Schallquelle, daher die Verzerrung der Staubfiguren, wenn die Intensität zu groß ist; für enge Röhren muß diese natürlich kleiner sein als für weite, um die gleiche Wirkung hervorzurufen. Wenn die Röhre zu weit ist, so ist möglicherweise die Intensität zu schwach, um selbst die erste Art der Figuren gut zu erzeugen, aber von einer Verzerrung kann dann nicht die Rede sein.

Bei Ton V, für den die Schwingungszahl 11—12000 war, entstand in einer weiten Röhre (15,5 mm Durchmesser) die erste Art nach einfachem Anstreichen des Stabes, die zweite Art nach mehrmaligem starken Anstreichen in einer engen Röhre (8,0 mm Durchmesser). In der engen Röhre erhält man bei schwachem Tönen auch die gerippten Figuren, bei stärkerem Tönen gehen sie immer mehr in die zweite Art über, zuerst am Anfang, dann in der ganzen Länge der Röhre; der Staub rückt in den Knoten immer mehr zusammen. Man sieht hieraus, daß sich eine scharfe Grenze zwischen den beiden Arten von Staubfiguren nicht ziehen läßt.

Wesentlich für das Ausfallen der Figuren ist also die Intensität der Schallbewegung in der Röhre; diese ist abhängig von der Intensität der Schallquelle und von der Weite der Röhre.

Mitunter beobachtet man folgendes. Die Rippen der Staubfiguren stehen nicht immer senkrecht zur Röhrenachse, und zwar wechselt die Stellung derselben in den aufeinanderfolgenden Figuren ganz regelmäßig ab. So sind z. B. die Rippen der einen Figur nach rechts geneigt, die der folgenden nach links, dann kommt eine Figur mit senkrechten Rippen, bei der folgenden neigen sie sich wieder nach rechts, dann nach links etc.; man kann dies Verhalten schematisch so darstellen

Hier entspricht jeder einzelne Strich einer Figur.

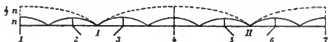
R. Koenig, der diese Erscheinung auch beobachtet hat, sagt darüber: „Diese Art der Staubfiguren zeigt immer eine zu große Weite der Röhre an.“ Ich habe diese Figuren aber

1) R. Koenig, Wied. Ann. **69**, p. 652, 1899.

nicht nur in einer verhältnismäßig weiten Röhre bekommen, sondern auch dann einigemal, wenn ich in eine weite Röhre eine andere hineinsteckte und nun in dem sehr engen Zwischenraum die Staubfiguren entstehen ließ. Die Ansicht Koenigs ist also nicht richtig. Man könnte sich diese Figuren durch die Annahme erklären, daß außer der von dem schwingenden Stab in der Röhre erzeugten Bewegung, die dem Ton des Stabes entspricht, noch eine andere entsteht, die sich über die erste lagert. Diese neue Bewegung gehört nicht einem höheren Ton an; denn ein solcher kann nicht in Betracht kommen. Es kann auch nur ein Ton sein, der mit dem anderen harmonisch ist, wegen der Regelmäßigkeit der Figuren. Wenn man von harmonischen „Untertönen“ sprechen will, so fragt es sich, welcher von diesen die Änderung in den Staubfiguren hervorrufen könnte. Der erste, dessen Schwingungszahl $\frac{1}{3} n$ betragen würde, kann eine Neigung der Rippen nicht veranlassen, wie man aus dem Schema ersieht:



Die ausgezogenen Linien sollen die Figuren des Tones n , die punktierten die des Tones $\frac{1}{3} n$ andenten. Anders ist es, wenn man Ton n mit seinem zweiten harmonischen Unterton $\frac{2}{3} n$ kombiniert:



Hier sieht man ganz gut ein, warum sich die Fig. 2 und 3, sowie 5 und 6 nach den Knoten I und II hinneigen infolge der von Ton $\frac{1}{3} n$ nach diesen Knoten hin erzeugten Bewegung.

Die Töne eines transversal schwingenden Stabes sind unharmonisch, also kann der Ton $\frac{1}{3} n$ nicht von dem Stab ausgehen, sondern entsteht erst in der Röhre. Man würde sich sein Entstehen daraus zu erklären haben, daß der zweite harmonische Unterton von Ton n identisch ist mit dem Grundton der Röhre oder mit einem von dessen Obertönen. Ob sich

die Sache wirklich so verhält, wie ich sie zu erklären versucht habe, muß einstweilen dahingestellt bleiben.

III. Versuche mit gewöhnlichen Glasröhren.

Es wurden sechs Röhren benutzt, die folgende Durchmesser hatten:

Röhre	I	II	III	IV	V	VI
Durchmesser	15,516	13,400	10,916	6,780	5,600	3,720 mm

Die Durchmesser sind aus dem Volumen bestimmt worden.

Bei Ton I und II konnten alle sechs Röhren angewandt werden, bei Ton III und IV entstanden die Staubfiguren in der engsten Röhre so schlecht, daß sie zur Messung nicht geeignet waren.

In den folgenden Tabellen ist angegeben die Temperatur t , bei der beobachtet wurde, die sich aus der Messung der Staubfiguren ergebende Wellenlänge λ_t (cm), ferner die auf 0° reduzierte Wellenlänge λ_0 , die dieser entsprechende Schallgeschwindigkeit v_0 (m) und endlich die Abweichung des einzelnen Wertes v_0 vom Mittelwert (unter Δ).

Tabelle I.

Ton I. $n = 903$.

Röhre I.

t	λ_t	λ_0	v_0	Δ
19,5	37,52	36,247	327,0	- 0,3
20,1	37,38	36,075	325,8	- 1,5
20,7	37,62	36,270	327,5	+ 0,3
17,4	37,33	36,194	326,8	- 0,5
18,0	37,40	36,224	327,1	- 0,2
18,1	37,48	36,296	327,8	+ 0,4
17,5	37,40	36,255	327,4	+ 0,1
17,6	37,46	36,303	327,9	- 0,6
17,9	37,39	36,222	327,1	- 0,2
18,5	37,53	36,319	328,0	+ 0,7
20,1	37,60	36,288	327,7	+ 0,4
20,4	37,60	36,269	327,5	+ 0,2

Mittelwert: $v = 327,3$ m. Mittlerer Fehler: 0,44 m.

Röhre II.

t	λ_t	λ_0	r_0	Δ
21,3	37,42	36,009	325,2	- 1,0
21,4	37,50	36,111	326,1	- 0,1
19,4	37,28	36,023	325,3	- 0,9
19,6	37,33	36,106	326,0	- 0,2
19,7	37,58	36,293	327,7	+ 1,5
18,0	37,30	36,123	326,2	—
18,3	37,40	36,206	326,9	+ 0,7
18,3	37,30	36,109	326,1	- 0,1
18,5	37,32	36,116	326,1	- 0,1
18,6	37,45	36,235	327,2	+ 1,0
20,6	37,40	36,063	325,7	- 0,5
20,6	37,40	36,063	325,7	- 0,5

Mittelwert: $r = 326,2$ m. Mittlerer Fehler: 0,55 m.

Röhre III.

20,4	37,33	36,009	325,2	+ 0,3
20,9	37,28	35,930	324,4	- 0,5
21,0	37,40	36,039	325,4	+ 0,5
18,7	37,10	35,891	324,1	- 0,8
18,5	37,17	35,971	324,8	- 0,3
18,1	37,07	35,918	324,3	- 0,6
18,3	37,18	35,993	325,0	+ 0,1
18,4	37,23	36,035	325,4	+ 0,5
19,1	37,25	36,012	325,2	+ 0,3
19,5	37,27	36,033	325,4	+ 0,5
19,5	37,20	35,933	324,5	- 0,4
19,4	37,30	36,042	325,5	+ 0,4

Mittelwert: $r = 324,9$ m. Mittlerer Fehler: 0,45 m.

Röhre IV.

21,4	37,20	35,82	323,5	+ 0,6
21,6	37,22	35,83	323,5	+ 0,6
18,7	37,03	35,82	323,5	+ 0,6
17,6	36,83	35,70	322,2	- 0,7
17,8	36,74	35,60	321,4	- 1,5
18,4	36,84	35,66	322,0	- 0,9
19,4	36,80	35,56	321,1	- 1,3
19,6	37,00	35,74	322,7	- 0,2
19,6	37,10	35,74	323,6	+ 0,7
19,6	37,20	35,93	324,5	+ 1,6
19,5	37,00	35,74	322,8	- 0,1
19,5	37,10	35,84	323,6	+ 0,7

Mittelwert: $r = 322,9$ m. Mittlerer Fehler: 0,83 m.

Röhre V.

t	λ_t	λ_0	v_0	d
18,3	36,64	35,47	320,3	- 1,0
18,2	36,61	35,45	320,1	- 1,2
18,3	36,68	35,51	320,7	- 0,6
18,3	36,74	35,57	321,2	- 0,1
18,4	36,70	35,52	320,8	- 0,5
19,0	36,88	35,66	322,0	+ 0,7
19,0	36,70	35,49	320,4	- 0,9
19,0	36,67	35,46	320,2	- 1,1
18,5	36,90	35,71	322,5	+ 1,2
19,1	36,50	35,58	322,3	+ 1,0
19,2	36,90	35,67	322,1	+ 0,8
19,3	37,00	35,76	322,9	+ 1,6

Mittelwert: $v = 321$ m. Mittlerer Fehler: 0,89 m.

Röhre VI.

19,7	36,44	35,19	317,8	+ 0,6
19,4	36,42	35,19	317,8	+ 0,6
18,8	36,40	35,24	318,2	+ 1,0
18,4	36,20	35,04	316,4	- 0,8
18,5	36,22	35,05	316,5	- 0,7
18,5	36,10	34,94	315,5	- 1,7
18,9	36,20	35,01	316,1	- 1,1
18,9	36,10	34,91	315,3	- 1,9
19,1	36,40	35,19	317,8	+ 0,6
19,3	36,50	35,27	318,5	+ 1,3
19,3	36,50	35,27	318,5	+ 1,3
19,3	36,40	35,18	317,7	+ 0,5

Mittelwert: $v = 317,2$ m. Mittlerer Fehler: 1,01 m.

Bei diesem Ton weichen die einzelnen Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit stark vom Mittelwert ab, besonders bei den Röhren IV, V und VI; es liegt daran, daß so große Wellenlängen, wie sie diesem Ton zukommen, mit Hilfe der Staubfiguren nur sehr schlecht gemessen werden können, um so schlechter, je enger die Röhre ist. Die Formel von Kirchhoff kann natürlich mit diesem Ton nicht geprüft werden. Ich habe trotzdem a , die Schallgeschwindigkeit in freier Luft, durch Kombination von je zwei Werten v , die für verschiedene Röhren gefunden worden sind, berechnet und gefunden:

aus I und II	334,3 m	aus II und III	331,9 m
" I " III	338,0	" II " IV	329,6
" I " IV	330,7	" II " V	329,7
" I " V	330,7	" II " VI	329,6
" I " VI	330,5	" III " IV	328,2
aus III und V	328,7 m		
" III " VI	328,9		
" IV " V	330,0		
" IV " VI	329,8		
" V " VI	329,4		

Der Mittelwert würde 330,4 m sein, aber man wird nicht daran denken, diesen Wert als wahre Schallgeschwindigkeit zu betrachten.

Ein Blick auf die 15 Zahlen zeigt, daß man ziemlich regelmäßig immer kleinere Werte für α erhält, je größer die Differenz der Röhrendurchmesser wird. Das ist kein Zufall, sondern ich beobachtete diese Erscheinung auch bei den besten Bestimmungen. Wenn die Formel richtig ist, darf diese Abnahme natürlich nicht stattfinden, und der Umstand, daß sogar bei den ziemlich fehlerhaften Bestimmungen mit dem Ton I diese fast regelmäßige Abnahme wahrzunehmen ist, spricht allerdings sehr für die Ungültigkeit der Kirchhoffschen Formel.

Ich verzichte darauf, γ mit Hülfe dieses Tones zu berechnen, da man doch keine übereinstimmenden Werte erwarten darf, und gehe über zu den Versuchen mit dem zweiten Ton.

Tabelle II.
Ton II. $n = 2482$.
Röhre I.

t	λ_t	λ_0	r_0	Δ
15,2	13,70	13,33	330,9	+0,7
14,0	13,64	13,30	330,2	—
14,0	13,65	13,31	330,4	+0,2
14,7	13,64	13,29	329,8	-0,4
20,4	13,77	13,28	329,7	-0,5
20,5	13,80	13,32	330,3	+0,1
20,6	13,79	13,30	330,0	-0,2
19,3	13,77	13,31	330,3	+0,1
19,5	13,78	13,31	330,3	+0,1
19,6	13,77	13,30	330,1	-0,1

Mittelwert: $r = 330,2$ m. Mittlerer Fehler: 0,25 m.

Röhre II.

t	λ_t	λ_0	v_0	Δ
15,6	13,67	13,30	330,0	+0,3
14,0	13,59	13,25	329,0	-0,7
14,5	13,64	13,29	329,9	+0,2
14,3	13,63	13,29	329,8	+0,1
20,5	13,79	13,30	330,2	+0,5
20,7	13,78	13,28	329,6	-0,1
20,0	13,72	13,24	328,7	-1,0
20,2	13,81	13,33	330,7	+1,0
20,1	13,77	13,30	329,8	+0,1
20,2	13,73	13,25	328,8	-0,9

Mittelwert: $v = 329,7$ m. Mittlerer Fehler: 0,49 m.

Röhre III.

18,6	13,66	13,21	328,2	-0,5
17,0	13,62	13,21	328,2	-0,5
13,8	13,56	13,23	328,4	-0,3
15,2	13,60	13,23	328,4	-0,3
16,0	13,65	13,27	329,4	+0,7
15,4	13,64	13,27	329,3	+0,6
19,6	13,73	13,26	329,2	+0,5
19,6	13,72	13,25	328,9	+0,2
20,3	13,72	13,24	328,6	-0,1
19,9	13,72	13,24	328,7	—

Mittelwert: $v = 328,7$ m. Mittlerer Fehler: 0,37 m.

Röhre IV.

16,5	13,52	13,13	325,9	-0,5
16,4	13,50	13,11	325,4	-1,0
15,7	13,49	13,12	325,4	-1,0
19,8	13,63	13,16	326,6	+0,2
20,0	13,67	13,20	327,5	+1,1
20,2	13,68	13,20	327,6	+1,2
20,8	13,63	13,14	326,1	-0,3
20,6	13,65	13,16	326,7	+0,3
20,7	13,63	13,14	326,2	-0,2

Mittelwert: $v = 325,4$ m. Mittlerer Fehler: 0,53 m.

Röhre V.

t	λ_t	λ_0	v_0	Δ
17,1	13,52	13,12	325,5	-0,4
16,8	13,52	13,12	325,7	-0,2
15,6	13,52	13,15	326,4	+0,5
14,2	13,45	13,11	325,5	-0,4
19,4	13,60	13,14	326,2	+0,3
19,5	13,60	13,14	326,1	+0,2
19,6	13,60	13,14	326,0	+0,1
20,4	13,60	13,12	325,6	-0,4
20,5	13,62	13,14	326,0	+0,1
20,6	13,62	13,13	326,0	+0,1

Mittelwert: $v = 325,9$ m. Mittlerer Fehler: 0,25 m.

Röhre VI.

14,7	13,413	13,066	324,3	+1,3
14,7	13,406	13,059	324,1	+1,1
15,4	13,397	13,034	323,5	+0,5
16,3	13,421	13,037	323,6	+0,6
21,1	13,513	13,024	323,3	+0,3
20,1	13,423	12,954	321,5	-1,5
20,3	13,436	12,962	321,7	-1,3
21,0	13,436	12,995	322,5	-0,5
21,0	13,497	13,006	322,3	-0,2

Mittelwert: $v = 323,0$ m. Mittlerer Fehler: 0,31 m.

Hier ist die Übereinstimmung der verschiedenen für dieselbe Röhre gemachten Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit wesentlich besser als beim ersten Ton; nur bei den engen Röhren werden die Werte wieder etwas unsicherer. Für die Schallgeschwindigkeit in freier Luft ergeben sich durch die bekannten Kombinationen folgende Werte:

aus I und II 333,4 m	aus II und III 334,1 m
" I " III 333,3	" II " IV 333,1
" I " IV 333,2	" II " V 332,4
" I " V 332,6	" II " VI 332,3
" I " VI 332,5	" III " IV 332,5
aus III und V 331,7 m	
" III " VI 331,6	
" IV " V 328,3	
" IV " VI 330,4	
" V " VI 331,5	

Der Mittelwert beträgt 332,3 m und kommt dem von Kayser für die Schallgeschwindigkeit gefundenen Wert 332,5 m sehr nahe. Man bemerkt hier wieder die fast regelmäßige Abnahme der Zahlen mit wachsender Differenz der Röhrendurchmesser.

Tabelle III.

Ton III. $n = 4882$.

Röhre I.

t	λ_t	λ_0	v_0	d
17,6	6,987	6,772	330,6	+0,1
17,7	6,981	6,765	330,3	-0,2
17,7	6,984	6,768	330,4	-0,1
17,7	6,985	6,770	330,5	—
17,9	6,983	6,765	330,3	-0,2
17,7	6,986	6,770	330,6	+0,1

Mittelwert: $v = 330,45$ m. Mittlerer Fehler: 0,12 m.

Röhre II.

16,5	6,961	6,760	330,0	-0,1
16,7	6,971	6,767	330,4	+0,3
16,8	6,972	6,767	330,4	+0,3
16,8	6,961	6,757	329,9	-0,2
17,2	6,965	6,750	329,8	-0,3
17,4	6,969	6,757	329,9	-0,2

Mittelwert: $v = 330,07$ m. Mittlerer Fehler: 0,23 m.

Röhre III.

16,6	6,959	6,757	329,9	+0,3
16,4	6,949	6,749	329,5	-0,1
16,6	6,953	6,751	329,6	—
16,6	6,948	6,745	329,3	-0,3
16,6	6,943	6,743	329,2	-0,4
16,6	6,960	6,758	329,9	+0,3

Mittelwert: $v = 329,57$ m. Mittlerer Fehler: 0,23 m.

Röhre IV.

t	λ_1	λ_0	τ_0	Δ
17,0	6,921	6,715	327,8	-0,3
16,9	6,915	6,710	327,6	-0,5
17,1	6,926	6,719	328,0	-0,1
17,2	6,935	6,726	328,4	+0,3
17,5	6,938	6,726	328,3	+0,2
17,6	6,938	6,725	328,3	+0,2

Mittelwert: $\tau = 328,07$ m. Mittlerer Fehler: 0,27 m.

Röhre V.

16,7	6,921	6,719	328,0	+0,4
16,7	6,915	6,713	327,7	+0,1
16,9	6,914	6,709	327,6	—
17,5	6,921	6,709	327,5	-0,1
17,6	6,921	6,708	327,5	-0,1
17,8	6,919	6,704	327,8	-0,3

Mittelwert: $\tau = 327,60$ m. Mittlerer Fehler: 0,17 m.

Die Werte der Schallgeschwindigkeit für jede einzelne Röhre stimmen also bei diesem Ton sehr gut überein. Durch Kombination von je zweien der Mittelwerte erhält man als wahre Schallgeschwindigkeit:

aus Röhre I und I	332,8 m	aus Röhre II und IV	332,1 m
" " I " III	332,5	" " II " V	331,8
" " I " IV	332,3	" " III " VI	332,0
" " I " V	332,1	" " III " V	331,7
" " II " III	332,3	" " IV " V	330,3

Das Mittel aus diesen Zahlen ist 331,99 m; man sieht aber hier ganz besonders gut das regelmäßige Abnehmen der Werte in der oben besprochenen Weise. Man darf also das Mittel nicht nehmen; denn die Formel von Kirchhoff ist unrichtig, wenigstens kommt ihr keine allgemeine Gültigkeit zu. Sie gibt also entweder für weite Röhren zu kleine Werte oder für enge zu große Werte, oder beides ist gleichzeitig der Fall, und so wäre sie dann nur für eine mittlere Weite gültig.

Bisher sind zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in freier Luft nur Kombinationen von Werten verwendet worden, die mit ein und demselben Ton in verschiedenen Röhren gefunden worden sind. Ehe ich daher die Versuche mit dem vierten Ton mitteile, sollen jetzt solche Werte kombiniert werden, die in ein und derselben Röhre mit verschiedenen Tönen gefunden worden sind. Ton I hat Werte ergeben, die noch sehr unsicher sind, Ton IV kann, wie sich später zeigen wird, nicht allgemein zu diesen Kombinationen verwandt werden, und so sind wir auf Ton II und III beschränkt. Durch Anwendung der Formel (2) des ersten Abschnittes erhält man

für Röhre	I	II	III	IV	V
	331,2 m	330,7 m	331,7 m	331,2 m	331,7 m.

Diese Werte stimmen untereinander recht gut überein, das Mittel 331,3 m liegt aber zu weit unter den für Ton II und Ton III durch die anderen Kombinationen gefundenen Werten 332,3 m und 332,0 m. Wenn man auch aus diesem Umstand wieder den Schluß auf die Ungültigkeit der Formel ziehen dürfte, so soll doch erst später unter Benutzung von vier verschiedenen Schwingungszahlen die Frage nach der Abhängigkeit der Schallverzögerung von der Schwingungszahl näher erörtert werden.

Die folgenden Tabellen geben die Versuche wieder, die mit dem vierten Ton angestellt worden sind.

Tabelle IV.

Ton IV. $n = 7880$.

Röhre I.

t	λ_t	λ_0	r_0	d
19,7	4,3938	4,1854	329,8	-0,3
19,9	4,3372	4,1873	330,0	-0,1
20,0	4,3295	4,1791	329,3	-0,8
20,1	4,3293	4,1782	329,2	-0,9
20,2	4,3457	4,1934	330,4	+0,3
20,2	4,3608	4,2075	331,6	+1,5

Mittelwert: $r = 330,1$ m. Mittlerer Fehler: 0,60 m.

Röhre II.

t	λ_t	λ_0	r_0	Δ
21,1	4,3518	4,1928	330,4	+ 0,5
21,2	4,3420	4,1836	329,6	- 0,8
21,3	4,3463	4,1860	329,9	—
21,8	4,3483	4,1879	330,0	+ 0,1
21,3	4,3477	4,1874	330,0	+ 0,1
21,3	4,3425	4,1824	329,6	- 0,3

Mittelwert: $r = 329,9$ m. Mittlerer Fehler: 0,22 m.

Röhre III.

20,7	4,3322	4,1768	329,1	- 0,3
20,9	4,3323	4,1754	329,0	- 0,4
20,9	4,3412	4,1840	329,7	+ 0,3
22,0	4,3518	4,1859	329,9	+ 0,5
21,7	4,3435	4,1805	329,4	—
22,1	4,3442	4,1783	329,3	- 0,1

Mittelwert: $r = 329,4$ m. Mittlerer Fehler: 0,27 m.

Röhre IV.

20,1	4,3053	4,1530	327,4	+ 0,3
20,2	4,3038	4,1529	327,3	+ 0,2
20,1	4,2943	4,1444	326,6	- 0,5
20,2	4,3069	4,1558	327,5	+ 0,4
20,4	4,3135	4,1608	327,9	+ 0,8
20,3	4,2900	4,1388	326,1	- 1,0

Mittelwert: $r = 327,1$ m. Mittlerer Fehler: 0,53 m.

Röhre V.

20,5	4,3100	4,1567	327,6	+ 0,5
20,8	4,3086	4,1533	327,3	+ 0,2
21,0	4,3135	4,1565	327,5	+ 0,4
21,2	4,2980	4,1403	326,3	- 0,8
21,9	4,3130	4,1497	327,0	- 0,1
22,0	4,3130	4,1491	327,0	- 0,1

Mittelwert: $r = 327,1$ m. Mittlerer Fehler: 0,85 m.

Die Abweichungen vom Mittelwert sind hier wieder größer als beim dritten Ton. Wenn man nach dem Grund dieser

Erscheinung fragt, kann man zuerst daran denken, daß die Wellenlänge vielleicht nicht hinreichend genau bestimmt ist; das ist aber keineswegs der Fall: es konnte immer eine sehr große Reihe von Wellen in jeder einzelnen Röhre gemessen werden, die untereinander sehr gut übereinstimmten. Weiter wäre zu berücksichtigen, daß die Tonhöhe, entgegen früheren Bemerkungen, doch nicht ganz konstant sein könnte; aber es ist sehr unwahrscheinlich, daß sie sich um etwa 250 Schwingungen ändern kann — eine solche Anzahl ist mindestens erforderlich, um die Differenz von 2,4 m zwischen dem größten und kleinsten der bei der ersten Röhre gefundenen Werte zu erklären. Es muß übrigens hinzugefügt werden, daß während sämtlicher Versuche mit Ton IV keine neuen Stellen des Stahlstabes eingeklemmt wurden. Endlich ist in Erwägung zu ziehen, daß bei der Höhe des benutzten Tones vielleicht die Intensität der Schallbewegung von Einfluß auf die Wellenlänge ist. Tatsächlich führt ja auch Koenig die Unterschiede in den Wellenlängen bei seinen Versuchen auf die Intensität der Schallquelle zurück; nur leuchtet mir nicht ein, warum bei einer Röhre von ganz bestimmter Weite der Einfluß der Intensität verschwinden soll. Auch Witkowski¹⁾ hat Erscheinungen beobachtet, die ihm bei einer Tonhöhe von etwa 6200 Schwingungen einen Einfluß der Intensität durchaus wahrscheinlich machen. Wenn dagegen Kayser²⁾ bei seiner Untersuchung „Über den Einfluß der Intensität des Schalles auf seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ einen solchen nicht hat nachweisen können, so gilt dies doch nur für tiefe Töne, da seine Schallquelle 377 Schwingungen machte; hier darf man jedenfalls die Amplitude als unendlich klein ansehen im Verhältnis zur Wellenlänge, wie es die Theorie für eine konstante Schallgeschwindigkeit verlangt. Aber bei hohen Tönen darf man das wahrscheinlich nicht mehr.

Vergleicht man in der Tab. IV die Mittelwerte für v , so fällt einem auf, daß sie bei den Röhren I und II so nahe beieinander liegen und bei den Röhren IV und V sogar über-

1) A. W. Witkowski, Bulletin International de l'Académie des sciences de Krakovie. Mars 1899.

2) H. Kayser, Wied. Ann. 6. p. 465. 1879.

einstimmen. Es würde also gar keinen Zweck haben, alle fünf Werte paarweise zu kombinieren. Nun kann man aber die Röhren I und II, sowie IV und V so vereinigen, daß man aus ihren Radien und den für sie gefundenen Schallgeschwindigkeiten das Mittel nimmt und jetzt diese „fingierten“ Röhren (*A* und *C*) untereinander und mit Röhre III (*B*) kombiniert. Man hätte also:

Röhre <i>A</i>	$r = 7,32 \text{ mm}$	$v = 330,0 \text{ m}$
„ <i>B</i>	$r = 5,64 \text{ „}$	$v = 329,4$
„ <i>C</i>	$r = 3,10 \text{ „}$	$v = 327,1$

Man findet

aus Röhre <i>A</i> und <i>B</i>	$a = 331,8 \text{ m}$
„ „ <i>A</i> „ <i>C</i>	$a = 332,1$
„ „ <i>B</i> „ <i>C</i>	$a = 332,4$

Das Mittel aus diesen drei Werten ist 332,1 m und stimmt gut mit den bei den Tönen II und III gefundenen Mittelwerten überein. — Ich will hier bemerken, daß mit dem fünften Ton des Stahlstabes, nachdem eine Feder zum Aufschreiben der Schwingungen angelötet worden war, keine Versuche mehr angestellt werden konnten. Die Intensität war so schwach, daß keine brauchbaren Figuren entstanden.

Die Schallgeschwindigkeit a soll jetzt noch mit Hilfe der Röhre III bez. mit den für sie bei allen vier Tönen gefundenen Werten von v berechnet werden, die mittleren Fehler sind nämlich gerade für diese Röhre sämtlich sehr klein.

So bekommt man für a

aus Ton I und II	334,8 m	aus Ton II und III	331,7 m
„ „ I „ III	333,3	„ „ II „ IV	330,2
„ „ I „ IV	331,0	„ „ III „ IV	328,6

Das Mittel würde 331,6 m betragen; aber auch hier sieht man wieder, daß a sich nach einer ganz bestimmten Regel ändert: es wird kleiner, je größer die Differenz der Schwingungszahlen wird. Dies ist so zu verstehen, daß, wenn man von einem bestimmten Ton ausgeht und mit ihm höhere und höhere kombiniert, die Schallgeschwindigkeit abnimmt; bei Änderung

der Röhrenweite und bei konstanter Tonhöhe war das Verhältnis ganz ähnlich: geht man von einer Röhre mit bestimmtem Radius aus und kombiniert sie mit engeren und engeren Röhren, so nimmt die Schallgeschwindigkeit ab.

Es soll jetzt die Größe γ der Kirchhoffschen Formel berechnet werden, und zwar nach den verschiedenen Methoden. Die mit Ton I gewonnenen Zahlen für v bez. a sollen keine Verwendung finden, außer bei Röhre III. Bei Ton II wird γ für die sechs Röhren einzeln nach Formel (5) berechnet, dann durch Kombination von je zwei Röhren, also nach Formel (3); bei Ton III gilt dasselbe für die fünf benutzten Röhren, bei Ton IV für die Röhren *A*, *B* und *C*. Schließlich soll γ für Röhre III durch Kombination je zweier von den vier Schwingungszahlen, also nach Formel (4) berechnet werden. Bei Anwendung der Formel (5) ist $a = 332,1$ m gesetzt.

1. γ nach der Formel (5). Ton II bis IV.

Röhre	Ton II	Ton III	Ton IV
I	0,00784	0,00926	} 0,01458
II	0,00855	0,00999	
III	0,00965	0,01018	0,01397
IV	0,01028	0,01011	} 0,01469
V	0,00923	0,00940	
VI	0,00900	—	—

2. γ nach der Formel (3).

Röhren	Ton II	Ton III	Röhren	Ton II	Ton III
I und II	0,01299	0,01387	II und VI	0,00987	—
I „ III	0,01394	0,01207	III „ IV	0,01093	0,01001
I „ IV	0,01213	0,01068	III „ V	0,00897	0,00885
I „ V	0,01000	0,00931	III „ VI	0,00856	—
I „ IV	0,00936	—	IV „ V	0,00432	0,00714
II „ III	0,01559	0,01100	IV „ VI	0,00749	—
II „ IV	0,01201	0,01047	V „ VI	0,00856	—
II „ V	0,00971	0,00887			

Für Ton IV ergeben sich die Werte:

aus Röhre A und B	0,01223
" " A " C	0,01477
" " B " C	0,01562.

3. Mit der Formel (4) findet man endlich aus Röhre III für γ :

mit Ton I und II	0,01663
" " I " III	0,01430
" " I " IV	0,01116
" " II " III	0,00882
" " II " IV	0,00445
" " III " IV	0,00314

Nach diesen Berechnungen schwankt γ zwischen 0,00314 und 0,01663; nachdem bereits die Ungültigkeit der Kirchhoffschen Formel bewiesen worden ist, sind die großen Verschiedenheiten in den Werten von γ erklärlich.

IV. Versuche mit besonderen Röhren.

Die Kirchhoffsche Formel stimmt also mit den Experimenten nicht überein. Da die Theorie aber jedenfalls an und für sich richtig ist, muß man zu der Ansicht kommen, daß außer den in der Formel berücksichtigten Einflüssen noch andere vorhanden sind, die bei der Schallgeschwindigkeit in Röhren eine Rolle spielen. Man kann daran denken, daß außer der Reibung und Wärmeleitung im Gas eine Reibung an der Röhrenwand und die Wärmeleitung des Materiales der Röhre die Schallgeschwindigkeit beeinflussen, und um solche Einflüsse zu studieren, habe ich noch Versuche besonderer Art angestellt.

1. Um die innere Oberfläche einer Glasröhre rauh zu machen und so die Reibung an der Wand zu vermehren brachte ich eine ziemlich große Menge von Samen *Lycopodium* in die Röhre hinein und ließ sie an der feuchten Luft längere Zeit stehen, während der ich die Röhre ab und zu drehte, damit sich die Wand möglichst gleichmäßig mit Staub überzog. Wenn die Staubschicht so dicht geworden war, daß man gerade noch hindurchsehen konnte, wurde die Luft im Inneren

der Röhre getrocknet und die Versuche in der bekannten Weise angestellt. Die Staubfiguren hatten hierbei eine etwas andere Form als gewöhnlich; denn der Staub fällt jetzt in den Bäuchen von beiden Seiten nach der tiefsten Stelle der Röhre. In den Bäuchen gehen die Rippen, die von beiden Seiten kommen, ineinander über, dadurch liegen die Knotenpunkte jetzt in runden Löchern.

Derartige Versuche wurden mit Röhre I und III angestellt; benutzt wurde zu diesen wie zu den weiteren Versuchen immer Ton III, weil mit ihm früher die besten Resultate erzielt worden waren.

Röhre I.

t	λ_t	λ_0	r_0	Δ
18,8	6,976	6,747	329,4	+0,2
18,4	6,966	6,742	329,2	—
18,3	6,962	6,740	329,0	-0,2
18,1	6,965	6,745	329,3	+0,1
18,0	6,956	6,738	328,9	-0,3
17,4	6,956	6,745	329,3	+0,1

Mittelwert: $r = 329,2$ m. Mittlerer Fehler: 0,15 m.

Röhre III.

17,4	6,905	6,695	326,8	—
17,5	6,922	6,710	327,6	+0,8
17,6	6,901	6,689	326,5	-0,3
17,8	6,909	6,694	326,8	—
18,2	6,912	6,691	326,7	-0,1
18,6	6,913	6,688	326,5	-0,3

Mittelwert: $r = 326,8$ m. Mittlerer Fehler: 0,25 m.

Die Verringerung der Schallgeschwindigkeit ist also recht bedeutend, wenn die Röhrenwand mit Staub überzogen ist:

ohne Staubschicht ist $r = 330,45$ m in I und 329,57 m in III,
mit „ „ „ $r = 329,2$ m „ I „ 326,8 m „ III.

Wahrscheinlich ist auch die verhältnismäßig geringe Staubmenge, die bei den anderen Versuchen zum Erzeugen der Figuren gebraucht wurde, nicht ganz ohne Einfluß.

2. Ich habe nun in die Röhre I einmal eine engere Glasröhre, ein anderes Mal eine Messingsstange so hineingesteckt und in einer Weise darin befestigt, daß die beiden Röhren bez. Glasröhre und Messingstange sich nicht berührten. In dem Zwischenraum wurden die Staubfiguren erzeugt. Die engere Glasröhre und die Messingstange hatten gleiche Dicke; sie betrug 11,1 mm, sodaß der Zwischenraum etwa 2,2 mm weit war.

Röhre I und Glasröhre.

l	λ_r	λ_0	r_0	d
18,6	6,966	6,740	329,0	—
18,6	6,970	6,744	329,2	+0,2
19,1	6,968	6,736	328,9	—0,1
19,1	6,964	6,732	328,7	—0,3
19,1	6,972	6,740	329,1	+0,1

Mittelwert: $r = 329,0$ m. Mittlerer Fehler: 0,14 m.

Röhre I und Messingstange.

18,4	6,950	6,727	328,4	+0,2
18,7	6,952	6,726	328,3	+0,1
18,7	6,946	6,720	328,1	—0,1
18,9	6,943	6,715	327,8	—0,4
19,0	6,952	6,722	328,2	—

Mittelwert: $r = 328,2$ m. Mittlerer Fehler: 0,16 m.

Bei der Messingstange ist die Verzögerung wesentlich größer (0,8 m) als bei der Glasröhre, jedenfalls wegen der größeren Wärmeleitungsfähigkeit des Metalles.

Die Glasröhren mußten, nachdem die Luft in ihnen getrocknet war, gewöhnlich für kurze Zeit offen stehen, während der eigentliche Versuch gemacht wurde. Man könnte denken, daß dabei feuchte Luft eintreten und das Resultat fälschen

würde. Um dies zu untersuchen, habe ich mit einer Röhre nacheinander vier Versuche gemacht, die Luft aber nur vor dem ersten getrocknet und die Röhre dann gar nicht mehr verschlossen, sodaß also die feuchte Zimmerluft eintreten konnte. Die vier Versuche nahmen eine Zeit von 45 Min. in Anspruch; die folgende Tabelle zeigt, daß von einem merklichen Einfluß der feuchten Luft nicht die Rede sein kann.

Nr.	t	λ_1	λ_0	v_0
I	19,0	7,027	6,795	331,7
II	19,0	7,036	6,803	332,1
III	19,0	7,030	6,797	331,9
IV	19,1	7,034	6,800	332,0

V. Resultate.

Die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die Schallgeschwindigkeit in Röhren kann ich kurz folgendermaßen zusammenfassen.

Die von Helmholtz und Kirchhoff aufgestellte Formel hat keine allgemeine Gültigkeit, wenn sie auch die Verzögerung, die der Schall in Röhren erleidet, annähernd wiedergibt. Wie die Formel zu korrigieren ist, soll einstweilen nicht näher untersucht werden; einmal scheint mir das bis jetzt vorliegende Material kaum auszureichen, und dann ist es ganz besonders wünschenswert, daß zuerst einmal die wahre Schallgeschwindigkeit in freier Luft genau bestimmt wird. Wenn es auch an zahlreichen Bestimmungen nicht gefehlt hat, so ist man doch immer in Verlegenheit, welchen Wert man seinen Untersuchungen zu Grunde legen soll.

Die Schallgeschwindigkeit ist in einer Röhre abhängig von dem Material derselben: je rauher die Wand und je größer die Wärmeleitung ist, um so größer ist die Verzögerung.

Diese letzten Resultate beweisen, daß man die Konstante γ nicht aus den anderweitig gefundenen Zahlenwerten von Wärmeleitung und Reibung des betreffenden Gases berechnen kann, sondern daß γ von Fall zu Fall variieren kann. Die Versuche

erklären auch die Abweichungen von der Kirchhoffschen Formel, die einen Einfluß des Materiales der Röhre auf die Schallgeschwindigkeit nicht berücksichtigt.

Die vorliegenden Untersuchungen sind im Physikalischen Institut der Bonner Universität ausgeführt worden. Zum Schluß will ich dem Direktor desselben, Hrn. Prof. Kayser, nochmals meinen herzlichen Dank aussprechen für seine freundliche Unterstützung bei meiner Arbeit.

Bonn, Physikalisches Institut, im Februar 1903.

(Eingegangen 11. Februar 1903.)

**7. Die Verwendung des Keilkompensators
von Arago zur Messung der Brechungsexponenten
von Flüssigkeiten; von J. Wallot.**

(Auszug aus der Münchner Inaugural-Dissertation.)

In den Sitzungsberichten der Pariser Académie des sciences vom Jahre 1840 findet sich eine Mitteilung von Arago¹⁾ über Interferenzversuche, bei denen er zur willkürlichen Verschiebung seiner Interferenzstreifen²⁾ einen Keilkompensator benutzte. Es war dies eine Art Babinetscher Kompensator aus Glas, wie man ihn leicht herstellen kann, indem man ein Prisma mit kleinem brechendem Winkel durch einen Schnitt senkrecht zu seiner brechenden Kante in zwei Teile zerlegt und diese in entgegengesetzter Lage durch irgend eine Vorrichtung aneinander verschiebbar macht.

Der Apparat wurde von französischen Physikern später noch mehrmals zu ähnlichen Zwecken gebraucht, z. B. von Billet³⁾ und Croullebois⁴⁾; in Deutschland dagegen scheinen die älteren Kompensatorformen — Arago hatte ausser dem Keilkompensator noch einen Plattenkompensator konstruiert — durch den Jaminschen⁵⁾ Kompensator vom Jahre 1858 völlig in den Hintergrund gedrängt worden zu sein.

So war es möglich, dass ich erst mehrere Monate, nachdem ich die vorliegende Arbeit auf Veranlassung des Hrn. Prof. Dr. Zehnder begonnen hatte, und erst bei der Lektüre eines französischen Werkes⁶⁾ zufällig von der Vorgeschichte meines Apparates etwas erfuhr.

1) D. F. J. Arago, Compt. rend. 10. p. 813. 1840.

2) Wie er diese herstellte, ist nicht zu ersehen.

3) F. Billet, Ann. de chim. et phys. (3) 64. p. 385. 1862; Compt. rend. 67. p. 1000. 1868.

4) M. Croullebois, Ann. de chim. et phys. (4) 20. p. 136. 1870.

5) J. C. Jamin, Ann. de chim. et phys. (3) 52. p. 163. 1858.

6) E. Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von K. Exner 1. p. 93. Braunschweig 1881.

Auch Hr. Prof. Zehnder war von dem Gedanken ausgegangen, einen Keilkompensator zur willkürlichen Verschiebung von Interferenzstreifen, und zwar speziell in Verbindung mit dem Interferentialrefraktor, zu verwenden, zumal da die Keilverschiebung, im Gegensatze zu der Drehung des Jaminschen Kompensators, der Zahl der vorüberwandernden Streifen durchaus proportional ist; er erkannte aber sofort, daß man den Keilkompensator auch direkt zur Messung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten, insbesondere auch von absorbierenden Flüssigkeiten, verwenden kann, und es ist vor allem diese neue Meßmethode, zu deren eingehender Untersuchung er mich aufforderte.

Die von Prof. Zehnder vorgeschlagene Anordnung ist die folgende (Fig. 1): In den Weg des einen der zwischen den

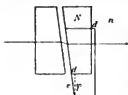


Fig. 1.

Platten des Interferentialrefraktors verlaufenden Strahlenbündel bringt man den Doppelkeil von Arago, in den Weg des andern — damit der Gesamtgangunterschied nicht zu groß wird — eine planparallele Platte aus demselben Material, die ungefähr ebenso dick ist wie die beiden Keile, wenn sie einander überdecken. Wird der eine der beiden Keile, wie es die Figur zeigt, etwa durch eine feine Mikrometerschraube um eine Strecke e verschoben, so findet das Strahlenbündel, das die beiden Keile senkrecht zu ihren äußeren Begrenzungsflächen durchsetzt, in einer sich stetig vorlagernden Schicht von der Dicke d nicht mehr den Brechungsexponenten des äußeren Mediums n , sondern den des Keilmaterials N vor. Die im Refraktorfernrohr vorüberwandernde Streifenzahl s wird daher durch

$$\lambda s = d(N - n)$$

gegeben (λ ist die Wellenlänge des benutzten homogenen Lichtes in dem Medium, auf das der Brechungsexponent bezogen wird), oder wenn man e und den Keilwinkel φ einführt, durch

$$(1) \quad \lambda s = e \sin \varphi (N - n).$$

Kennt man nun N , φ und λ , und senkt man den Kompensator in eine Flüssigkeit mit dem Brechungsexponenten n , so

kann man durch Messung von s und e den Brechungsexponenten der Flüssigkeit bestimmen.

Die hier skizzierte Anordnung ist übrigens bis auf die den Kompensator umgebende Flüssigkeit schon von Billet¹⁾ angegeben worden; von einer Benutzung des Kompensators zur direkten Messung von Brechungsexponenten habe ich dagegen nirgends in der Literatur etwas finden können.²⁾

Bei der Ableitung der Gleichung (1) wurde durch die Benutzung der Fig. 1 eine spezielle Orientierung vorausgesetzt. Bei allgemeiner Orientierung erhält man eine viel verwickeltere Beziehung. Denn während in der Gleichung (1) die Brechungsexponenten der beiden Medien nur deshalb vorkommen, weil die optischen und nicht die geometrischen Weglängen einzusetzen sind, hängt bei allgemeiner Orientierung die geometrische Weglänge selbst wieder von den Richtungsänderungen, die der Strahl durch Brechungen erleidet, und dadurch von den Brechungsexponenten ab.

Eine genauere theoretische Untersuchung, zu der ich jetzt übergehe, muß darüber entscheiden, ob und innerhalb welcher Grenzen mit der einfacheren Formel (1) gerechnet werden darf.

I. Die Theorie des Apparats.

Es handelt sich in diesem Abschnitt vor allem um die Verallgemeinerung der Gleichung (1), also um die Frage: Wie ändern sich die Gangunterschiede der in der Fadenkreuzebene des Beobachtungsfernrohrs interferierenden Strahlen, wenn man den beweglichen Keil des beliebig orientierten Kompensators um eine geradlinige, beliebig gerichtete Strecke e sich selber parallel verschiebt?

Da es sehr mühselig wäre, die Aufgabe ohne weiteres so allgemein durchzuführen, lasse ich bei der Untersuchung vorläufig den festen Keil und die Planplatte des Kompensators und den Interferentialrefraktor selbst ganz weg und betrachte

1) Er erzeugte die Interferenzstreifen durch seine Halblinsen.

2) In der neuesten Zeit hat auch Lummer einen Doppelglaskoil benutzt, jedoch zu anderem Zwecke: O. Lummer, Arch. Néerl. (2) 6. p. 773. 1901.

nur den beweglichen Keil und einen einzigen, diesen in beliebiger Richtung durchsetzenden, homogenen Lichtstrahl (vgl. Fig. 2, p. 360). Ich fasse dann die Bahnen, die dieser Lichtstrahl vor und nach der Verschiebung des Keils durchläuft, als die Bahnen zweier voneinander unabhängiger Strahlen an und berechne den Gangunterschied Δ , den diese nach ihrem Durchtritt durch den Keil haben.¹⁾ Es wird später (p. 366 f.) gezeigt werden, daß dieser Gangunterschied, von verschwindend kleinen Korrekturen abgesehen, bereits die gesuchte, bei der tatsächlichen Versuchsanordnung vorüberwandernde Streifenzahl s liefert.

Der nächstliegende Weg zur Bestimmung von Δ wäre der, den Verlauf der Strahlen vor der Verschiebung und nach der Verschiebung, oder wie ich sie kürzer nennen will, der Strahlen a und b im Raume zu konstruieren und dann Stück für Stück die optischen Längen, d. h. die geometrischen Längen, multipliziert mit den Brechungsexponenten, zu berechnen. Dabei werden die Formeln aber so kompliziert und unübersichtlich, daß man sich besser nach Hilfsmitteln umsieht, die das verhältnismäßig einfache Ergebnis auch auf einfachem Wege abzuleiten erlauben.

Ein solches recht fruchtbare Hilfsmittel ist ein Satz, den Helmholtz²⁾ in der folgenden Form ausgesprochen hat:

„Wenn Lichtstrahlen von einem Punkt ausgegangen³⁾ und durch beliebig viele Flächen von kontinuierlicher Krümmung⁴⁾ gebrochen worden sind, stehen sie nach der letzten Brechung senkrecht auf jeder krummen Fläche, für deren sämtliche Punkte die optische Länge eines Strahles einen konstanten Wert hat.“

1) Der Gangunterschied zweier Strahlen bezieht sich immer auf ihren Schnittpunkt; er hat für jedes homogene Medium einen bestimmten Wert. Bei parallelen Strahlen vergleicht man entsprechend den Schwingungszustand zweier Punkte, die auf derselben Normalebene liegen.

2) H. Helmholtz, *Wissensch. Abhandl.* 2. p. 153. 1883.

3) Nur derartige „homozentrische“ Strahlen sind bekanntlich interferenzfähig.

4) Der Satz gilt *praktisch* auch für Flächen mit scharfen Kanten und Spitzen, wie man sie bei den meisten Interferenzapparaten findet; man braucht sich nur die Kanten und Spitzen durch sehr kleine kontinuierliche Flächen abgerundet zu denken.

Ursprünglich homozentrische Strahlen kommen also nach beliebig vielen Brechungen (oder Reflexionen) auf ihren Normalflächen ohne Gangunterschied an.

Da nun aber diese Normalflächen im allgemeinen eine recht verwickelte Gestalt haben, ist mit dem Satz in dieser allgemeinen Fassung noch nicht viel anzufangen. Seine Bedeutung tritt erst zu Tage, wenn man ihn spezialisiert für den Fall, daß die ursprünglich homozentrischen Strahlen auch nach den Brechungen (oder Reflexionen) noch homozentrisch sind. Dann entsprechen dem leuchtenden Punkt als Objektpunkt lauter ganz bestimmte Bildpunkte, dann ist jede Kugelfläche um einen der Bildpunkte eine Normalfläche, und der Satz sagt aus, daß alle Strahlen in den Bildpunkten, in denen allein eine Interferenzwirkung möglich wäre, ohne Gangunterschied ankommen.

Glücklicherweise ist dieser Grenzfall der vollkommen homozentrischen Abbildung meistens annähernd, oft, z. B. bei einem Bündel von parallelen Strahlen, die nur durch ebene Flächen abgebildet werden, sogar vollkommen verwirklicht. Man kann daher den folgenden Satz aufstellen:

Hilfssatz¹⁾: Ein Strahl, der von einer ebenen Fläche gebrochen oder reflektiert wird, kann in dieser beliebig parallel verschoben werden, ohne daß sich der Gangunterschied ändert, der nach der Brechung oder Reflexion zwischen ihm und einem beliebigen Parallelstrahl²⁾ besteht.

Die Bedeutung dieses Hilfssatzes für die Berechnung von Interferenzapparaten liegt darin, daß man Strahlen, deren Gangunterschied unbequem zu finden ist, durch andere gleichwertige ersetzen kann, deren Gangunterschied leichter zu berechnen ist. Wir werden ihn im folgenden mehrmals mit Vorteil benutzen.

1) Eine allgemeinere Fassung wäre die folgende: Strahlen, die von irgend einem Punkt ausgegangen sind und sich in demselben Bildpunkt wieder vereinigt haben, liefern mit einem durch diesen Bildpunkt gehenden Strahle alle denselben Gangunterschied.

2) Man beachte, daß diesem Strahle nur die eine Bedingung auferlegt wird, daß er in dem Medium, für das der Gangunterschied berechnet werden soll, dem erstgenannten Strahl parallel läuft.

Man nehme zunächst Fig. 2 zu Hülfe, die den beweglichen Keil und den ihn durchsetzenden Lichtstrahl darstellt. Alle Richtungen sollen auf den Keil bezogen werden.

Der Keilwinkel sei wie früher φ ; eine zu der Keilkante senkrechte Ebene heiße, wie es Brauch ist, ein Hauptschnitt des Keils. Die Richtung des von der Lichtquelle auf die „vordere“ Keilfläche auffallenden Strahles soll gegeben sein durch seinen Einfallswinkel i und durch den Winkel η , den seine Einfallsebene mit den Hauptschnitten des Keiles bildet. i und η können alle Werte von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ annehmen. i sei positiv, wenn der einfallende Strahl auf die Keilkante zu

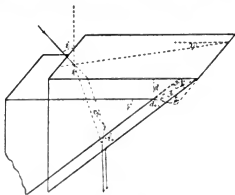


Fig. 2.

gerichtet ist; bei η braucht die Bedeutung der Vorzeichen nicht festgesetzt zu werden, da nur $\cos \eta$ vorkommen wird.

Die Verschiebung e denke ich mir auf einen Hauptschnitt projiziert; ϑ sei der spitze Winkel, den diese Projektion mit der zweiten Keilfläche, die ich die „schiefe“ nenne, bildet, und zwar soll ϑ , wenn man die Projektion der Verschiebungsrichtung um die Keilkante von einer Anfangslage in der schiefen Keilfläche aus nach der vorderen Keilfläche hin um 360° dreht, im ersten und dritten Quadranten dieser Drehung positiv, im zweiten und vierten negativ sein. Ich verzichte überhaupt darauf, die Richtung, in der die Mikrometerschraube gedreht wird, auf das Vorzeichen des Gangunterschiedes Δ und damit der Streifenzahl einwirken zu lassen, und ziehe es vor, den Gangunterschied und die Streifenzahl immer als positive

Größen zu berechnen. Endlich sei der Winkel zwischen der Verschiebungsrichtung und der Keilkante gleich ζ .

Im allgemeinen wird der Strahl bei seiner ersten Brechung (in der vorderen Keilfläche) in einer anderen Einfallsebene verlaufen als bei seiner zweiten Brechung (in der schiefen Keilfläche); ich unterscheide daher eine erste und eine zweite Einfallsebene. Die zweite Einfallsebene ist vor und nach der Verschiebung bei unveränderter Richtung ihrer Normalen in verschiedenen Lagen; ich spreche deshalb von den Ebenen $2a$ und $2b$.

Der Brechungsexponent des Keils sei N , der des äußeren Mediums n . N sei größer als n .

Die vordere Fläche soll sich in der Richtung ihrer Normalen um d verschieben, die schiefe Fläche in der Richtung ihrer Normalen um d_0 . Mit den Einfallsloten der beiden Flächen bilde der Strahl der Reihe nach die Winkel i, r (in der ersten Einfallsebene), r_0, i_0 (in der zweiten Einfallsebene).

Δ sei, wie schon bemerkt, der zu berechnende Gangunterschied der Strahlen a und b nach ihrem Wiedereintritt in das äußere Medium.

Es sei vorläufig vorausgesetzt, daß $\zeta = 90^\circ$ sei, daß also die Verschiebung in einem Hauptschnitt erfolge.

Ich betrachte nun zuerst die erste Einfallsebene, die durch Fig. 3 dargestellt ist. BDE ist die Bahn des Strahles a ,

BAA_0B_0 die des Strahles b . Eine Verschiebung des Strahles a in die Lage $CA A_0$ zeigt, daß der Gangunterschied der beiden Strahlen a und b im Innern des Keils allein davon herrührt, daß der Strahl a den Weg CA im äußeren Medium, der Strahl b aber den Weg BA im Keil zurücklegt. Der Gangunterschied der Strahlen im Innern des Keils ist also

$$(2) \quad \Delta' = N \cdot AB - n \cdot AC.$$

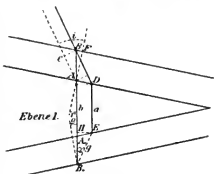


Fig. 3.

Zu diesem Gangunterschied ist, wenn die Strahlen aus dem Keile wieder in das äußere Medium zurückgetreten sind,

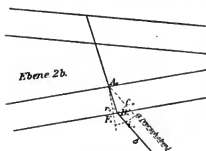


Fig. 4.

ein gewisser Betrag hinzugekommen, und der scheint sich nicht so einfach berechnen zu lassen, da sich die beiden Strahlen *a* und *b* in verschiedenen Ebenen fortpflanzen. Der Hülfsatz beseitigt die Schwierigkeit. Man denkt sich den Strahl *a* parallel zu sich selbst verschoben, bis er im

Innern des Keils mit dem Strahl *b* zusammenfällt. Der neue fingierte Strahl ist dem alten in der Ebene 2 *a* vollständig gleichwertig, und man hat den großen Vorteil, daß sich die Strahlen, deren Gangunterschied zu berechnen ist, jetzt in derselben Ebene, nämlich in der Ebene 2 *b* (Fig. 4) fortpflanzen. Der noch fehlende Gangunterschied Δ'' kann infolgedessen direkt aus der Figur abgelesen werden:

$$(3) \quad \Delta'' = N \cdot A_0 B_0 - n \cdot A_0 C_0 \cdot ^{1)}$$

Die Strecken AB , AC , $A_0 B_0$, $A_0 C_0$ sind leicht zu berechnen. Denn da die Ebene 1 auf der vorderen Keilfläche und die beiden Ebenen 2 auf der schiefen Keilfläche senkrecht stehen, so ist $AF = d$ und $A_0 F_0 = d_0$. Man erhält:

$$(4) \quad \begin{cases} AB = \frac{d}{\cos r}, \\ AC = d \cdot \frac{\cos(i-r)}{\cos r}, \\ A_0 B_0 = \frac{d_0}{\cos r_0}, \\ A_0 C_0 = d_0 \cdot \frac{\cos(i_0-r_0)}{\cos r_0}, \end{cases}$$

und es wird

1) Eine Ableitung dieser Gleichung ohne Anwendung des Hülfsatzes findet man in meiner Dissertation p. 15 u. 16.

$$\Delta' = d \cdot \left\{ \frac{N}{\cos r} - \frac{n \cdot \cos(i-r)}{\cos r} \right\},$$

$$\Delta'' = d_0 \cdot \left\{ \frac{N}{\cos r_0} - \frac{n \cdot \cos(i_0-r_0)}{\cos r_0} \right\}.$$

Durch Entwickeln von $\cos(i-r)$ und $\cos(i_0-r_0)$ und durch die Einführungen:

$$n \cdot \sin i = N \cdot \sin r$$

$$n \cdot \sin i_0 = N \cdot \sin r_0$$

findet man hieraus sofort:

$$\Delta' = d \cdot \{ N \cdot \cos r - n \cdot \cos i \}$$

$$\Delta'' = d_0 \cdot \{ N \cdot \cos r_0 - n \cdot \cos i_0 \}.$$

Da $\zeta = 90^\circ$ vorausgesetzt ist, so ergeben sich d und d_0 sehr einfach aus Fig. 2:

$$d = e \cdot \sin(\varphi - \vartheta)$$

$$d_0 = e \cdot \sin \vartheta,$$

und man erhält daher:

$$(5) \quad \Delta = e \{ \sin(\varphi - \vartheta) \cdot (N \cos r - n \cos i) \\ + \sin \vartheta \cdot (N \cos r_0 - n \cos i_0) \}.$$

i_0 , r_0 und r sind nun durch i auszudrücken. Es ist:

$$\sin r = \frac{n}{N} \sin i,$$

$$(6) \quad N^2 \cos^2 r = N^2 - n^2 \sin^2 i = R_1^2.$$

Zur Berechnung von r_0 und i_0 habe ich alle in Betracht kommenden Richtungen in eine Kugel eingezeichnet (Fig. 5). Die XY -Ebene stellt die vordere Keilfläche dar, die Z -Achse hat die Richtung des ersten Einfallslotes, die Y -Achse hat die der Keilkante. Mit dem ersten Einfallslot bildet das zweite, KJ , in der XZ -Ebene den Winkel φ ; die zu KJ senkrechte Ebene — die Punkte

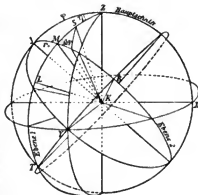


Fig. 5.

Y, T, R, K gehören ihr an — entspricht der schiefen Keilfläche. KL ist die Richtung der auffallenden Strahlen, KM die der im Keil verlaufenden, KN die der wieder in das äußere Medium getretenen Strahlen. Die erste Einfallsebene enthält die Punkte T, L, M, Z , die zweite die Punkte $JMN R$; MZ ist der Winkel r , MJ der Winkel r_0 und MZJ der Winkel η . Daher ist:

$$\cos r_0 = \cos r \cos \varphi + \sin r \sin \varphi \cos \eta$$

oder

$$N \cos r_0 = R_1 \cos \varphi + n \sin \varphi \sin i \cos \eta.$$

Ferner ist:

$$\sin i_0 = \frac{N}{n} \sin r_0,$$

und

$$\begin{aligned} n^2 \cos^2 i_0 &= n^2 - N^2 \sin^2 r_0 = n^2 - N^2 + N^2 \cos^2 r_0 \\ &= n^2 - N^2 + R_1^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi \sin^2 i \cos^2 \eta \\ &\quad + 2 n R_1 \sin \varphi \cos \varphi \sin i \cos \eta, \\ (7) \quad n^2 \cos^2 i_0 &= n^2 - N^2 \sin^2 \varphi + 2 n R_1 \sin \varphi \cos \varphi \sin i \cos \eta \\ &\quad + n^2 \sin^2 i (\sin^2 \varphi \cos^2 \eta - \cos^2 \varphi) = R_2^2. \end{aligned}$$

Man erhält also schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{A}{e} &= \sin(\varphi - \vartheta) (R_1 - n \cos i) \\ &\quad + \sin \vartheta (R_1 \cos \varphi + n \sin \varphi \sin i \cos \eta - R_2), \\ (8) \quad \frac{A}{e} &= \sin \varphi \cos \vartheta \cdot R_1 - n \sin(\varphi - \vartheta) \cos i \\ &\quad + \sin \vartheta (n \sin \varphi \sin i \cos \eta - R_2). \end{aligned}$$

Diese Formel wird viel übersichtlicher, wenn φ, i und ϑ klein sind, wie es der Beschaffenheit des Keils und seiner Einstellung entspricht. Ich setze voraus, daß auf der rechten Seite von (8) alle Kombinationen der Winkel i und ϑ von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Außerdem soll $\sin^2 \varphi$ von derselben Ordnung sein wie i und ϑ .

Dann wird R_1 nach (6):

$$R_1 = N - \frac{n^2}{2N} i^2.$$

Für R_2 erhält man nach (7), indem man nach $\sin i$ entwickelt und berücksichtigt, daß R_2 nur mit $\sin \vartheta$ multipliziert vorkommt:

$$R_2 = \sqrt{n^2 - N^2 \sin^2 \varphi} + \frac{n N \sin \varphi \cos \varphi \cos \eta}{\sqrt{n^2 - N^2 \sin^2 \varphi}} i,$$

und dies läßt sich weiter zu

$$R_2 = n - \frac{N^2}{2n} \sin^2 \varphi + N i \sin \varphi \cos \varphi \cos \eta$$

vereinfachen. Führt man diese Annäherungen in (8) ein und drückt man zugleich alle Kosinus der kleinen Winkel durch die Winkel selbst aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{A}{e} &= N \sin \varphi - \frac{N}{2} \vartheta^2 \sin \varphi - \frac{n^2}{2N} i^2 \sin \varphi \\ &\quad - n \sin \varphi + \frac{n}{2} \vartheta^2 \sin \varphi + \frac{n}{2} i^2 \sin \varphi \\ &\quad + n \vartheta - \frac{n}{2} \vartheta \sin^2 \varphi \\ &\quad + n i \vartheta \sin \varphi \cos \eta \\ &\quad - n \vartheta + \frac{N^2}{2n} \vartheta \sin^2 \varphi - N i \vartheta \sin \varphi \cos \eta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= e \sin \varphi \left\{ (N - n) + \left(\frac{n}{2} - \frac{n^2}{2N} \right) i^2 + \left(\frac{N^2}{2n} - \frac{n}{2} \right) \vartheta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{N}{2} - \frac{n}{2} \right) \vartheta^2 - (N - n) i \vartheta \cos \eta \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \quad A &= e \sin \varphi (N - n) \left\{ 1 + \frac{n}{2N} i^2 + \frac{N + n}{2n} \vartheta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vartheta^2}{2} - i \vartheta \cos \eta \right\}. \end{aligned}$$

Ich habe mich jetzt nur noch von der Voraussetzung freizumachen, daß der Keil senkrecht zu seiner Kante verschoben werde. Da selbstverständlich der Gangunterschied der Strahlen *a* und *b* nur von der Anfangs- und der Endstellung des Keils, aber nicht von dem Verschiebungswege abhängt, so kann man sich die Verschiebung zusammengesetzt denken aus einer Verschiebung in einem Hauptschnitt, die oben behandelt worden ist, und aus einer parallel zu der Keilkante, die an dem Gangunterschied nichts ändert. Dieser bleibt also derselbe, nur ist in die Formel nicht mehr die tatsächliche Verschiebung *e* einzutragen, sondern ihre Pro-

jektion auf den Hauptschnitt (vgl. Fig. 2) $e \sin \zeta$. Man kommt so zu der Formel:

$$(10a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= e \sin \varphi \sin \zeta (N - n) \left\{ 1 + \frac{n}{2N} i^2 + \frac{N+n}{2n} \vartheta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vartheta^2}{2} - i \vartheta \cos \eta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung gilt natürlich auch für ein n , das größer ist als N , nnr ist nach den früheren Festsetzungen dann $n - N$ statt $N - n$ einzuführen.

Der Gangunterschied der Strahlen a und b ist demnach nur dann der Differenz $N - n$ proportional, wenn i und $\vartheta = 0$ sind, d. h. wenn der betrachtete Lichtstrahl auf die vordere Keilfläche senkrecht auffällt und die schiefe Keilfläche sich in sich selbst verschiebt.

Es muß nun die Frage beantwortet werden, in welchem Zusammenhang der Gangunterschied Δ der Strahlen a und b mit der im Fernrohr des Interferentialrefraktors beobachteten Streifenverschiebung steht. Ich mache dabei die vereinfachenden Voraussetzungen, daß die Refraktorplatten und die Platte des Kompensators absolut planparallel seien, und daß auch der Doppelkeil, als Ganzes betrachtet, wie eine absolut planparallele Platte wirke.

Verfolgen wir nun einen Lichtstrahl auf seinem Wege von der Lichtquelle bis zu der Fadenkrenebene des Fernrohrs. Er fällt zunächst auf die erste Refraktorplatte und spaltet sich dort in zwei Teilstrahlen, einen reflektierten S_1 und einen gebrochenen S_2 . S_2 wird an der Rückseite der Refraktorplatte reflektiert und wieder in die Luft hinausgebrochen, wo er dann dem anderen Strahl S_1 parallel läuft. Von hier ab veranschaulicht die Fig. 6 den Verlauf der Strahlen. S_1 durchsetzt die Planplatte, S_2 den Doppelkeil des Kompensators, und zwar durchsetzt S_2 *zuerst* den festen und *dann* den beweglichen Keil. Auf den Grund dieser Anordnung werde ich nachher zurückkommen. Es sei aber jetzt schon darauf hingewiesen, daß dies der Fig. 2 widerspricht; denn dort fiel der betreffende Strahl zuerst auf die vordere Fläche des beweglichen Keils, und dies ist nur möglich, wenn er überhaupt den beweglichen Keil zuerst durchsetzt. Unsere ganzen Entwicklungen bis zu der Gleichung (10a)

werden aber dadurch nicht berührt, denn die Verhältnisse der Fig. 2 können immer durch eine Parallelverschiebung des einen der beiden Strahlen a und b in die Verhältnisse der Fig. 6 übergeführt werden. Daher wird der Gangunterschied, den die beiden Strahlen a und b der Fig. 6 nach ihrem Austritt aus dem Doppelkeil besitzen, ebenfalls durch die Gleichung (10a) gegeben.

Die Strahlen S_1 und S_2 treffen nun weiter auf die zweite Refraktorplatte, die in der Figur als unwesentlich ganz weggelassen ist, treten durch die Objektivlinse L und werden, da

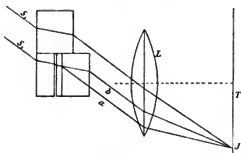


Fig. 6.

das Fernrohr unter den vorhin genannten Voraussetzungen auf unendlich eingestellt werden muß und da S_1 und S_2 einander immer noch parallel sind, in einem Punkte J der Fadenebene T vereinigt. Wichtig ist hierbei aber, daß sie sowohl vor als auch nach der Verschiebung des beweglichen Keiles in demselben Punkte J vereinigt werden. Für die Streifenverschiebung in J kommt also nur der Gangunterschied der Strahlen a und b in J , oder, da der Einfluß der Linse so gut wie ganz vernachlässigt werden kann, der durch die Gleichung (10a) ausgedrückte Gangunterschied in Betracht.

Für die Zahl der in dem Interferenzpunkt J vorüberwandernden Streifen gilt also die Gleichung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda s = e \sin \varphi \sin \zeta (N - n) \left\{ 1 + \frac{n}{2N} i^2 + \frac{N+n}{2n} \vartheta \sin \varphi \right. \\ \left. - \frac{\vartheta^2}{2} - i \vartheta \cos \eta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Läßt man die Voraussetzungen, daß die Refraktorplatten und die Platte des Kompensators absolut planparallel seien und daß auch der Doppelkeil wie eine planparallele Platte wirke, fallen, so werden die Verhältnisse sehr viel verwickelter. Man braucht aber nur den Doppelkeil durch eine besondere Einstellung möglichst zu einer planparallelen Platte zu machen: dann sind die genannten Voraussetzungen wenigstens annähernd erfüllt, und zu einer Änderung der Gleichung (10) ist kein Anlaß.¹⁾ *Die Gleichung (10) ist bereits die gesuchte Verallgemeinerung der Gleichung (1).*

Ich komme nun noch zurück auf die Frage, warum der Strahl S_2 zuerst den festen und dann den beweglichen Keil durchsetzt. Nach Gleichung (10) darf man die einfache Gleichung (1) nur dann benutzen, wenn — von anderen Bedingungen abgesehen — der Winkel i sehr klein ist. Man muß den beweglichen Keil also so einstellen, daß die Strahlen S_2 auf seine vordere Fläche senkrecht auffallen. In der Praxis fällt nun der Interferenzpunkt J mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes zusammen, unter den Strahlen S_1 und S_2 sind daher solche zusammengehörige Strahlen zu verstehen, die durch die Objektivlinse des Fernrohrs im Schnittpunkt des Fadenkreuzes vereinigt werden. Die betreffende Einstellung ist deshalb eine Fixierung des beweglichen Keiles relativ zum Fernrohr. Sie muß mit dem Gauss'schen Okular geschehen, und hierbei ist es ohne Zweifel das beste, die Fläche, auf die es ankommt, d. h. die vordere Fläche des beweglichen Keils, dem Fernrohr selbst möglichst zu nähern, wie es durch die Anordnung der Fig. 6 geschehen ist.

Bei der praktischen Verwendung des Kompensators nimmt ein Glastrog die zu untersuchenden Flüssigkeiten auf. Es genügt wohl, darauf hingewiesen zu haben, daß dieser Trog schwach prismatisch sein darf, ohne daß dies auf die Schärfe der Streifen oder auf die Genauigkeit der Messungen einen Einfluß hätte.

Es handelt sich jetzt darum, die Grenzen festzustellen, innerhalb deren mit der Gleichung (1) gerechnet werden darf.

1) Genaueres findet man in meiner Dissertation p. 19—27.

Denn selbstverständlich ist es durch keine Einstellungsmethode möglich, i und ϑ vollkommen gleich Null und ζ vollkommen gleich 90° zu machen, wodurch freilich (10) sofort in (1) überginge. Von einer Einstellung des Winkels ζ habe ich sogar ganz abgesehen, da der Proportionalitätsfaktor $\sin \varphi \sin \zeta / \lambda$, auf den auch noch die Mängel der Mikrometerschraube einwirken¹⁾, viel besser durch einen Eichversuch eliminiert wird.

Im folgenden soll also untersucht werden, wie der aus den Beobachtungen abgeleitete Brechungsexponent der zu untersuchenden Flüssigkeit durch unvollkommene Einstellung der Winkel i und ϑ beeinflusst wird. Dabei setze ich voraus, daß der Brechungsexponent des Keiles (etwa durch eine besondere Eichung) bereits bestimmt ist, daß also nur der Proportionalitätsfaktor der Gleichung (10) durch einen Eichversuch eliminiert werden muß. Die Einstellung sei beim Eichversuch und beim Hauptversuch dieselbe. Ich charakterisiere die Eichflüssigkeit durch den Index 1, die Größen, die sich auf die zu untersuchende Flüssigkeit beziehen, lasse ich ohne Index. Die in der letzten Klammer der Gleichung (10) hinter der Eins folgenden sehr kleinen Größen sollen durch α und α_1 abgekürzt werden; die Länge $\lambda / (\sin \varphi \sin \zeta)$ sei gleich L und der Quotient $s/e = q$.

Dann sind die Ausgangsgleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} Lq(1 - \alpha) = N - n, \\ Lq_1(1 - \alpha_1) = N - n_1. \end{cases}$$

Durch Elimination von L kann hieraus n berechnet werden. Es ist:

$$q_1(1 - \alpha_1)n = q(1 - \alpha)n_1 - \{q(1 - \alpha) - q_1(1 - \alpha_1)\}N$$

und

$$\begin{aligned} n &= \frac{q n_1 - (q - q_1)N}{q_1(1 - \alpha_1)} \\ &= \frac{\alpha q n_1 - (\alpha q - \alpha_1 q_1)N}{q_1(1 - \alpha_1)}. \end{aligned}$$

Näherungsweise kann man nun setzen:

$$\frac{1}{1 - \alpha_1} = 1 + \alpha_1.$$

1) Vgl. p. 393.

Bezeichnet man daher den Wert, den man für n erhält, wenn man i und ϑ vernachlässigt, mit $|n|$, also

$$(12) \quad |n| = \frac{q n_1 - (q - q_1) N}{q_1},$$

so ergibt sich leicht:

$$(n - |n|) q_1 = (\alpha - \alpha_1) (N - n_1) q.$$

Nach (10) ist nun:

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{n - n_1}{2} \left\{ \frac{i^2}{N} - \frac{N}{n n_1} \vartheta \sin \varphi \right\},$$

aus den Gleichungen (11), in denen man jetzt die α vernachlässigen kann, folgt außerdem:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N - n}{N - n_1},$$

und man erhält daher schließlich:

$$(13) \quad n - |n| = \frac{(N - n)(n - n_1)}{2} \left\{ \frac{i^2}{N} - \frac{N}{n n_1} \vartheta \sin \varphi \right\}.$$

Diese Gleichung entscheidet die Frage, wie klein man die Winkel i und ϑ zu machen hat, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen. Ich wähle die später auszuführende Messung der Brechungsexponenten von Kochsalzlösungen als Beispiel. Hier ist $n_1 = 1,333$; n sei gleich 1,360; $\sin \varphi$ ist bei meinen Keilen ungefähr gleich 0,0874; $N = 1,519$. Man findet:

$$n - |n| = 2,15 \cdot 10^{-3} \cdot \{0,66 i^2 - 0,073 \vartheta\}.$$

Ist also i z. B. gleich 10^{-2} , so bewirkt dies im Resultat einen einseitigen Fehler von $1,4 \cdot 10^{-7}$; ist $\vartheta = 10^{-2}$, so ist der Fehler gleich $1,6 \cdot 10^{-6}$.

Den Brechungsexponenten des Keiles N bestimmt man am besten durch eine besondere Eichung. Kennzeichnet man die hierzu nötigen beiden Eichflüssigkeiten durch die Indizes 1 und 2, so ergeben sich die beiden folgenden Formeln, die ganz ähnlich wie (12) und (13) abgeleitet werden:

$$(14) \quad |N| = \frac{q_1 n_2 - q_2 n_1}{q_1 - q_2},$$

$$(15) \quad |N| - N = \frac{(N - n_1)(N - n_2)}{2} \left\{ \frac{i^2}{N} - \frac{N}{n_1 n_2} \vartheta \sin q \right\}.$$

Bestimmt man z. B. mit dem oben gewählten Wert n_1 und mit $n_2 = 1,378$ den Brechungsexponenten des Keiles, so ergibt $i = 10^{-2}$ einen Fehler in N von $8,6 \cdot 10^{-7}$, $\vartheta = 10^{-2}$ dagegen einen Fehler von $9,5 \cdot 10^{-6}$.¹⁾

Selbst wenn man also i und ϑ nur auf $1/100$ (etwa $34'$) verkleinert, bleiben die einseitigen Fehler im Resultat jedenfalls unter einer Einheit der fünften Dezimale.

Das Einstellungsverfahren und die erreichbare Verkleinerung der Winkel kann erst nach der ausführlichen Beschreibung des Apparates besprochen werden.

Die Gleichungen (12) und (14) sind die Formeln, nach denen die Versuche auszurechnen sind. Man beachte, daß man in ihnen die Quotienten q , deren zugehörige Brechungsexponenten größer als N sind, mit dem negativen Vorzeichen zu versehen hat, und daß man auch alle Brechungsexponenten um denselben Betrag, z. B. um eins, verringern kann, ohne daß die Formeln unrichtig werden, was für die praktische Durchführung der Rechnungen von Bedeutung ist.

II. Beschreibung des Apparats.

Der Kompensator, mit dem ich einige Versuche ausgeführt habe, besteht im wesentlichen aus den Glasteilen G (Fig. 7), der Fassung F , der Parallelverschiebung V und dem Winkelstück W und wird auf einem Träger T an der Wand des Zimmers so hoch über dem Arbeitstisch befestigt, daß die Glasteile und die Platten des aufzustellenden Interferentialrefraktors in der gleichen Höhe sind.

1) Man kann auch bei jeder Messung N und L durch zwei Eichflüssigkeiten eliminieren, sodaß die Einstellung während dreier Verschiebungen dieselbe bleibt. Dann ist der Einfluß von i und ϑ noch geringer; die betreffenden Formeln sind in der Dissertation p. 28–30 abgeleitet.

Die Glasteile wurden von Steinheil in München aus Crown-glas hergestellt. Die beiden abgestumpften Keile, deren Keilwinkel etwa 5° beträgt, bilden, wenn sie übereinander geschoben sind, eine Platte, die nicht ganz 3 cm hoch, 1 cm breit und ebenso lang ist. Ungefähr dieselben Dimensionen hat die in den Weg des anderen Strahlenbündels zu bringende planparallele Platte.

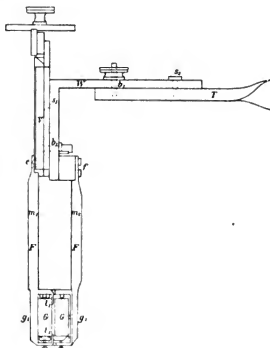


Fig. 7.

Der eine der beiden Keile, der feste, wurde in der Steinheilschen Anstalt an der eben genannten Planplatte so festgekittet, daß seine äußere (von dem beweglichen Keil abgewandte) Fläche möglichst genau mit der entsprechenden Fläche der Planplatte übereinstimmte (vgl. Fig. 17, p. 382). Zu diesem Zwecke wurden der Keil und die Planplatte beim Kitten auf eine ebene Glasfläche aufgelegt. Es

wurde ein Wasserglasasbestkitt verwendet, der sich wenigstens in kalten wässrigen Lösungen recht gut bewährte.¹⁾

Zum Verschieben des beweglichen Keils benutzte ich ein schon öfters gebrauchtes Objektschraubenmikrometer von Zeiss.²⁾

Fig. 8 zeigt in Seitenansicht die Führung des Mikrometers. Auf ihr wird bei m die Mutter M der Mikrometerschraube S (Fig. 9) befestigt. Diese gestattet bei einer Ganghöhe von 0,2 mm eine Gesamtverschiebung des Schlittens von 10 mm. Die ganzen Umdrehungen der Schraube werden an einem Zeigerwerk z , die Hundertstel an der Trommel t abgelesen.

Die Schlittenführung ist auf dem einen Schenkel des aus Rotguß hergestellten Winkelstücks W (Fig. 7) durch eine Schraube s_1 und einen Schraubbolzen b_1 mit Mutter befestigt. Der Bolzen geht, wie es in Fig. 8 angedeutet ist, durch einen Schlitz des Winkelstücks; hierdurch sind Drehungen um die Schraube s_1 möglich, und man kann den Winkel zwischen den Seitenkanten der Parallelverschiebung und denen des Winkelstücks annähernd gleich dem Keilwinkel φ machen. Diese Stellung wurde durch eine Befestigungsschraube ein für allemal fixiert.

Der andere Schenkel des Winkelstücks, der horizontale, ruht auf dem Träger T (Fig. 7). Dieser ist ein 25 mm breites, 8 mm dickes Flacheisen, das rechtwinklig umgebogen ist und so einen längeren und einen kürzeren Schenkel bildet (vgl. den Grundriß Fig. 10). Der längere Schenkel ist an der Wand des

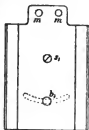


Fig. 8.

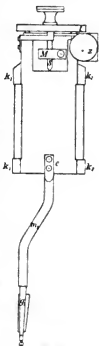


Fig. 9.

1) In Benzol beobachtete ich eine geringe Verschmutzung der Glas-teile. — Man wird übrigens die jetzt zusammengeklebten Teile in Zukunft wohl besser aus einem Stück herstellen lassen.

2) Ältere Konstruktion.

Zimmers mit starken Schrauben auf eingegipften Diebeln horizontal befestigt; der kürzere, der nun normal zu der Wand in das Zimmer hereinragt, ist umgekröpft, sodaß er die eine von seinen breiten Flächen horizontal nach oben kehrt. Auf dieser horizontalen Fläche wird das

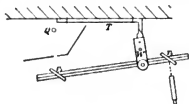


Fig. 10.

Winkelstück W befestigt, und zwar ebenfalls durch eine Schraube s_2 und einen Schraubbolzen b_2 mit Mutter und Schlitz (Fig. 7), sodaß auch hier noch kleine Drehungen um die Achse der Schraube s_2 möglich sind.

Die Glasteile sind mit der Parallelverschiebung durch die Fassung F verbunden. Auf dem Schlitten bei e und auf dem unteren Ende des Winkelstücks bei f sind durch je zwei Schrauben zwei zylindrische Messingstangen m_1 und m_2 von 7 mm Durchmesser befestigt, die an ihrem unteren Ende die für die Glasteile bestimmten Gehäuse g_1 und g_2 tragen. Die feste Stange m_2 ist entsprechend den Dimensionen der festen Glasteile durch einen Messingklotz um ein beträchtliches Stück von dem Winkelstück W abgehoben. Die bewegliche Stange ist zweimal umgebogen, sodaß ihre Achse zuletzt wieder parallel zu der einen seitlichen Kante des Schlittens k_1 und nur in geringem Abstände von deren Verlängerung läuft (vgl. Fig. 9). Die Gehäuse g_1 und g_2 sind aus Messing und umschließen die Glasteile so, daß nur die Flächen freibleiben, durch die die Strahlen hindurchgehen müssen. Kleine mit Schrauben angedrückte Federn aus Messingblech halten die Glasteile fest.¹⁾ Diese liegen nicht unmittelbar auf den Wänden der Gehäuse auf, sondern aus diesen ragen niedrige, durch kleine Messingschräubchen gebildete warzenartige Erhöhungen hervor in solcher Anzahl und Gruppierung, daß die Orientierung der gegen sie gedrückten Glasteile eindeutig bestimmt ist. Im allgemeinen wird dies durch fünf „Warzen“ erreicht. In dem beweglichen Gehäuse des von mir benutzten Apparates sind

1) Die Aufliegeflächen des beweglichen Keiles sind aus technischen Gründen etwas anders geschliffen, als es die Fig. 1 andeutet. Die linke Fläche in der Fig. 9 ist die „schiefe“.

nur drei Warzen (an der oberen Wand); hätte ich noch zwei Warzen auf den Lappen l_1 und l_2 angebracht, so wäre der Zwischenraum zwischen dem beweglichen Keil und der Planplatte zu groß geworden. Die Anordnung der Warzen ist aus den Figuren 7 und 11 (Grundriß der Gehäuse) zu ersehen.



Fig. 11.

Zur Erzeugung der Interferenzstreifen diente ein aus den Bestandteilen eines Zehnderschen Apparates¹⁾ zusammengestellter Jaminscher Interferentialrefraktor. Er stand wäh-

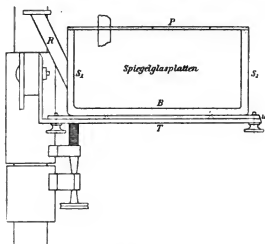


Fig. 12.

rend der Versuche frei beweglich auf einer in die Wand des Zimmers eingelassenen Marmorplatte, die als Arbeitstisch diente.

Der Trog, der die Versuchsflüssigkeiten aufnahm, ist in den Figuren 12, 13 und 14 dargestellt. Er hat zwei Spiegelglaswände, die er beim Gebrauch den beiden Refraktorplatten zukehrt (vgl. Fig. 12); die beiden anderen Seitenwände S_1 und S_2 und der Boden B werden durch ein U-förmig gebogenes starkes Messingblech gebildet, damit sich etwaige Temperaturunterschiede rascher ausgleichen. Auf diesem Blech sind die Spiegelglasplatten mit Wachskolophoniumkitt, der für wässrige Lösungen genügte, aufgekittet; die Kittflächen wurden vorher möglichst eben und

1) L. Zehnder, Zeitschr. f. Instrumentenk. 11. p. 275. 1891.

einander parallel abgedreht. Der Boden des Troges ist durch kurze Schrauben mit einer Unterlegeplatte u verbunden; durch diese wird die Befestigung des Troges wesentlich erleichtert.

In dem einen seitlichen Schenkel S_1 des Messingblechs ist zum bequemen Einfüllen der Flüssigkeiten eine Röhre R hart eingelötet; sie ist so weit, daß man durch sie eine Pipette bis auf den Boden des Troges einführen kann; ihre obere Öffnung bildet eine horizontale, eben abgedrehte Ringfläche.

Um die freie Oberfläche zu verkleinern, überdeckt man den Trog oben zunächst mit einer Verschußplatte P aus Messing. Diese ragt ein beträchtliches Stück über die beiden Spiegelglasplatten hervor (vgl. Fig. 13), sie hat zwei Ausschnitte, einen runden für das Thermometer, und einen rechteckigen für

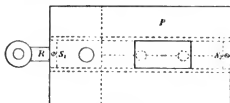


Fig. 13.

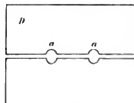


Fig. 14.

den Kompensator, und wird durch zwei kleine Schrauben auf S_1 und S_2 festgehalten. Die Fugen zwischen dieser Verschußplatte und dem eigentlichen Troge sind mit Kitt ausgegossen.

Der rechteckige Ausschnitt in der Verschußplatte ist so groß, daß der Kompensator — durch Emporschrauben des Troges — mit geringem Spielraum eingeführt werden kann. Zum Heben und Senken des Troges bediente ich mich eines alten Fernrohrstativs (Fig. 12), auf dem eine Hülse durch eine Schraube vertikal auf und ab bewegt werden kann. An der Hülse ist ein kleines Tischchen T angebracht und auf diesem die Unterlegeplatte des Troges festgeschraubt.

Zu dem Trog gehört außerdem noch der zweiteilige Deckel D (Fig. 14; in Fig. 13 punktiert), der das Verdunsten der Flüssigkeiten möglichst beschränken soll. Er wird auf die Verschußplatte aufgelegt, wenn der Trog durch die Schraube des Stativs so weit emporgehoben ist, daß sich der Kompensator ganz in der Flüssigkeit befindet. Wenn nun noch die

obere Öffnung der Einfüllröhre mit einer Glasplatte bedeckt wird, so ist der Trog bis auf wenige ganz schmale Fugen völlig abgeschlossen, da die kreisförmigen Ansschnitte aa den Messingstangen der Fassung genau angepaßt sind. Die sehr geringe Verdunstung, die immer noch stattfindet, kommt um so weniger in Betracht, als der Trog eine recht bedeutende Flüssigkeitsmenge faßt.

Sämtliche Messingteile sind schwarz gebrannt.

Daß die Parallelverschiebung V und das Winkelstück W sofort nach der Herstellung fest miteinander zu verbinden sind, wurde schon bemerkt. Dasselbe gilt von der Parallelverschiebung und der Fassung. Dagegen bedarf nach den Ergebnissen des ersten Abschnitts die Einlagerung der Glasteile in die Gehäuse besonderer Vorbereitungen, die im folgenden Abschnitt, der überhaupt von dem Einstellungsverfahren handelt, besprochen werden sollen.

III. Das Einstellungsverfahren.

Zur Einstellung des Kompensators muß das Beobachtungsfernrohr des Interferentialrefraktors mit einem Gauss'schen Okular versehen werden. Die Einstellungen auf Kleinheit des Winkels ϑ und auf Planparallelismus des Doppelkeils, die auf eine bestimmte Lagerung der Glasteile in den Gehäusen hinauslaufen, werden ein für allemal (schon vom Mechaniker) ausgeführt; der Winkel i dagegen muß jedesmal vor der Benutzung des Apparats verkleinert werden, weil diese Einstellung ja eine Fixierung des Interferentialrefraktors relativ zum Kompensator ist.

Zur Verkleinerung des Winkels ϑ löst man die Befestigungsschrauben der Schraubenmutter M und zieht den Schlitten nach oben aus der Führung heraus (vgl. Fig. 9). Das Gehäuse des beweglichen Keils ist so weit von dem Schlitten entfernt, daß es der Herausnahme des Schlittens kein Hindernis in den Weg setzt. Dann wird der Schlitten mit der Kante k_1 auf eine möglichst ebene Fläche¹⁾ aufgesetzt. Infolge der doppelten Biegung der zugehörigen

1) Als solche benutzte ich in Ermangelung einer hinreichend großen anderen die Wange einer Drehbank, die sich als eben genug erwies.

Messingstange schwebt jetzt der bewegliche Keil so weit über der ebenen Fläche, daß man noch eine planparallele Platte unterlegen kann. Nun bringt man das Fernrohr mit dem beleuchteten Fadenkreuz über den Keil und sucht die beiden Fadenkreuzbilder, die von den Reflexionen an der unteren (schiefen) Keilfläche und an den beiden Flächen der untergelegten planparallelen Platte herrühren, durch Veränderung der Lage des Keils in seinem Gehäuse zur Deckung zu bringen. Man feilt zu diesem Zwecke an den Warzen des Gehäuses so lange ab, bis die schiefe Fläche des Keils der untergelegten Planplatte und damit der ebenen Fläche parallel ist.¹⁾

Nun kann man die sehr scharfe Kante k_1 des Schlittens, der an den Seiten abgeschrägt ist, bei der geringen Genauigkeit, die für die Einstellungen verlangt wird, als mit der Verschiebungsrichtung zusammenfallend ansehen; man erreicht also durch das Verfahren, daß die schiefe Keilfläche eine der Verschiebungsrichtung parallele Gerade enthält, d. h. daß ϑ verschwindend klein ist.

Über die Genauigkeit, die dabei zu erreichen ist, gibt Fig. 15 einen Anhalt. M sei der Fadenkreuzmittelpunkt, L die

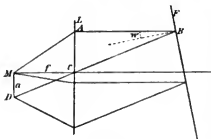


Fig. 15.

auf unendlich eingestellte Objektivlinse, F die reflektierende Fläche, die aus der zur Fernrohrachse senkrechten Stellung um den Winkel w gedreht sein soll. Man greift dann an den Strahlen, die von M ausgehen und sich im Bilde von M , nämlich in D , wieder vereinigen, den Strahl $M A B C D$ heraus, der durch den optischen Mittelpunkt C geht. Die Figur ergibt dann ohne weiteres, wenn $M D$ mit a und die Brennweite $M C$ mit f bezeichnet wird:

$$\operatorname{tg} 2 w = \frac{a}{f}.$$

1) Selbstverständlich kann dies immer nur für eine einzige, übrigens ganz beliebige Stellung des um k_1 als Achse drehbaren Schlittens erreicht werden.

Durch Abschätzen von a und annähernde Bestimmung von f habe ich gefunden, daß man ω leicht bis auf $1/20^\circ$ verkleinern kann, während nach p. 371 nur eine Verkleinerung auf etwa $1/2^\circ$ nötig ist.

Zur Einstellung auf Planparallelismus des Doppelkeils wird der Schlitten wieder in seine Führung eingeschoben.

Dann bringt man das Fernrohr mit dem beleuchteten Fadenkreuz wieder über den Doppelkeil und sucht, wie es Fig. 16 zeigt, erstens die von den beiden schiefen Flächen und zweitens die von den beiden äußeren Flächen reflektierten Fadenkreuzbilder zur Deckung zu bringen. Man feilt nun natürlich nur noch an den Warzen des festen Gehäuses, um die \mathcal{A} -Einstellung

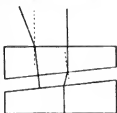


Fig. 16.

nicht zu verderben. Daß man durch dieses Verfahren den Doppelkeil sozusagen zu einer planparallelen Platte machen kann, und daß dazu nicht etwa schon die eine der beiden Reflexionsbeobachtungen genügt, das bedarf wohl keines näheren Beweises.

Übrigens braucht man im allgemeinen nicht mit homogenem Licht einzustellen, da etwaige farbige Ränder auf die Genauigkeit kaum von Einfluß sein können.

Die Methode des Abfeilens ist in den Grenzen der verlangten Genauigkeit durchaus zuverlässig. Die Glasteile meines Apparates, die schon sehr bald nach Beginn der vorliegenden Arbeit bestellt wurden, haben leider, wie aus ihren im vorigen Abschnitt mitgeteilten Dimensionen hervorgeht, nur sehr kleine Aufliegeflächen, sodaß ich z. B. bei dem beweglichen Keil ein besonderes keilförmiges kleines Blech unter die Feder legen mußte, um nur zu erreichen, daß der Keil wirklich auf seinen Warzen aufsaß. Tat er dies aber einmal, so folgten die Glasteile sehr zuverlässig den Abfeilungen der Warzen. Bei großen Aufliegeflächen, die ja in jeder Beziehung nur vorteilhaft sein können, werden diese Einstellungen ohne Zweifel nicht nur sicher, sondern auch bequem sein.

Auf senkrechten Einfall muß, wie schon bemerkt, beim einzelnen Versuch eingestellt werden. Um Wiederholungen zu vermeiden, bespreche ich jetzt auch schon die anderen Manipulationen, die den Versuchen voranzugehen haben.

Zuerst wird das Winkelstück auf dem Träger befestigt. Durch dazwischen gelegte Blechstreifen sucht man dabei eine ungefähr vertikale Stellung der äußeren unbedeckten Glasteilstflächen zu erreichen. Die Drehbarkeit des Winkelstücks um s_2 (Fig. 7) kann man dazu benutzen, für die Aufstellung der Lichtquelle Q und von Schutzschirmen zwischen dem Refraktor und der Wand Platz zu gewinnen (vgl. Fig. 10).

Man sucht nun zunächst mit zwischengeschaltetem Kompensator deutliche Streifen zu erhalten, die sich bei der Bewegung des Keiles verschieben, und richtet das Fernrohr darauf. In der dadurch gegebenen Lage wird die Fernrohrhülse so fest wie möglich angeschraubt; das Fernrohr darf von nun an nur noch in der Richtung seiner Achse verschoben werden.

Nun stellt man auf senkrechten Einfall ein. Man setzt zu diesem Zwecke auf die Schiene des Refraktors irgend eine Vorrichtung¹⁾ auf, die ungefähr in der Höhe der Refraktorplatten einen scharf markierten Punkt, etwa den Schnittpunkt eines Kreuzes, trägt. Man verschiebt diesen Hilfspunkt, bis er sich im Fernrohr mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes deckt, zieht das Fernrohr aus seiner Hülse und läßt nun durch Verschieben des ganzen Refraktors auf dem Arbeitstisch und durch Verstellen der Fußschrauben des Refraktors das glänzende Bild des stark beleuchteten Auges mit dem Hilfspunkt, den man immer im Mittelpunkt der Hülse sehen muß, zusammenfallen. Steckt man nun das Fernrohr mit dem Gaußschen Okular wieder in seine Hülse, so hat man meistens das zweimal an der Refraktorplatte r_2 (Fig. 10) und einmal an den Glasteilen des Kompensators reflektierte Bild des Fadenkreuzes schon im Gesichtsfelde, und die feinere Einstellung ist leicht. Bei der Verschiebung des ganzen Refraktors muß natürlich der Kompensator in der Bahn der interferierenden Strahlenbündel bleiben, was einige Aufmerksamkeit erfordert.

Darauf wird der Trog in die Anordnung eingefügt. Er wird sorgfältig gereinigt, auf dem Tischchen des Stativs be-

1) Z. B. ein Stück Holz, unten mit einer geeigneten Aussparung für die Schiene, oben mit einem Einschnitt zum Einklemmen eines Stückes Papier.

festigt, unter den Kompensator gebracht und vorsichtig emporgeschraubt. Man stellt nun die vordere Spiegelglasplatte des Trogs, ähnlich wie vorhin die Glasteile des Kompensators, senkrecht zu den in Betracht kommenden Strahlen. Denn unterließe man dies, so könnte man auch die senkrechte Inzidenz an den Glasteilen nicht mehr verbürgen. Das Auffinden des Bildes wird hier übrigens meist ohne besondere Hilfsmittel gelingen.

Danach wird vorsichtig von der Seite her der Deckel aufgeschoben und die zu untersuchende Flüssigkeit, nötigenfalls nachdem man vorgespült hat, in den Trog gebracht. Die Einfüllröhre wird mit einer kleinen Glasplatte bedeckt.

Arbeitet man wie gewöhnlich mit nicht ganz homogenem Licht, so sind die Streifen nicht überall gleich scharf; an Stellen, die um gleiche Streifenzahlen voneinander entfernt sind, verschwinden sie ganz. Man wird daher vor den Versuchen durch Verstellen der Refraktorplatte r_1 (Fig. 10) dafür sorgen, daß man, wenn das überhaupt möglich ist, die ganze Verschiebungslänge und zwar mit möglichst schönen Streifen benutzen kann.

Während der Versuche läßt man nach den Ergebnissen der Theorie am besten alle Einstellungen unverändert.

IV. Einfluß der Temperatur und Anordnung der Beobachtungen.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Temperatur sowohl bei jeder einzelnen Verschiebung, als auch bei jeder zusammengehörigen Gruppe von Eich- und Hauptversuchen immer dieselbe sei. In Wirklichkeit sind diese beiden Voraussetzungen nur schwer zu erfüllen, und es fragt sich, ob sie überhaupt wesentlich sind.

Zunächst ist ohne weiteres klar, daß die Eich- und Hauptversuche bei verschiedenen Temperaturen angestellt werden dürfen, wenn nur in dem betreffenden Temperaturintervall N und die Ganghöhe der Schraube als konstant angesehen werden können. Selbstverständlich müssen in den Formeln (12) und (14) immer die den betreffenden Versuchstemperaturen entsprechenden Eichexponenten eingesetzt werden, und man

erhält dann ohne weitere Umrechnungen den Brechungs-exponenten der zu untersuchenden Flüssigkeit für die Temperatur des Hauptversuchs.

Eingehender muß die Frage behandelt werden, welchen Einfluß Inkonzanz der Temperatur während der einzelnen Verschiebung hat.

Ich verallgemeinere zuerst die Gleichung (1) für den Fall, daß der Brechungs-exponent des äußeren Mediums infolge von Temperaturänderungen beim Einstellen des ersten Streifens (Trommelablesung u_1) den Wert n_1 , beim Einstellen des letzten Streifens (Trommelablesung u_r) den Wert n_r hat. n_1 und n_r sollen so wenig voneinander verschieden sein, daß der Brechungs-exponent durchweg als rein lineare Funktion der Temperatur angenommen werden darf. Die Änderung von N mit der Temperatur sei überhaupt zu vernachlässigen.

In Fig. 17 sind die Glasteile des Kompensators im Grundriß dargestellt. Der den Doppelkeil durchsetzende Strahl ist durch die Ziffer 1, der die planparallele Platte durchsetzende durch die Ziffer 2 gekennzeichnet. Das schraffierte Feld entspricht der (stark übertriebenen) Gesamtdickenänderung des Doppelkeils d und der Schraubenverschiebung $u_r - u_1$. Ich verstehe nun unter der „symmetrischen Stellung“ des beweglichen Keils die Stellung, bei der der Doppelkeil und

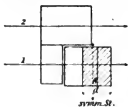


Fig. 17.

die planparallele Platte, die beide aus demselben Material bestehen, gleich dick sind, unter der „Mittelstellung“ des beweglichen Keils dagegen die Stellung, zu der die Trommelablesung $(u_1 + u_r)/2$ gehört. Die Differenz der Dicken, die der Doppelkeil in diesen beiden Stellungen hat, soll mit δ bezeichnet werden. δ sei positiv, wenn in der Mittelstellung der Doppelkeil dicker ist als die planparallele Platte (wie in Fig. 17).

Wird nun zunächst der Doppelkeil bei der Verschiebung dicker — eine solche Verschiebung werde eine „positive“ genannt —, so ist der Gangunterschied, den die Strahlen 1 und 2 durch den Kompensator gegeneinander erhalten, *vor* der Verschiebung $(n_1 - N)(d/2 - \delta)$, *nach* der Verschiebung

$(N - n_r)(d/2 + \delta)$, und die der Verschiebung entsprechende Streifenzahl ist durch

$$(16) \quad \lambda s = \left\{ N - \frac{n_1 + n_r}{2} \right\} d + \delta(n_1 - n_r)$$

gegeben. Verschiebt man dagegen bei derselben Temperaturänderung im entgegengesetzten Sinne (so, daß der Doppelkeil dünner wird, „negative Verschiebung“), so ist die zu dieser Verschiebung gehörende Streifenzahl s' als positive Zahl gleich dem folgenden Ausdruck:

$$(17) \quad \lambda s' = \left\{ N - \frac{n_1 + n_r}{2} \right\} d - \delta(n_1 - n_r).$$

Eine Verschiebung zwischen den Temperaturen t_1 und t_r ist daher einer Verschiebung bei der konstanten Temperatur $(t_1 + t_r)/2$ gleichwertig, vorausgesetzt, daß $\delta = 0$, d. h. der Kompensator symmetrisch gebaut ist.¹⁾

Ist δ stark von Null verschieden, so bringt man am besten eine „Asymmetriekorrektur“ an. Man bestimmt zu diesem Zwecke zunächst die Asymmetrie δ durch einen Hilfsversuch. Man entfernt den Kompensator aus dem Wege der Lichtstrahlen und stellt mit weißem Licht den Refraktor so ein, daß der achromatische Streifen im Fernrohr mit dem Fadenkreuz zusammenfällt. Dann bringt man den Kompensator zwischen die Refraktorplatten und verschiebt den beweglichen Keil, bis der Schnittpunkt der Fäden wieder auf dem achromatischen Streifen liegt. Dann wirkt der Kompensator wie eine planparallele Platte, ist also in der symmetrischen Stellung. Mit Hilfe des Schraubenwertes und der Größen L und $(u_1 + u_r)/2$ erhält man hieraus δ mit einer für die Korrektur hinreichenden Genauigkeit in Millimetern.²⁾

Nach (16) ist nun also bei positiver Verschiebung $\delta \cdot (n_1 - n_r)/\lambda$ von s abziehen. Aus praktischen Gründen aber, die später hervortreten werden, bringt man die Korrektur nicht an der Streifenzahl s , sondern an der Ver-

1) Man hätte dieses Resultat natürlich auch ohne Rechnung durch einfache Überlegung finden können.

2) Auf ähnliche Weise bestimmte Billet (vgl. die Einleitung) den Nullpunkt seiner Kompensatorskala.

schiebung $e = d/\sin \varphi$ an. Die korrigierte Verschiebung $|e|$ soll ja der einfacheren Gleichung genügen:

$$s = \frac{|e|}{L} \left\{ N - \frac{n_1 + n_2}{2} \right\},$$

und hieraus und aus (16) folgt:

$$(18) \quad |e| = e \left\{ 1 + \frac{\delta(n_1 - n_2)}{\lambda s} \right\}.$$

Die Korrektur ist demnach zu addieren, wenn δ und die Verschiebung positiv sind und der Brechungsexponent der Flüssigkeit während des Versuchs abnimmt. Sie ist übrigens in den meisten Fällen verschwindend klein.

Noch um vieles geringer ist der direkte Einfluß von Temperaturschwankungen auf andere Teile des Strahlenganges. So hängt z. B. der durch den Refraktor selbst bewirkte Gangunterschied von den Brechungsexponenten der Refraktorplatten und damit von der Temperatur ab. Ferner lenkt ein schwach prismatischer Trog bei verschiedenen Temperaturen verschieden stark ab. Beide Einflüsse können aber, wie man sich leicht überzeugt, auch bei den höchsten Anforderungen an die Genauigkeit der Messungen vernachlässigt werden. Ebenso steht es mit einer Längenänderung der Mikrometerschraube.

Viel wichtiger sind die völlig unkontrollierbaren Fehler, die von Erwärmung einzelner Apparateile und von Strömungen in der Trogflüssigkeit herrühren. Man hilft sich durch Schirme und durch Abschließen des Troges. *Vollständig* ruhig stehende Streifen wird man wohl nie erreichen; da die durch das Wackeln der Streifen veranlaßten Fehler aber zufällige sind, können sie durch geeignete Anordnung und Häufung der Versuche unschädlich gemacht werden.

Über diese Anordnung der Versuche muß nun noch einiges gesagt werden. Es wäre sehr unpraktisch, nur durch *zwei* Einstellungen u_1 und u_2 eine gewisse Verschiebung e und durch Abzählen die dazugehörige Streifenzahl s zu bestimmen. Denn s kann ungefähr gleich 300 sein, und Irrtümer wären unvermeidlich. Man mißt daher besser nur einmal im Anfang durch direktes Abzählen die zu einer bestimmten kleinen Streifenzahl σ gehörende Verschiebung e_σ und benutzt dann die Ablesevorrichtungen der Schraube selbst zum Streifenzählen, in-

dem man immer annähernd um e_s weiterschraubt und dann auf den nächsten (hellen) Streifen eindreht. σ ist natürlich so zu wählen, daß niemals ein Zweifel bestehen kann, auf welchen Streifen einzustellen ist. σ kann um so größer genommen werden, je genauer man $q = \sigma/e_s$ bereits kennt. Hat man auf diese Weise ν Einstellungen gemacht, so sind von der ersten bis zur ν^{ten} Einstellung $s = (\nu - 1)\sigma$ Streifen vorbeigewandert.

Bei genauen Messungen notiert man alle Einstellungen und berechnet dann $\sigma/q = e_s$ nach der bekannten Formel¹⁾:

$$(19) \quad e_s = 6 \frac{(\nu-1)(u_\nu - u_1) + (\nu-3)(u_{\nu-1} - u_2) + (\nu-5)(u_{\nu-2} - u_3) + \dots}{\nu(\nu-1)},$$

Die Asymmetriekorrektion wird auch jetzt noch durch Gleichung (18) gegeben, in der nur die Größen $|e|$ und e durch die anderen $|e_s|$ und e_s zu ersetzen sind. Denn man darf annehmen, daß der Quotient $(n_1 - n_\nu)/s$ für alle in (19) vorkommenden Einstellungsdifferenzen denselben Wert hat, daß sich die Temperatur also von einer Einstellung zur anderen immer um gleiche Beträge ändert.

(19) und (18) sind also die Formeln für die Berechnung; sie liefern e_s für die Mitteltemperatur aus allen Einstellungstemperaturen.

V. Messungen.

Ich habe zur Prüfung des Kompensators auf seine Genauigkeit Versuche mit destilliertem Wasser und zwei Kochsalzlösungen von verschiedener Konzentration angestellt. Die eine etwa 25prozentige Lösung, deren Brechnngsexponenten ich einer Arbeit von Schütt²⁾ entnahm, diente mir nach Gleichung (14) zur Bestimmung des Brechnngsexponenten der Keile; den Brechnngsexponenten der anderen, etwa 15prozentigen, suchte ich nach Gleichung (12) zu messen. Der Proportionalitätsfaktor L wurde in beiden Fällen durch Beobachtungen mit Wasser eliminiert.

Zu den Kochsalzlösungen wurde „Chlornatrium reinst geschmolzen“ aus der chemischen Fabrik von E. Merck in Darmstadt verwendet. Unter dem Gehalt p verstehe ich die

1) Über deren Zulässigkeit vgl. die Dissertation p. 47.

2) F. Schütt, Zeitschr. f. phys. Chem. 5. p. 349. 1890.

Menge Salz, die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthalten ist. p war

für die „15proz.“ Lösung	15,0155
„ „ „25proz.“ „	25,0042

Die Wägungen wurden natürlich auf den luftleeren Raum reduziert; die dritte Dezimale ist sicher richtig. Auch die Fehler des Gewichtssatzes wurden bestimmt; ihr Einfluß war aber so gering, daß man sie auch ebensogut hätte unberücksichtigt lassen können.

Der Keil wurde immer zuerst dreimal in der betreffenden Lösung und dann ebenso oft in destilliertem Wasser verschoben. Im folgenden ist eine solche Gruppe von sechs „Verschiebungen“ als ein „Versuch“ bezeichnet. Zu Beginn jedes Versuches wurde der mit destilliertem Wasser gereinigte Trog mit reinem Filtrierpapier möglichst trocken getupft, auf dem Stativ befestigt und emporgeschraubt, sodaß er die Gehäuse des Kompensators umschloß. Nach der Einstellung auf senkrechten Einfall wurde er zunächst ein- bis zweimal bis zu seinem oberen Rande mit der zu untersuchenden Lösung¹⁾ vorgespült und dann bei angelegtem Deckel definitiv, und zwar nun nicht ganz bis zum oberen Rande, gefüllt. Die Lösungen wurden mit einer getrockneten Pipette nach tüchtigem Schütteln unmittelbar den Flaschen entnommen, in denen sie angesetzt waren. Während nun die Flüssigkeit die Temperatur ihrer neuen Umgebung annahm, stellte ich auf scharfe Streifen ohne Parallaxe gegen das Fadenkreuz ein. Nach 10–15 Minuten konnte ich gewöhnlich mit den Verschiebungen beginnen, ohne allzu starke Inkonzanz der Temperatur befürchten zu müssen. Der Ersatz der Lösung durch Wasser nach den ersten drei Verschiebungen geschah durch die Einfüllröhre; es wurde dabei mindestens fünfmal vorgespült und darauf geachtet, daß sich dadurch an den verschiedenen Einstellungen nichts änderte.

Die Temperatur wurde mit einer Lupe an einem in $\frac{1}{3}^{\circ}$ geteilten Thermometer abgelesen, das mit einem durchbohrten Gummistöpsel in der Verschlußplatte befestigt war. Eine Vergleichung mit einem von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeichten Normalthermometer ergab für alle in

1) Als erste Spülflüssigkeit verwandte ich meistens die sorgfältig aufbewahrte Lösung des vorhergehenden Versuchs.

Betracht kommenden Temperaturen eine Korrektur von $+0,13^\circ$. Zum Konstanthalten der Temperatur im Trog und zum Schutze des Interferentialrefraktors, der, wie schon p. 384 bemerkt, in sehr unangenehmer Weise auf Bestrahlungen reagiert, wurden sowohl vor die Lichtquelle (Na-Perle im Bunsenbrenner; Q Fig. 10) als auch vor die Ableseglühlampe Stanniolschirme oder Tröge gestellt. Deshalb hat sich bei meinen Versuchen die Temperatur auch nur einmal während einer Verschiebung um $0,14^\circ$ geändert; die durchschnittliche Änderung betrug $0,04^\circ$.

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Streifenzahl σ war der achte oder der neunte Teil der Gesamtstreifenzahl s und wurde bei jeder einzelnen Flüssigkeit so gewählt, daß möglichst die ganze Schraubenlänge ausgenützt wurde. Verschieben wurde immer in derselben und zwar immer in der „positiven“ Richtung. Es sei als Beispiel eine zu einer solchen Verschiebung gehörende Reihe von Ablesungen mitgeteilt.

Tabelle 1.

15 proz., eingefüllt $11^h 5^m$, 1. Versuch, 3. Verschiebung, $11^h 50^m$.

t	u	Δu	
19,04	17,0	614,0	$e_s = 614,05$ Trommelteilen bei $19,08^\circ$
19,06	631,0	614,1	
19,06	1245,1	613,9	$ e_s = 614,03$ Trommelteilen = 1,22806 mm
19,06	1859,0	614,3	
19,06	2473,3	614,1	$\sigma = 29$
19,08	3087,4	614,6	$q = 23,6145$ mm -1 bei $19,21^\circ$
19,08	3702,0	613,0	
19,10	4315,0	614,2	
19,12	4929,2		

In der ersten Vertikalreihe stehen die Temperaturen t , in der zweiten die Ablesungen u in Trommelteilen¹⁾ und in der dritten die Differenzen $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ etc., die immer 29 Streifen entsprechen. Darauf folgt das direkt aus den Werten der zweiten Reihe berechnete e_s der Gleichung (19) und das

1) Schraubenkorrekturen anzubringen erwies sich als unnötig.

zugehörige Mittel aus den Temperaturen. Darunter steht e_s , an dem die Asymmetriekorrektion von p. 384 angebracht ist.

Zur Bestimmung dieser Korrektion muß man nach (18) die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Temperatur kennen. Für Wasser hat Walter¹⁾ eine Interpolationsformel aufgestellt; für die Kochsalzlösungen dagegen fehlt es fast völlig an genaueren Untersuchungen. Nur in einer Arbeit von van der Willigen²⁾ habe ich einige Temperaturkoeffizienten gefunden. Da er nach einem Bericht in den „Fortschritten der Physik“³⁾ für drei Lösungen von 21,69, 22,78 und 26,58 Proz. bei der Temperatur 25,75° denselben Koeffizienten $17 \cdot 10^{-5}$ angibt, so nahm ich, bevor mir die Originalarbeit zugänglich war, diese Zahl für die 25 prozentige Lösung und für 26° an und interpolierte mir eine kleine Tabelle unter der Voraussetzung, daß sich der Koeffizient einer Lösung bei Temperaturänderungen um denselben Bruchteil seines Wertes ändere, um den sich bei derselben Temperaturänderung der Koeffizient des Wassers ändert. Ich erhielt z. B. für 25 Proz. und 18° $13 \cdot 10^{-5}$. Eine Durchsicht der Originalarbeit ergab nun aber, daß die so berechneten Werte, die ich meinen Korrekturen zu Grunde legte, wahrscheinlich zu klein sind. van der Willigen bemerkt nämlich⁴⁾, die annähernd 27 prozentige Lösung sei völlig gesättigt gewesen, es hätten manchmal sogar im Prisma noch kleine Kristalle gelegen. Da nun die Löslichkeit des Salzes mit der Temperatur wächst, so mußte mit Temperatursteigerung die Konzentration zunehmen, der Brechungsexponent konnte also nicht so stark abnehmen, als es der Temperaturerhöhung entsprach, und $17 \cdot 10^{-5}$ kann daher nur als Temperaturkoeffizient der gesättigten Lösung bezeichnet werden. Bei einem zweiten Versuch mit derselben Lösung erhielt van der Willigen denn auch bei 16,55° den Wert $19,0 \cdot 10^{-5}$; anscheinend sind ihm hierbei keine Kriställchen in das Prisma geraten. — Auch meine Versuche legen, wie nachher gezeigt werden soll, den Schluß nahe, daß der

1) B. Walter, Wied. Ann. **46**. p. 423. 1892.

2) V. S. M. van der Willigen, Arch. Mus. Teyl. **2**. p. 222. 1869.

3) V. S. M. van der Willigen, Fortschr. d. Physik **25**. p. 287. 1869.

4) p. 229 der Originalarbeit.

Temperaturkoeffizient der Lösungen größer ist. Jedenfalls aber sind derartige Ungenauigkeiten auf die Asymmetriekorrektion ohne Einfluß, da diese nie mehr als höchstens $\frac{3}{100}$ Trommelteile in e_s betrug. δ war $= -0,40$ mm, da der Keil erst in seiner 45. Umdrehung in seiner symmetrischen Stellung war.¹⁾

In der Tab. 1 ist nun weiter e_s in Millimetern ausgedrückt (genau genommen in einer Einheit, die gleich dem fünffachen Schraubenwerte ist) und dann die Größe $q = \sigma/e_s$, auf die es ankommt, berechnet. An der zugehörigen Temperatur ist nun auch die vorhin mitgeteilte Korrektion (+ 0,13°) angebracht.

In den beiden folgenden Tabellen sind die sämtlichen so erhaltenen Größen q^2) mit ihren Temperaturen t angeführt. Unter „Nr.“ stehen die Nummern der Verschiebungen.

Tabelle 2.

Versuche mit 25 proz. Lösung und destilliertem Wasser.

	Nr.	25 proz		H ₂ O	
		q	t	q	t
1. Versuch	1	20,8963	19,46°	27,5138	18,64°
	2	20,8936	19,27	27,5138	18,59
	3	20,8913	19,22	27,5144	18,61
2. Versuch	4	20,8762	18,53	27,5038	17,66
	5	20,8758	18,48	27,5022	17,72
	6	20,8741	18,43	27,5048	17,78
3. Versuch	7	20,8973	19,37	27,5301	19,94
	8	20,8933	19,24	27,5315	20,05
	9	20,8936	19,18	27,5335	20,09

1) Meine Vorschrift, die Planplatte und den zusammengeschobenen Doppelkeil gleich dick zu machen, war bei der Herstellung leider sehr wenig beachtet worden.

2) Es ist eine Stelle mehr mitgeteilt, als üblich, da es sich noch nicht um Resultate handelt.

Tabelle 3.

Versuche mit 15 proz. Lösung und destilliertem Wasser.

	Nr.	15 proz.		H ₂ O	
		<i>q</i>	<i>t</i>	<i>q</i>	<i>t</i>
1. Versuch	1	23,6110	19,22°	27,5305	19,72°
	2	23,6129	19,16	27,5301	19,59
	3	23,6145	19,21	27,5310	19,55
2. Versuch	4	23,6026	18,99	27,5118	18,43
	5	23,6072	18,93	27,5123	18,53
	6	23,6045	18,91	27,5138	18,58
3. Versuch	7	23,5949	18,53	27,5073	17,93
	8	23,5933	18,53	27,5083	17,96
	9	23,5983	18,50	27,5073	18,01
4. Versuch	10	23,5922	18,33	27,5043	17,73
	11	23,5903	18,33	27,5058	17,73
	12	23,5907	18,31	27,5043	17,80

Aus diesem durch die Versuche gegebenen Material wurden die Brechungsexponenten des Keils und der 15 proz. Lösung berechnet. Dabei wurden immer zwei in den obigen Tabellen in einer horizontalen Reihe stehende Werte kombiniert und für den Brechungsexponenten des Wassers die Zahlen von Walter¹⁾, für den der 25 proz. (Eich-)Lösung, wie schon erwähnt, die von Schütt verwendet. Die Schütt'schen Zahlen erforderten eine Umrechnung, da der Gehalt meiner Lösung ein etwas andrer war. Ich benutzte zu diesem Zweck eine in meiner Dissertation²⁾ abgeleitete Interpolationsformel. Es ergab sich: $n = 1,37791$ bei 18,07°, ein Wert, der wahrscheinlich um eine oder zwei Einheiten der fünften Dezimale zu klein ist.³⁾

Es ist nun klar, daß die Berechnung von N aus den Exponenten der von mir gewählten Eichflüssigkeiten nicht sehr genau werden kann. Man erkennt dies aus Formel (14),

1) l. c. p. 423.

2) p. 72, Tab. 12. — Die Dichte hatte ich nach einer von Schütt (l. c. p. 356) gegebenen Interpolationsformel berechnet.

3) Denn erstens ist die nach der Schütt'schen Formel interpolierte Dichte wahrscheinlich um etwa drei Einheiten der fünften Dezimale zu klein, und zweitens habe ich bei einer späteren genaueren Berechnung der Tab. 12 den Wert 1,37792 erhalten.

nach der N oder $N - 1$ der Quotient zweier *Differenzen* ist. Man erhielt natürlich ein viel genaueres Resultat, wenn man, statt zu extrapolieren, interpolierte, d. h. wenn N zwischen den beiden Eichbrechungsexponenten läge und demnach als Quotient zweier Summen zu berechnen wäre. Mißlich ist ferner, daß man die Eichbrechungsexponenten sehr genau kennen muß. Wie man sich leicht überzeugt, wird ein Fehler im Brechungsexponenten der Kochsalzlösung in N verdreifacht, ein Fehler im Brechungsexponenten des Wassers sogar vervierfacht.

Eben durch diese Eigentümlichkeit wurde es mir möglich, festzustellen, daß der Temperaturkoeffizient der 25 proz. Lösung bei 18° größer als $13 \cdot 10^{-5}$ sein muß. Mit diesem Wert zwischen 18° und 19° und mit $14 \cdot 10^{-5}$ zwischen 19° und 20° hatte ich nämlich die Brechungsexponenten der 25 proz. Lösung berechnet. Als ich nun die erhaltenen N -Werte als Ordinaten und die zugehörigen Temperaturen der Eichlösung als Abszissen eines Koordinatensystems auftrug, *wuchsen* die Ordinaten mit zunehmenden Abszissen, statt konstant zu bleiben, wie es dem kleinen Temperaturkoeffizienten des Glases entspricht. Dies konnte nur daher rühren, daß sich der Brechungsexponent der Eichlösung mit der Temperatur stärker ändert, als ich angenommen hatte. In der Tat erhielt ich mit $15 \cdot 10^{-5}$ bei $18,5^\circ$ und mit $16 \cdot 10^{-5}$ bei $19,5^\circ$ die unter „ N beob.“ stehenden Werte der folgenden Tab. 4, bei denen nur noch eine sehr geringe Zunahme von N mit der Temperatur der Eichlösung zu bemerken ist.

Tabelle 4.

Brechungsexponent des Keiles:
 $N = 1,518\,521 + 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 18,07^\circ)$

Temp.	Nr.	N		Diff.
		beob.	ber.	
18,43°	6	1,51852	1,51853	- 1
18,48	5	58	53	+ 5
18,53	4	48	53	- 5
19,18	9	59	55	+ 4
19,22	3	52	55	- 3
19,24	8	55	55	± 0
19,27	2	55	55	± 0
19,37	7	60	55	+ 5
19,46	1	50	55	- 5

Da nun jedenfalls einem Versuche, der ohne Benutzung eines Temperaturkoeffizienten direkt aus dem für $18,07^{\circ}$ geltenden Werte $1,37791$ herechnet wäre, die größte Wahrscheinlichkeit zukäme, so habe ich die erhaltenen Exponenten N durch eine lineare Funktion $N = a + b(t - 18,07^{\circ})$ dargestellt, wo t die zugehörige Temperatur der Eichlösung ist, und die Konstante $a = 1,51852$ als den wahrscheinlichsten Wert des Brechungsexponenten des Keils angenommen. In der Tabelle sind die aus der linearen Gleichung herechneten Werte den beobachteten gegenübergestellt. Die größte Abweichung einer Einzelmessung ist, wie man sieht, immer noch $10 \cdot 10^{-5}$; dem Werte $N = 1,51852$ ist aber jedenfalls eine größere Genauigkeit zuzusprechen.

Bei der Bestimmung des Brechungsexponenten der 15proz. Lösung aus den Exponenten des Wassers und des Keiles nach Gleichung (12) verhält es sich mit der Genauigkeit, die von den Eichexponenten verlangt wird, gerade umgekehrt. Ein Fehler im Brechungsexponenten des Wassers wirkt im Resultat kaum mit $\frac{1}{10}$ seines Wertes, ein Fehler in N gar nur mit $\frac{1}{7}$. Außerdem tritt die in q erreichte Genauigkeit im Resultat voll in Wirksamkeit.

Ich habe aus den 12 Werten der Tab. 3 die Brechungsexponenten der 15proz. Lösung berechnet. In der folgenden Tab. 5 sind sie mit den Temperaturen, für die sie gelten und die der Größe nach geordnet sind, zusammengestellt. Auch hier wurden die Resultate in einer linearen Gleichung

$$n = a + b(t - 18,07^{\circ})$$

zusammengefaßt und die beobachteten und herechneten Zahlen einander gegenübergestellt. Die Konstante $a = 1,35959$ ist der Brechungsexponent der Lösung bei $18,07^{\circ}$. Denselben Wert gibt Schütt für die Konzentration $14,9921$ an; der von mir gefundene Wert ist also zu klein, was zum Teil daraus zu erklären ist, daß ich als Brechnngsexponenten der 25proz. Lösung einen ebenfalls etwas zu kleinen Wert angenommen hatte. Die Konstante $b = 15,0 \cdot 10^{-5}$ ist der mittlere Temperaturkoeffizient für die henntzten Temperaturen.

Tabelle 5.

Brechungsexponent der 15 proz. Lösung:

$$n = 1,35959 - 15,0 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 18,07^\circ).$$

Temp.	Nr.	n		Diff.
		beob.	ber.	
18,31°	12	1,35956	1,35955	+ 1
18,33	10	54	55	- 1
18,33	11	56	55	+ 1
18,50	9	50	53	- 3
18,53	7	53	52	+ 1
18,53	8	54	52	+ 2
18,91	6	45	46	- 1
18,93	5	44	46	- 2
18,99	4	47	45	+ 2
19,16	2	42	43	- 1
19,21	3	42	42	± 0
19,22	1	43	42	+ 1

Die größte Abweichung zweier Einzelmessungen ist also hier $5 \cdot 10^{-5}$; der mittlere Fehler der Einzelmessung ist $\pm 1,7 \cdot 10^{-5}$.

Ich habe schließlich auch den Keilwinkel φ nach Gleichung (1) berechnet; er ist gleich $5^\circ 1,0'$. Genau läßt er sich nicht bestimmen, 1. weil ζ nicht gleich 90° ist, 2. weil man die Ganghöhe der Schranke und 3. weil man den Winkel zwischen der Verschiebungsrichtung und der Schrankenachse nicht kennt.

Meine Messungen führen also zu dem *Resultat*: *Der Keilkompensator von Arago kommt selbst in der von mir beschriebenen unvollkommenen, sozusagen improvisierten Ausführung, bei der die Gesamtverschiebung nur 1 cm beträgt, was seine Genauigkeit betrifft, den besten der gebräuchlichen Apparate nahe.*

Man vergleiche z. B. die oft zitierten Messungen von Schütt mit den meinigen. Schütt ist mit der ausgesprochenen Absicht an seine Arbeit herantreteten, „die Genauigkeit der Beobachtungen so weit zu treiben, als es mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln überhaupt möglich ist“. Er hat die Methode des Minimums der Ablenkung benutzt. Bei der Messung des Prismenwinkels betrug die größte Abweichung einer Einzel-

messung vom Mittelwert $\pm 4 \cdot \sqrt{11} \cdot 10^{-6} = 1,3 \cdot 10^{-5}$, bei der Messung des Ablenkungswinkels $\pm 6 \cdot \sqrt{9} \cdot 10^{-6} = 1,5 \cdot 10^{-5}$. Die größte mögliche Abweichung im Brechungsexponent war also $\pm 2,8 \cdot 10^{-5}$.¹⁾ Bei meinen Versuchen dagegen betrug die größte Abweichung der Einzelmessung $\pm 2,5 \cdot 10^{-5}$, also ungefähr ebensoviel.

Es kann nun freilich der Einwand erhoben werden, daß meine Einzelmessungen bereits aus 8—10 Einstellungen hergeleitet sind, also nicht mit denen von Schütt verglichen werden dürfen. Der Einwand ist berechtigt, es muß jedoch bemerkt werden, daß in der Formel (19) nicht alle Ablesungen mit demselben Gewicht auf das Resultat einwirken; ein aus acht oder neun Einstellungen gewonnenes e_s kommt z. B. nur etwa zwei Einzelmessungen $(u_s - u_s)/s$ gleich. Außerdem war ja nur *nahezu dieselbe* Genauigkeit beansprucht. Darüber aber kann kein Zweifel bestehen, dass *für die Genauigkeit, bis zu der man mit einem in jeder Beziehung vollendet ausgeführten Kompensator von z. B. 3 cm Gesamtverschiebung vordringen kann, nur die Genauigkeit, mit der man die Brechungsexponenten der Eichflüssigkeiten kennt, maßgebend sein wird.* Nennenswert mehr als die Genauigkeit der Eichflüssigkeiten kann man allerdings, so geeignet man diese auch wählen mag, nie erreichen.

Mit der Verlängerung der Gesamtverschiebung sind zwei Übelstände verknüpft. Der eine ist der, daß dann schon das Na-Licht nicht mehr homogen genug ist. Sobald die Streifenzahl 300 übersteigt, werden die Einstellungen unsicher. Vielleicht könnte man durch ähnliche Mittel, wie sie in neuester Zeit mit besonderem Erfolg von Lummer²⁾ angewendet worden sind, die Maxima der Streifen so verschärfen, daß diese „Schwennngen“ für die Beobachtung kein Hindernis mehr wären.

1) Davon, daß auch durch ungenaue Bestimmung der Temperatur Fehler auftreten konnten, sehe ich ab.

2) A. Perot u. Ch. Fabry, Ann. de chim. et phys. (7) 12. p. 459. 1897 und 16. p. 289. 1899; O. Lummer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 504. 1900; Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 85 u. 181. 1901; Arch. Néerl. (2) 6. p. 778. 1901; O. Lummer u. E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 10. p. 457. 1903.

Der andere Übelstand ist der, daß bei der längeren Verschiebung sehr viele Umdrehungen nötig werden. Der Gedanke liegt nahe, diese Unbequemlichkeit dadurch zu umgehen, daß man die Verschiebung nicht durch eine Mikrometerschraube mißt, sondern an einer sehr feinen Skala mit einem Mikroskop abliest. Man könnte dann durch irgend einen größeren Bewegungsmechanismus rasch die ganze Verschiebung, vielleicht mit wenigen Zwischenstationen, durchlaufen und hätte dann nur zu der genaueren Einstellung eine feinere Schraube nötig. Die Auswechslung der beiden Bewegungsmechanismen würde wohl keine besonderen technischen Schwierigkeiten machen. Der Kompensator käme dann auch an Bequemlichkeit dem Spektrometer mit seinem umständlichen Einstellungsverfahren mindestens gleich. Die Verschiebung würde jetzt direkt am Verschobenen gemessen werden; an die Stelle der Schraubenkorrekturen würden die Korrekturen der Skala und des Okularmikrometers treten.

Besonders geeignet ist der Kompenstor vermutlich für absorbierende Substanzen. Man könnte bei ihnen eine kleine kapillar angesaugte Flüssigkeitsmenge zwischen den horizontal gestellten beweglichen Keil und eine in geringem Abstand darüber befestigte Planplatte bringen. Die Genauigkeit, die bei einer gewissen Schichtdicke d erreicht werden kann, ergibt sich direkt aus (1) als

$$\Delta n = \frac{\lambda}{d} \cdot \Delta s,$$

wo λ wie immer die Wellenlänge und Δs die Genauigkeit der Streifenablesung ist. Setzt man $\Delta s = 1/10$, $d = 0,1$ mm, so ist für Na-Licht $\Delta n = 6 \cdot 10^{-4}$. Beobachtet man dagegen mit einem Prisma bis zu einer 0,1 mm dicken Schicht, die 1 mm von der Spitze entfernt sei, so ist der Prismenwinkel etwa $5,7^\circ$, und man muß auf $12''$ ablesen, um dieselbe Genauigkeit zu erhalten, was bei der Verwaschenheit der Spektrallinien in der Nähe der Absorptionsbanden schwer zu erreichen sein dürfte.

Grundsätzliche Vorzüge sind dabei vor allem zwei: erstens hat man nirgends schmale Lichtbündel, Beugungserscheinungen können also nicht auftreten¹⁾; und zweitens hat man sicher

1) Vgl. A. Kundt, Pogg. Ann. 145. p. 165. 1872.

überall dieselbe Konzentration, während bei der Prismenmethode hierüber Zweifel möglich sind.

Dieselbe Versuchsanordnung wie für absorbierende Substanzen dürfte sich auch für besonders wertvolle empfehlen, da bei ihr nur sehr wenig Flüssigkeit nötig ist.

Den Jaminschen Kompensator ersetzt der Keilkompensator vollständig. Er hat den Vorteil, daß seine Verschiebung der Streifenzahl durchaus proportional, also einfacher und sicherer zu eichen ist.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 14. März 1903.)

8. *Über die Strahlungen des radioaktiven Bleis; von A. Korn und E. Strauss.*

1. Kurze Zeit nach der Auffindung des radioaktiven Bleis¹⁾ haben wir einige ziemlich schwach aktive Radiobleipräparate dem Einfluß von Kathodenstrahlen ausgesetzt und bereits bei den ersten Versuchen eine deutliche Verstärkung der photographischen Wirkung dieser Präparate gefunden.²⁾

Diese Tatsache hat auch vom rein physikalischen Standpunkte aus Bedeutung, da sie einen neuen Zusammenhang zwischen den Kathodenstrahlen und den unter dem Kollektivbegriff „Becquerelstrahlen“ zusammengefaßten Strahlungen erkennen läßt.³⁾ Bei keiner anderen radioaktiven Substanz, *nur bei Radiobleipräparaten*, haben wir bisher einen solchen Einfluß der Kathodenstrahlen nachweisen können; vorher nicht aktive Bleipräparate, wie gewöhnliches Bleisulfat oder Bleisulfid, haben auch nach sehr langer Einwirkung intensiver Kathodenstrahlen nicht die geringste Spur von Radioaktivität gezeigt. Daß man es bei der Verstärkung mit einer tatsächlichen Vergrößerung der Radioaktivität, nicht mit einem schwachen (für das Auge nicht mehr erkennbaren) Nachleuchten zu tun hat, ergibt sich daraus, daß die Verstärkung ebenso deutlich bleibt, wenn man zwischen Substanz und photographische Platte eine für gewöhnliches Licht undurchlässige Schicht, z. B. schwarzes Papier oder eine dünne Aluminiumplatte bringt. Ein Abklingen der so bewirkten Verstärkungen konnte auch nach Monaten nicht wahrgenommen werden. Es empfiehlt sich für

1) K. A. Hofmann u. E. Strauss, Chem. Ber. 33. p. 3126. 1900; 34. p. 8, 907, 3083. 1901; vgl. auch K. A. Hofmann u. V. Wölfl, Chem. Ber. 35. p. 1453. 1902.

2) K. A. Hofmann, A. Korn u. E. Strauss, Chem. Ber. 34. p. 407. 1901.

3) Gewisse Analoga zu dieser Erscheinung bieten die Aktivierungsversuche von McLennan (Phil. Mag. 14. p. 197. 1902), welche sich auf vorher inaktive Substanzen beziehen.

diese Versuche nicht, von Präparaten auszugehen, die von vornherein eine sehr beträchtliche Aktivität zeigen; wir haben bei einzelnen Substanzen, deren Gewinnung wir weiter unten angeben werden, Verstärkungen erzielt, die man auf den ersten Blick als eine Verdoppelung der ursprünglichen Wirkung bezeichnen kann.

Mit der Verstärkung der photographischen Wirkung geht im allgemeinen nicht auch eine Verstärkung der Elektrizität zerstreuenden Wirkung parallel; nur unter besonderen Umständen, von denen noch später die Rede sein wird, gingen die Verstärkungen beider Wirkungen Hand in Hand.

2. Die Röhre, in welcher wir die zu untersuchenden Substanzen den Kathodenstrahlen aussetzten, hatte zwei Aluminiumelektroden; der einen derselben (einem kreisförmigen Plättchen von 1 cm Durchmesser) steht die zu untersuchende Substanz in einem Glasnäpfchen, ca. 8 cm von der Elektrode entfernt, gegenüber; ein Schliff gestattet das Näpfchen mit der Substanz in bequemer Weise in die Röhre einzuführen, bez. aus ihr zu entfernen. Wir gingen in der Evakuierung der Röhre nicht sehr weit; die Drucke bewegten sich im allgemeinen zwischen 0,2 und 0,5 mm; um bei diesen relativ hohen Drucken intensive Kathodenstrahlen zu erzielen, bedient man sich der folgenden, für diese und ähnliche Versuche außerordentlich zweckmäßigen Methode: man verbindet beide Elektroden der Röhre mit dem negativen Pole einer Influenzmaschine oder eines Induktoriums, während man an den anderen Pol eine größere Kapazität, z. B. die äußere oder innere Belegung einer Leydener Flasche, anlegt. Wenn nun Funken zwischen den beiden Polen übergehen, so entstehen in den Leitungen von dem negativen Pole zu den beiden Elektroden der Röhre Hertz'sche Schwingungen, und es sendet — bei einiger Unsymmetrie¹⁾ der beiden Zuleitungen — die Elektrode mit *kürzerer* Zuleitung intensive Kathodenstrahlen aus; diese Elektrode mit kürzerer Zuleitung ist bei uns diejenige, welcher die Substanz in dem Glasnäpfchen gegenübersteht. Wir bedienten uns zur Erzeugung der Schwin-

1) In unserer Anordnung bestand die eine Zuleitung aus 2 m, die andere aus 10 m Kupferdraht von 1 mm Durchmesser, letztere über Kopfhöhe von einer Wand des Zimmers zur anderen gespannt.

gungen fast ausschließlich der Funken einer großen Toepler-schen Influenzmaschine.¹⁾

Von der zu untersuchenden Substanz wurden zwei nahezu gleiche Mengen (ca. $\frac{1}{2}$ g) abgesondert, die eine 10—15 Min. in der soeben beschriebenen Anordnung von Kathodenstrahlen bestrahlt und darauf die photographische Wirkung beider Mengen verglichen, indem man dieselben — unter Anschluß anderer Belichtungsquellen — entweder direkt auf die Glasseite je einer photographischen Platte legte, oder auf die Schichtseite unter Einschaltung von schwarzem Papier oder Aluminiumblech zwischen Substanz und Platte. Nach 12—15 stündiger Exposition wurden die Platten entwickelt und fixiert. Es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß hierbei alle Bedingungen für beide Platten die gleichen waren; im besonderen wurden die Platten gleichzeitig in das Entwicklerbad gebracht und gleichzeitig aus demselben entfernt.

Die verstärkte Wirkung zeigt sich auf der einen Platte schon dadurch, daß beim Entwickeln der photographische Eindruck früher erscheint, als auf der anderen; auf den fertigen Platten ist die Verstärkung subjektiv meist auf den ersten Blick zu erkennen; objektiv gelingt der Nachweis mit Hilfe einer Selenzelle: man läßt das Licht einer möglichst konstanten starken Lichtquelle (am besten Kalklicht) durch eine Wasserkammer und ein Linsensystem auf eine kleine Öffnung (etwa 1 qcm) eines undurchsichtigen Schirmes fallen, bringt hinter die Öffnung einen Flächenteil der zu prüfenden Platte, der einen möglichst gleichmäßigen photographischen Eindruck zeigt, und fängt das durchgehende Licht mit einer empfindlichen Selenzelle auf. Schließt man den Strom, z. B. einer Akkumulatorenbatterie, durch die Selenzelle und schaltet in die Leitung ein empfindliches Galvanometer ein, so zeigt dasselbe, der stärkeren Platte entsprechend, einen kleineren Ausschlag.

Zur Untersuchung der Elektrizität-zerstreuenden Wirkung benutzten wir ein Elster-Geitelsches Elektroskop, wie es von der Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig ge-

1) Man kann natürlich auch Kathodenstrahlen, wie sie bei sehr tiefen Drucken auftreten, verwenden; doch gestattet die geschilderte Anordnung ein rascheres Arbeiten.

liefert wird. Das Elektroskop wurde — positiv oder negativ — zu einer bestimmten Spannung (135 Volt) geladen und die Entladungszeit bis zu einer bestimmten kleineren Spannung (105 Volt) gemessen. An Stelle des gewöhnlich gebrauchten Zerstreuungskörpers wurde ein mit einem niedrigen Rande versehenes Metalltellerchen zur Aufnahme der zu untersuchenden Substanz angebracht. Leer, d. h. ohne Substanz, entlud das Elektroskop von 135—105 Volt in einer Zeit, die in jedem Falle 4 Min. überstieg; sehr starke Radiobleipräparate entluden bereits in wenigen Sekunden. Die möglichen Fehler bei den Messungen schätzen wir:

bei einer Entladungszeit bis zu 1 Min. auf 1—3 Sek.					
"	"	"	von 1—2	"	" 3—5 "
"	"	"	" 2—3	"	" 5—8 "
"	"	"	" 3—4	"	" 8—15 "

3. Um eine gewisse Ordnung in die zahlreichen, von uns in den letzten 2 Jahren ausgeführten Versuche zur Feststellung der photographischen und Elektrizität zerstreunenden Wirkung der Radiobleipräparate zu bringen, haben wir uns die folgenden provisorischen Vorstellungen zurechtgelegt, die uns bei unseren Untersuchungen geleitet haben, und in Bezug auf die wir uns wohl bewußt sind, daß sie vielleicht schon in der allernächsten Zeit erhebliche Modifikationen erfahren können.

Wir unterscheiden *zwei* von den radioaktiven Substanzen ausgehende Wirkungen, und zwar:

I. die Lösung einer feinen, materiellen *Substanz* in der umgebenden Luft;

II. eine, wie gewöhnliches Licht, aus elektrischen Schwingungen bestehende, von den radioaktiven Präparaten ausgehende *Strahlung*, von der besonderen Art, daß statische Elektrizität von der Strahlung mitgeführt wird, d. h. eine nicht rein transversale, möglicherweise eine rein longitudinale Strahlung.

Die Lösung der Substanz in der umgebenden Luft geht, so nehmen wir an, ganz nach den Vorstellungen der modernen Theorie der Lösungen und der Elektrolyse vor sich; die Luft erhält durch diese Auflösung der Substanz eine erhebliche Leitungsfähigkeit; ein Hauptteil der Elektrizitätszerstreunenden Wirkung ist diesem Vorgang zuzuschreiben. *Diese Wirkung*

hat keine Durchdringungsfähigkeit, sie wird durch starke magnetische Fehler nicht oder sehr wenig abgelenkt, die Kathodenstrahlen verstärken sie nicht.

Der Strahlung ist ein wesentlicher Teil der photographischen Wirkung zuzuschreiben; *sie ist sehr durchdringend, wird in einem starken magnetischen Feld wie ein Stromfaden abgelenkt und ist durch Kathodenstrahlen verstärkbar.* Diese Strahlen haben auch eine Elektrizität-zerstreuende Wirkung, indem sie scheinbar die Eigenschaft besitzen, die in der Luft wahrscheinlich bereits vorhandene aktive Substanz zu dissoziieren (Ionisierung der Luft). Jedenfalls ist *diese* Elektrizität-zerstreuende Wirkung relativ schwach.

4. Nach diesen Sätzen lassen sich die am Radioblei beobachteten Erscheinungen einigermaßen ordnen.

Die Verstärkung der Strahlen ergibt sich deutlich aus der verstärkten photographischen Wirkung der bestrahlten Substanzen. Wenn nun die Kathodenstrahlen die Wirkung der ersten Art nicht vergrößern, so kann die Verstärkung der Elektrizität-zerstreuenden Wirkung durch die Kathodenstrahlen im allgemeinen nicht sehr groß, ja nur dann überhaupt wahrnehmbar sein, *wenn die Wirkung der ersten Art vorher geschwächt worden ist.* Eine solche Schwächung kann man nun tatsächlich erreichen, wenn man die Radiobleipräparate gewissen chemischen Umarbeitungen unterwirft, nämlich solchen, bei denen die Substanz in eine wasserlösliche Form übergeführt und aus *stark verdünnter Lösung* wieder gewonnen wird. Wir gingen von einem Radiobleisulfat aus. Dasselbe wurde auf dem Wasserbade mit etwas Kalilauge digeriert und durch Hinzufügen von überschüssigem Schwefelammon in das Sulfid übergeführt; dieses wurde mit Salzsäure zersetzt, das erhaltene Chlorid in viel heißem Wasser gelöst und das Filtrat einige Tage stehen gelassen. Fällt man sodann das Blei als Sulfid mit Schwefelwasserstoff aus, so erhält man nach dem Trocknen (Auswaschen mit Alkohol und Äther, Erwärmen im Trockenschrank auf 110°) ein Präparat, dessen durchdringende photographische Wirkung keinerlei Schwächung gegen früher aufweist, während die *Elektrizität-zerstreuende Wirkung ganz beträchtlich abgenommen hat.* Zum Belege hierfür mögen die folgenden Zahlen dienen:

	Substanz I	II ¹⁾
Ursprüngliche Entladungsdauer:	43"	18"
Entladungsdauer nach der Umarbeitung:	2' 53"	2' 5"

Weder bei der einen, noch bei der anderen Substanz zeigte sich, wie wir nochmals betonen, eine wahrnehmbare Schwächung der bei diesen Präparaten übrigens nicht sehr starken photographischen Wirksamkeit gegenüber der beträchtlichen Abnahme der Elektrizität-zerstreuenden Wirkung. Setzte man nun diese geschwächten Präparate Kathodenstrahlen aus, so konnte man jetzt *außer der verstärkten photographischen Wirkung* auch eine *deutliche*, wenn auch nicht sehr große *Vermehrung der Elektrizität-zerstreuenden Wirkung* nachweisen. Bei Substanz I sank die Entladungszeit von 2' 53" auf 2' 40" und bei Substanz II von 2' 5" auf 1' 45". Diese Ergebnisse bestätigen die Angaben, welche von K. A. Hofmann bereits gemacht worden sind.²⁾ Die geschilderten Versuche können offenbar nicht anders gedeutet werden, als daß durch die Kathodenstrahlen nur die Strahlung verstärkt wird. Die Verstärkung der geringen Elektrizitätszerstreuung ist nur deshalb nachweisbar geworden, weil vorher die Wirkung der ersten Art durch die Umarbeitung außerordentlich geschwächt worden war.

5. Bei Gelegenheit der Schwächungsversuche durch chemische Umarbeitung wollen wir eine merkwürdige Beobachtung nicht unerwähnt lassen, welche wir noch weiter zu verfolgen gedenken. Führt man die oben geschilderte Umarbeitung des Radiobleisulfats nur in ihrem ersten Teil aus, d. h. Digerieren mit Kalilauge und Umsetzung mit Schwefelammon, und trocknet nun das so gewonnene Sulfid mit Alkohol, Äther und durch Erwärmen auf 110°, so zeigt sich dieses in Bezug auf seine Elektrizität-zerstreuende Wirkung gegenüber dem Ausgangsmaterial *erheblich verstärkt*:

	Substanz I	entlud in 20" gegenüber	43"
	Substanz II	" " 9"	" 18"
Eine weitere Substanz	" "	28"	" 40"

Auch hierbei blieb die photographische Wirkung unverändert.

1) Wir bezeichnen mit I und II zwei Radiobleipräparate, vor der Umarbeitung als Sulfate, nach der Umarbeitung als Sulfide gemessen.

2) K. A. Hofmann, Chem. Ber. 35. p. 1455. 1902.

6. Zum Nachweise der *Ablenkbarkeit der Strahlung* von Radiobleipräparaten brachten wir eine kleine (4×4 cm) photographische Platte zwischen die Pole eines kräftigen Elektromagneten und streuten eine ca. 3 mm breite Schicht eines stark aktiven Sulfids in gerader Verbindung der beiden Pole auf die mit schwarzem Papier bedeckte Platte. Durch die Ablenkung der Strahlen wurde die eine Hälfte der Platte verschleiert, während die andere hell blieb. In der Nähe der beiden Pole ist der photographische Eindruck des nicht abgelenkten Bildes im Verhältnis zu dem Eindruck in der Mitte der Schicht außerordentlich schwach.

7. Wir lassen zum Schluß eine genaue Darstellung zweier Präparate folgen, welche sich für die Versuche, die Strahlung durch Kathodenstrahlen zu verstärken, am geeignetsten erwiesen haben.

A. *Uranpecherz von Joachimsthal* wurde mit Salpetersäure aufgeschlossen, die Lösung eingedampft, mit Wasser verdünnt und mit Schwefelwasserstoff gefällt. Der in Schwefelsäure unlösliche Teil des Niederschlages wurde sodann mit Schwefelammon umgesetzt, das gewonnene Sulfid in das Chlorid verwandelt und dessen wässrige Lösung mit Kochsalz versetzt: das Filtrat von dem hierbei entstehenden Chlorbleiniederschlag wurde mit Schwefelwasserstoff gefällt, der Niederschlag ausgewaschen, mit Schwefelammon digeriert, mit Schwefelsäure und Salpetersäure abgeraucht und das so gewonnene Bleisulfat mit verdünnter Schwefelsäure ausgewaschen. Dieses Bleisulfat wurde in Kalilauge gelöst, mit Hydrazinsulfat erwärmt¹⁾, die in Lösung bleibende geschwächte, also viel gewöhnliches Blei enthaltende Substanz mit Schwefelammon gefällt, der Rückstand ausgewaschen, dann mit Salzsäure und Schwefelsäure zersetzt, abgeraucht und schließlich mit verdünnter Schwefelsäure ausgewaschen, wobei nichts in Lösung ging; die Substanz war also wismutfrei. Das *Bleisulfat* war nach dem Erhitzen mit Schwefelsäure und Salpetersäure auf 400° weiß.

1) Hierdurch wird eine absichtliche Schwächung der Aktivität herbeigeführt, weil ein Teil der stark aktiven Substanz bei diesem Verfahren herausfällt.

B. *Uranpecherzrückstände* wurden in Salpetersäure gelöst, die Lösung zur Trockne verdampft und mit 2—3 Proz. Schwefelsäure bis zum Rauchen erhitzt; dann wurde der Rückstand mit Wasser aufgenommen, mit Schwefelalkali umgesetzt, das Sulfid mit Salzsäure zersetzt und die Lösung des so gewonnenen Chlorids eingedampft. Der auskristallisierende Teil wurde nach der Überführung in das Sulfat mit Schwefelsäure ausgewaschen, mit Schwefelalkali in das Sulfid verwandelt, dieses wieder mit Salzsäure zersetzt, das Chlorid in Wasser gelöst und endlich aus dieser sicher wismutfreien Lösung mit Schwefelwasserstoff das *Bleisulfid* ausgefällt.

Wir sind Hrn. Prof. Dr. Karl A. Hofmann für die freundliche Überlassung der zu den hier beschriebenen Versuchen dienenden Radiobleipräparate zu bestem Danke verpflichtet.

München, Februar 1903.

(Eingegangen 12. Februar 1903.)

**9. Über die Druckkräfte der Schallwellen
und die absolute Messung der Schallintensität;
von W. Altberg.**

Dvořák hat in seinen bekannten akustischen Experimentaluntersuchungen ¹⁾ den Nachweis geführt, daß im Knoten einer stehenden Schallwelle ein konstanter Überdruck herrscht, und daß eine Schallwelle, welche sich in einem Rohre fortpflanzt und durch eine Querwand reflektiert wird, auf die reflektierende Wand einen Druck ausübt. In seiner Arbeit führt Dvořák (l. c. p. 58) die Überlegung von Mach an, welche das Auftreten der Druckkräfte von Schallwellen mechanisch begründet.

In neuester Zeit hat Lord Rayleigh ²⁾ das Auftreten von Druckkräften bei verschiedenen Formen oszillatorischer Bewegungen eingehend behandelt. Für eine ebene Schallwelle, welche auf eine ebene, vollkommen reflektierende Wand auffällt ist, nach Lord Rayleigh (l. c. p. 342) die Größe des auftretenden Druckes p bestimmt, wenn die pro Sekunde auffallende Energiemenge E und die Schallgeschwindigkeit V gegeben sind; es ist

$$p = \frac{2E}{V}$$

eine Beziehung, welche sich mit der von Maxwell und Bartoli für Druckkräfte des Lichtes gefundenen deckt.

Auf Veranlassung des Hrn. Prof. P. Lebedew habe ich es unternommen eine Vorrichtung auszuarbeiten, welche gestattet die Druckkräfte, welche frei sich ausbreitende Schallwellen auf eine reflektierende Wand ausüben, zu messen und hieraus die Intensität der auffallenden Schallwellen im absoluten Maße zu bestimmen.

1) V. Dvořák, Pogg. Ann. 157. p. 42. 1876.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 3. p. 338. 1902.

Es sind bisher zwei Methoden für die absolute Messung der Schallintensität vorgeschlagen worden: die refraktometrische von Boltzmann, welche von Toepler und Boltzmann¹⁾ ausgeführt und von Raps²⁾ weiter ausgearbeitet wurde, und die manometrische von M. Wien³⁾; beide Methoden führen auf absolute Messungen der Amplituden zurück und sind ohne weiteres nur auf harmonische Schwingungen anwendbar, während die Methode der Druckmessungen auf beliebige Komplexe von Schallschwingungen anwendbar ist.

I. Die Apparate und die Versuchsanordnung.

1. *Der Druckmesser* hatte die folgende Einrichtung: die die Schallwellen reflektierende Zinkwand WW (Fig. 1) hatte eine kreisförmige, mit einem Stutzen TT versehene Öffnung, in welche nach Belieben die Ringe R_1 bis R_6 fest eingesetzt

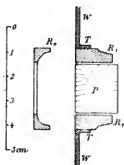


Fig. 1.

werden konnten. Die kreisförmige Öffnung des Ringes wurde durch einen aus Palmenholz gedrehten Stempel P (Durchmesser 21 mm, Länge 16,5 mm), der an einer Drehwage angehängt war, unter Freilassung eines ringförmigen Schlitzes verschlossen; die auf den Stempel ausgeübten Druckkräfte wurden durch die Ablenkungen der Drehwage gemessen.

Die freie Beweglichkeit des Stempels wurde nicht beeinträchtigt, wenn die Schlitzweite nicht unter 0,5 mm und seine Länge nicht über 15 mm genommen wurden. Um den Einfluß dieses Schlitzes auf die absolute Größe der zu messenden Druckkräfte zu untersuchen, wurden Beobachtungen mit verschiedenen Schlitzbreiten bez. Schlitzlängen gemacht, was sich durch Auswechselung der Ringe R_1 , R_2 etc. leicht bewerkstelligen ließ; die angewandten sechs Ringe hatten die folgenden Dimensionen:

1) M. Toepler u. L. Boltzmann, Pogg. Ann. 141, p. 321. 1870.

2) A. Raps, Wied. Ann. 50, p. 193. 1893.

3) M. Wien, Wied. Ann. 36, p. 834. 1889.

	Länge	Innerer Durchmesser	Schlitzbreite
I	15 mm	22 mm	0,5 mm
II	15	23	1,0
III	15	25	2,0
IV	10	22	0,5
V	5	22	0,5
VI	1	22	0,5

Der Wagebalken der Drehwage (Fig. 2) bestand aus einem Messingrahmen RR , welcher von einem Stahldraht T (Länge 30 cm, Durchmesser 0,23 mm) getragen wurde; an dem oberen Teile des Rahmens waren der Druckstempel P und ein entsprechendes Gegengewicht Q befestigt; bei dieser Anordnung konnte der Abstand L des Mittelpunktes von P von der Torsionsachse T in bequemer Weise gemessen werden.

Im Innern des Rahmens war eine Schaufel D befestigt, welche in ein mit *Glycerin* gefülltes Gefäß G tauchte und die Schwingungen des Wagebalkens genügend dämpfte¹⁾; der Torsionsdraht T und das Glyceringefäß G waren an demselben Stativ befestigt. Um die Vertikalstellung des Rahmens zu sichern, war dieser durch einen vertikalen Messingstab V , an welchem sich der Spiegel S befand, belastet.

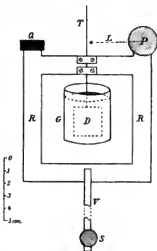


Fig. 2.

Die reflektierende Wand bestand aus Zinkblech (Dicke 1,3 mm) und hatte eine konkave Form, da die auffallenden Wellen keine ebenen waren und von einer Schallquelle (dem Ende eines Kundtschen Rohres) ausgingen, welche sich in 50 cm Entfernung von dieser Wand befand; die Zinkwand

1) Bei der Anordnung der dämpfenden Schaufel D im Innern des Rahmens RR fallen die seitlichen Schwingungen fort, welche entstehen, wenn die Schaufel am unteren Ende des Stabes V sich befindet; vgl. P. Lebedew, Wied. Ann. 62. p. 163. 1897.

(Fig. 3) bestand aus einem ebenen mittleren Teile (Durchmesser 10 cm), in welchem sich die Öffnung für den Druckstempel P befand, und einem konischen Ansatz, welcher eine eingeschriebene Kugeloberfläche vom Halbmesser 50 cm berührte; der äußere Durchmesser des Ansatzes ($D = 30$ cm) war größer als die doppelte Wellenlänge der auffallenden Schallbewegung. Die reflektierende Wand hatte ein von der Torsionswage unabhängiges Gestell, welches mit Stellschrauben

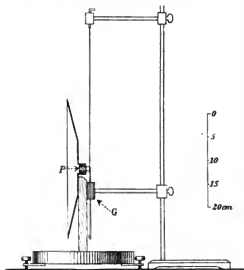


Fig. 3.

versehen war; die Wand konnte deshalb leicht so eingestellt werden, daß der Druckstempel sich frei in dem Ringe bewegte, der kreisförmige Schlitz überall dieselbe Breite hatte und die Vorderfläche des Stempels in der Ebene der Wand lag.

Um störende Wirkungen von Luftströmungen zu vermeiden, wurde der ganze Druckapparat in einem Zylinder aus Drahtgaze auf-

gestellt, der von außen mit einer Watteschicht bekleidet wurde.¹⁾ In der der Schallquelle zugekehrten Seite hatte der Drahtzylinder eine kreisförmige Öffnung ($D = 30$ cm), welche mit dünnem Musselin überspannt war: diese bietet den Schallwellen keinen merklichen Widerstand, hält aber die Luftströmungen in genügender Weise ab. Durch zwei kleine Glasfenster konnte die Spiegelablesung gemacht werden.

Die absolute Größe der Richtkraft des Torsionsdrahtes wurde in üblicher Weise aus Schwingungsbeobachtungen bestimmt; hierbei wurde sowohl die Zinkwand als auch das

1) Vgl. P. Lebedew, l. c. p. 163.

dämpfende Glyzeringeß entfernt. Bei diesen Messungen wurden auf den oberen Rand des Rahmens der Drehwaage Messingstäbe gelegt, welche in der Mitte mit Einschnitten für den Torsionsdraht versehen waren (Fig. 4). Aus der Masse m und der Länge l wurde das Trägheitsmoment k dieser Stäbe berechnet¹⁾ aus der bekannten Beziehung:

$$k = \frac{m l^2}{12}.$$

Für die beiden angewandten Messingzylinder ergaben die Messungen:

	I	II
m	33,9 g	51,7 g
l	12,3 cm	18,7 cm
k	427 G.C. ²	1507 G.C. ²

2. Als Schallquelle diente ein Kundtsches Rohr, welches nach dem Vorgange von R. König²⁾ durch eine ununterbrochen rotierende Reibvorrichtung erregt wird. Die Methode, welcher sich R. König bediente, um das Ende des Kundtschen Rohres an die erregende Walze zu pressen, gestattete es nicht größere pressende Kräfte anzuwenden und entsprechend intensive Erregungen zu erhalten; deshalb wurde der König-sche Apparat in folgender Weise abgeändert: das Ende des horizontal eingeklemmten Kundtschen Rohres K wurde an die rotierende Walze R (Fig. 5) mittels zweier Hanfschnüre II gepreßt, welche ihrerseits zwischen zwei Holzblöcke MM gespannt waren; diese Vorrichtung gestattete es das Ende des Glasrohres mit einer Kraft von 50 kg anzupressen, ohne seine Schwingungen in der Längsrichtung des Rohres zu beeinträchtigen. Die Belastung konnte in folgender Weise nach Belieben geändert werden: das Brett mit den Holzklötzen MM war durch ein Gelenk A mit dem Gestell verbunden und trug an dem anderen Ende eine Stütze B , auf welcher der Hebel F lag; vom Beobachtungsplatze aus konnte durch die Laufschnur

1) Vgl. F. Kohlrausch, Praktische Physik § 29. 1901.

2) R. König, Wied. Ann. 12. p. 350. 1881.

SS das eine Hebelende gehoben werden, wodurch das Federdynamometer D gespannt wurde und einen entsprechenden Druck auf B ausübte; die federnde Kraft des Dynamometers dämpft die Stöße, welche das Rohrende durch unvermeidliche

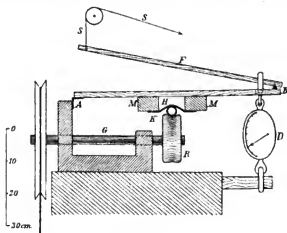


Fig. 5.

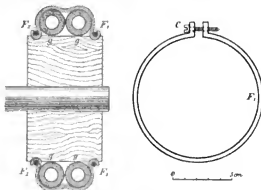


Fig. 6.

Unebenheiten des Reibzeuges R erleidet. Das Gestell der Achse Q ist auf einem Steinpfeiler montiert und die Achse Q wird durch einen $0,4 = \text{HP}$ Drehstrommotor ¹⁾ angetrieben.

1) Ein $0,2 = \text{HP}$ Drehstrommotor erwies sich als zu schwach.

Durch passende Wahl der Riemenscheiben konnte die Zahl der Umdrehungen von 1 bis 9 pro Sek. gemacht werden, was einer Peripheriegeschwindigkeit des Reibzeuges von 0,4—3,4 m pro Sek. entsprach.

Das Reibzeug bestand aus einer Scheibe von Palmenholz (Durchmesser 10 cm, Breite 6 cm); über zwei Gummiringe GG (Fig. 6) wurden mehrere Lagen Tuch gelegt, welche durch die Messingringe $F_1 F_1$ und $F_2 F_2$ befestigt wurden; auf das Tuch wurde dann ein Streifen aus rohem, chinesischem Seidengewebe genäht¹⁾; während des Betriebes war das Reibzeug ununterbrochen mit einer wässrigen Alkohollösung²⁾ (20—25 proz.) benetzt, indem die Lösung aus dem Gefäße P durch ein gabelförmiges Glasrohr zugeführt wurde.

Das eine Ende des Kundtsches Rohres K wurde zu einer Kugel ($d = 5$ cm) ausgeblasen, da aufgekittete Korkscheiben auf die Dauer die starken Schwingungen nicht aushalten konnten; das andere Ende war glatt geschliffen. Die Länge des Rohres war 76 cm, sein äußerer Durchmesser 2,5 cm.

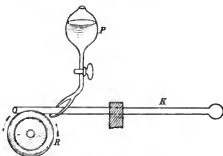


Fig. 7.

Die Wellenlänge wurde in üblicher Weise durch Staubfiguren bestimmt und ergab sich $\lambda = 10$ cm.

3. *M. Wiens Manometer*³⁾ wurde als Indikator verwendet, um in bequemer Weise die Stärke der Erregung des Kundtschen Rohres zu überwachen bez. einzelne Beobachtungen auf eine bestimmte Erregung reduzieren zu können. Als Manometerkapsel wurde die Kapsel eines Phonographen verwendet

1) Um das Tuch und die Seide von Fett zu befreien, wurden sie sorgfältig mit Äthyläther ausgelaugt; der Seidenüberzug hat sich als wesentlich dauerhafter erwiesen wie Tuch, Flanell oder Leder.

2) Vgl. P. Lebedew, l. c. p. 162. Anmerkung.

3) M. Wien, l. c. p. 836.

(Fig. 8); ein passend gebogener Papierstreifen trug einen sehr kleinen ebenen Spiegel S und wurde mit seinen Enden an einen unbeweglichen Querleisten m und an die Glasmembran gekittet. Die Kapsel war mit einem Stück Kautschukrohr B

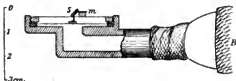


Fig. 8.

($l = 20$ cm) versehen, dessen freies Ende in beliebiger Entfernung von der Kugel des Kundtsches Rohres befestigt werden konnte und hierdurch die Möglichkeit gegeben wurde, ohne die Aufstellung des Manometers zu ändern, seine Ausschläge für jede Erregung des Rohres hinreichend groß zu machen.

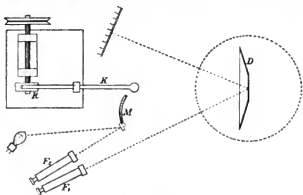


Fig. 9.

An Stelle eines beleuchteten Spaltes wurde der Faden einer Glühlampe genommen¹⁾ und die Verbreiterung seines Bildes mit dem Okularmikrometer des Beobachtungsfernrohres gemessen.

4. Die Aufstellung der Apparate wurde so gewählt (Fig. 9, Grundriß), daß der Beobachter von seinem Platze aus durch

1) Vgl. P. Leiberg, Journ. d. russ. phys. chem. Ges. 28. p. 93. 1896.

zwei Fernrohre F_1 und F_2 abwechselnd die Stellung des Druckapparates D und die des Wienschen Manometers M beobachten, sowie die Belastung des Schallapparates beliebig einstellen und am Dynamometer ablesen konnte.

Die Intensität der erregten Schallschwingungen war bei diesen Versuchen so groß, daß man dieselbe auf die Dauer nur ertragen kann, wenn man sich die Ohren mit passend ausgeblasenen Glaskugeln verstopft.

II. Die Versuche.

Die angestellte Untersuchung bezog sich auf das Studium der Eigenschaften der Schallquelle, auf das Verhältnis der Angaben des kontrollierenden Wienschen Manometers zu denen des Druckapparates, auf die Abhängigkeit der Messungen mit dem Druckapparate von den Schlitzdimensionen, und schließlich auf die absolute Messung der Schallintensität in einem speziellen Falle; die letztgenannten Messungen gestatten es, für den gegebenen Fall die Größenordnung der Arbeit zu berechnen, welche von der Schallquelle in Form von Schallschwingungen ausgestrahlt wird.

A. Die Eigenschaften der Schallquelle.

Das durch einen Motor erregte Kundtsche Rohr besitzt als Schallquelle folgende Vorzüge: Die Wellenlänge der Schwingung ist klein, die Erregung ist konstant, sie kann ununterbrochen beliebig lange dauern und die Schallintensität kann durch passende Wahl der Belastung in weiten Grenzen verändert werden.

Um die Abhängigkeit der Schallintensität sowohl von der Rotationsgeschwindigkeit des erregenden Reibzeuges als auch von der Belastung des Rohres zu untersuchen, wurden die Versuche in folgender Weise gemacht: Bei einer bestimmten konstanten Rotationsgeschwindigkeit wurde die Belastung des Rohres von 0 kg beginnend stufenweise vergrößert und die zugehörigen Ablenkungen des Druckapparates notiert.

Es ergab sich, daß für Belastungen, welche unter einem gewissen Minimalbetrage liegen, überhaupt keine Erregung des Kundtschen Rohres zu erhalten ist, daß bei einer gewissen Belastung die Erregung einsetzt und die Schallintensität rasch

mit der Belastung wächst; bei sehr großen Belastungen wird die Erregung unregelmäßig, weil dann der Seidenüberzug des Reibzeuges zu leiden beginnt.

Mit der Vergrößerung der Rotationsgeschwindigkeit des Reibzeuges steigert sich die Schallintensität bei gleichbleibender Belastung; bei Vergrößerung der Rotationsgeschwindigkeiten steigen sowohl die Minimalwerte als auch die Maximalwerte der Belastung, bei welchen das Rohr noch erregt wird.

Für die folgenden linearen Geschwindigkeiten V (Meter pro Sekunde) des Reibzeuges ergaben sich die Minimal- bez. Maximalbelastungen (in Kilogramm):

Versuchsreihe	I	II	III	IV
Geschwindigkeit V (Meter pro Sekunde)	1,1	1,9	2,7	3,4
Minimale Belastung (Kilogramm) . . .	2	6	16	25
Maximale Belastung (Kilogramm) . . .	20	25	30	40

In Fig. 10 sind die Resultate der Versuchsreihen I—IV dargestellt; als Abszissen sind die Belastungen (in Kilogramm), als Ordinaten die zugehörigen Ablenkungen des Druckapparates (in Skalenteilen) aufgetragen.

Die Intensität der Erregung des Rohres, sowie auch die Größen seiner Minimal- bez. Maximalbelastung hängen von der Benetzung des Reibzeuges und von der Konzentration der wässerigen Alkohollösung ab; mit wachsendem Alkoholgehalt nimmt die Erregung zu.

Die erzielte Schallintensität war sehr groß; die Ablenkungen des Druckapparates konnten bis ca. 80 Skt. gesteigert werden, während bei der stärksten Erregung mit der Hand (in der üblichen Weise) diese Ablenkung nur 1,5 Skt. erreichte, die Schallintensität war demnach bei mechanischer Erregung ca. fünfzigmal größer.

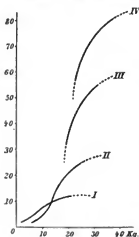


Fig. 10.

B. Das Wiensche Manometer.

Um bei den weiter folgenden Untersuchungen über den Einfluß der Schlitzweite auf die Angaben des Druckapparates die einzelnen Beobachtungen mit Hilfe des Wienschen Manometers auf eine bestimmte Schallintensität zu reduzieren, war es erforderlich, das Verhältnis der Angaben des Wienschen Manometers zu denen des Druckapparates für ein größeres Intervall zu untersuchen.

Tab. I stellt die gleichzeitigen Beobachtungen der beiden Apparate für verschiedene Belastungen (von 18 bis 2 kg) des Schallrohres dar; das Verhältnis der Ablenkungen p des Druckapparates zum *Quadrate* der Manometerausschläge a soll, laut Voraussetzung, konstant sein. Um dieses Verhältnis übersichtlicher darzustellen, ist es durch eine passend gewählte Zahl (0,0047) dividiert.

Tabelle I.

p Druckapparat	a Manometer	a^2	$\frac{p}{a^2}$	$\frac{1}{0,0047} \frac{p}{a^2}$
40	88	7744	0,0052	1,09
34	81	7056	48	1,02
30	81	6561	46	0,97
28	79	6241	45	0,95
25	72	5184	48	1,02
23	69	4761	48	1,02
22	67	4489	49	1,04
20	65	4225	47	1,00
13	53	2809	46	0,98
12	49	2401	50	1,06
11	48	2304	48	1,01
10	46	2116	47	1,00
8	40	1600	50	1,06
6	34	1156	52	1,10
5	34	1156	43	0,91
2	20	400	50	1,06
1,5	17	289	52	1,10

Aus der Tab. I ist ersichtlich, daß das Verhältnis $p:a^2$ innerhalb weiter Grenzen als konstant anzusehen ist; insbesondere gilt das für die Reduktionen, welche innerhalb kleiner

Intensitätsschwankungen, wie solche bei konstanter Belastung auftreten können, gemacht werden.

Die verhältnismäßig großen Schwankungen der aufeinander folgenden Werte der Tab. I erklären sich dadurch, daß das Reibzeug immer kleine exzentrische Aushauchungen besitzt, weshalb die Schallintensität während einer Umdrehung der Achse etwas variiert; diese Variationen spiegeln sich in den Angaben des Manometers wider, indem die Ränder des verbreiteten Glühfadenbildes unscharf begrenzt erscheinen und hierdurch die Ablesungen unsicher werden. Die Größe dieser Variationen hängt ihrerseits in verwickelter Weise von der Belastung ab.

C. Die Wirkung der Schlitzweite.

Der Einfluß der Schlitzweite wurde untersucht, indem die Ringe R_1 bis R_6 (vgl. Fig. 1) in die Öffnung der reflektierenden Wand eingesetzt wurden und die entsprechenden Ablenkungen des Druckapparates abgelesen. Tab. II gibt ein Beobachtungsprotokoll wieder, in welchem die Ablenkungen p (in Skalenteilen) des Druckapparates auf einen konstanten Ausschlag a_0 des Wienschen Manometers ($a_0 = 67$ Teilstriche des Okularmikrometers) reduziert sind; die zufälligen Abweichungen vom Mittelwerte sind unter δ angeführt. Vor jeder Beobachtung wurde die Schallerregung durch Entlasten des Schallrohres unterbrochen und die Nulllage des Druckapparates notiert; diese Nulllage schwankte innerhalb eines Skalenteiles.

Tabelle II.

a beob.	p ber.	p_0 ber. ($a_0 = 67$)	δ
69	44	41,5	0,8
66	40	41,2	0,5
66	38	39,3	1,4
65	38	40,4	0,3
67	44	44,0	3,3
63	34	38,5	1,8
68	41	39,8	0,9

Mittelwert = $40,7 \pm 1,3$

Bei sämtlichen Beobachtungen dienten die Messungen mit dem Ringe R_1 als Vergleichsmessung; die erste Serie (Tab. III) umfaßt den Einfluß der Schlitzweite (bei konstanter Länge), die zweite Serie (Tab. IV) die der Schlitzlänge (bei konstanter Weite). Im folgenden sind je zwei unabhängige Beobachtungsreihen angeführt und die Resultate auf die Messungen mit R_1 reduziert.

Tabelle III.
Schlitzlänge = 15 mm.

Ring	Schlitzweite mm	I. Reihe		II. Reihe	
		p_1 Skt.	reduz.	p_2 Skt.	reduz.
R_1	0,5	$31,1 \pm 1,6$	1,00	$40,4 \pm 1,8$	1,00
R_2	1,0	$28,9 \pm 1,8$	0,93	$36,9 \pm 1,2$	0,91
R_3	2,0	$26,5 \pm 0,9$	0,85	$35,9 \pm 1,1$	0,89

Tabelle IV.
Schlitzweite = 0,5 mm.

Ring	Schlitzlänge mm	I. Reihe		II. Reihe	
		p_1 Skt.	reduz.	p_2 Skt.	reduz.
R_1	15	$40,7 \pm 1,3$	1,00	$37,7 \pm 1,1$	1,00
R_4	10	$36,1 \pm 0,9$	0,89	$29,6 \pm 1,0$	0,91
R_3	5	$29,9 \pm 1,9$	0,74	$24,0 \pm 1,1$	0,73
R_2	1	$16,1 \pm 0,7$	0,40	$11,6 \pm 1,9$	0,35

Die angeführten Zahlen berechtigen zu der Annahme, daß für die kleinste Schlitzweite von 0,5 mm und die größte Schlitzlänge von 15 mm (Ring R_1) die Angaben des Druckapparates nur wenig (wohl unter 10 Proz.) durch die Anwesenheit des Schlitzes verringert werden.

D. Absolute Messungen der Schallintensität.

Die absolute Messung des Druckes der Schallwellen mit dem Druckapparat setzt sich zusammen aus den Messungen:

- a) der Direktionskraft des Aufhängefadens in absolutem Maße;
- b) des Hebelarmes der Torsionswaage in Zentimeter;
- c) der Fläche des Stempels in Quadratcentimeter;
- d) des beobachteten Ablenkungswinkels.

a) Die Messung der Direktionskraft D geschah in bekannter Weise durch Bestimmung der Dauer t einer einfachen Schwingung und durch die des Trägheitsmomentes K des Systems:

$$D = \pi^2 \frac{K}{t^2}.$$

Bezeichnen wir durch t die Dauer einer einfachen Schwingung, wenn der Rahmen R (Fig. 2), dessen Trägheitsmoment X ist, allein schwingt, und durch t_1 seine Schwingungsdauer, wenn er mit einem Zylinder (Fig. 4) von bekanntem Trägheitsmoment K_1 belastet ist, so ist

$$\frac{t^2}{t_1^2} = \frac{X}{X + K_1}.$$

Hieraus folgt

$$D = \pi^2 \frac{K_1}{t_1^2 - t^2}.$$

Während der Messung der Schwingungsdauer wurde sowohl der Dämpfer mit Glyzerin (G , Fig. 2) als auch die reflektierende Wand W (Fig. 3) entfernt; es wurden je zehn Doppelschwingungen beobachtet und hieraus konnte die Periode leicht auf 0,1 Sek. genau ermittelt werden. Als Körper, deren Trägheitsmomente bekannt sind, dienten zwei Messingstäbe (Fig. 4), deren Momente $K_1 = 427 \text{ g cm}^2$ bez. $K_2 = 1507 \text{ g cm}^2$ waren. Die Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	t	D
Rahmen R (Fig. 2) allein . . .	4,1 Sek.	—
Rahmen $R + K_1$ (427 g cm ²) . .	5,2	412
Rahmen $R + K_2$ (1507 g cm ²) . .	7,25	416

Als Mittelwert bekommen wir für die Größe der Direktionskraft D des Torsionsdrahtes, d. h. des Drehmomentes, welches den Draht um den Einheitswinkel (57,3°) tordiert

$$D = 414 \text{ Dynes. cm.}$$

Die Messungen ergaben weiter

b) Die Entfernung L des Mittelpunktes des Stempels von der Torsionsachse (Hebelarm der Torsionswaage) $L = 5,0 \text{ cm.}$

c) Den Durchmesser d des Stempels $d = 2,1 \text{ cm.}$; hieraus berechnet sich sein Querschnitt $\sigma = 3,5 \text{ qcm.}$

d) Der Skalenabstand R betrug $R = 2485$ Skt.; in der Entfernung von 50 cm von dem Ende des Kundtschen Rohres riefen die Druckkräfte des Schalles bei intensiver Schallerregung eine Ablenkung von $n = 50$ Skt. hervor.

Hieraus berechnet sich die Größe der Druckkräfte p der Schallwellen in Dynes pro 1 qcm

$$p = \frac{D}{2R} \cdot \frac{n}{L \cdot \sigma} = 0,24 \left(\frac{\text{Dynes}}{\text{qcm}} \right).$$

Auf Millimeter Quecksilber nmgerechnet, ergibt sich $p = 0,00018$ mm Hg, oder in Atmosphären ausgedrückt $p = 0,2$ Milliontel Atmosphäre.

Aus dem gemessenen Werte des Druckes p berechnet sich nach Lord Rayleigh die auf 1 cm² der reflektierenden Wand pro Sekunde auffallende Energiemenge E , wenn die Schallgeschwindigkeit (bei 17° C.) $v = 34\,200$ cm gegeben ist. Es ist

$$E = \frac{1}{2} p v = 4100 \left(\frac{\text{Ergs}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right) = 5,6 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{PS}}{\text{cm}^2} \right).$$

Auf Grund dieser Zahlen läßt sich eine Schätzung anstellen über den Betrag der gesamten Energiemenge, welche von dem tönenden Kundtschen Rohr in Form von Schallwellen ausgestrahlt wird. Da es bei dieser Schätzung nur auf die Größenordnung ankommt, können wir die vereinfachende Voraussetzung machen, daß sich die Schallwellen nach allen Richtungen von der Schallquelle mit gleicher Intensität ausbreiten, d. h. daß durch jeden Quadratzentimeter der Kugeloberfläche, welche mit dem Halbmesser $R = 50$ cm um das Ende des Kundtschen Rohres beschrieben ist, die Energiemenge $E = 5,6 \cdot 10^{-7}$ PS wandert. Dann berechnet sich die gesamte angestrahelte Energiemenge A von der Größenordnung

$$A = 0,02 \text{ PS.}$$

Bei dieser geringen angestrahelten Energiemenge ist die Schallintensität betäubend groß; die Schallquelle gestattet aber durch Vergrößerung der Rotationsgeschwindigkeit und der Belastung die Intensität noch erheblich zu steigern.

Die Resultate dieser Untersuchung lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Sich frei ausbreitende Schallwellen üben auf reflektierende Wände Druckkräfte aus, welche den Maxwell-Bartolischen Druckkräften des Lichtes vollkommen analog sind; durch Messung dieser Druckkräfte der Schallwellen läßt sich die Schallintensität, wie es Lord Rayleigh angegeben hat, in absolutem Maße bestimmen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet Hrn. Prof. P. Lebedew für die Anregung zu dieser Untersuchung, Hrn. Privatdozent N. Kasterin für die wertvolle Unterstützung, und Hrn. Prof. A. Sokolow für die mir zur Verfügung gestellten Hilfsmittel meinen Dank auszusprechen.

Moskau, Physik. Laborat. d. Univ., im August 1902.

(Eingegangen 5. März 1903.)

**10. Über die magnetischen Wirkungen
bewegter Körper im elektrostatischen Felde;
von A. Eichenwald.**

(Fortsetzung von p. 1.)

II. Bewegte Dielektrika.

25. Die bewegten Dielektrika habe ich ganz analog den bewegten Leitern untersucht, denn es besteht bekanntlich auch in den Erscheinungen selbst eine gewisse Analogie. Befindet sich ein Leiter oder ein Dielektrikum in einem elektrostatischen Felde, so wird in dem ersteren eine „wahre“ Ladung induziert, in dem letztgenannten eine „fingierte“. Alle diese Ladungen haften an der Materie und werden bei der Bewegung der Körper auch mit bewegt; es entsteht also im ersten Falle eine „wahre“, im zweiten eine „fingierte“ elektrische Konvektion, deren magnetische Wirkungen zu untersuchen sind.

Auch bei den Dielektrika wollen wir zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden: Erstens solche, wo die dielektrische Polarisierung in einem beliebigen Punkte des Dielektrikums auch während der Bewegung unverändert bleibt (reine Konvektion vgl. § 2) und zweitens solche, wo die Polarisierung in dem bewegten Dielektrikum sich mit der Zeit ändert. Beide Fälle habe ich experimentell untersucht, aber die größte Zahl der Versuche bezieht sich auf den ersten Fall.

26. Zunächst ist die Frage zu beantworten, ob die Dielektrika, wenn sie sich in einem konstanten elektrostatischen Felde bewegen, überhaupt irgend eine magnetische Wirkung ausüben können. Auf diese Frage geben die Versuche von Röntgen ¹⁾ eine positive Antwort. Röntgen ließ eine horizontale Glas- oder Ebonitscheibe zwischen zwei geladenen Metallscheiben um eine vertikale Achse rotieren und beobachtete die Ablenkungen einer über der oberen Metallscheibe aufgehängten Magnetnadel, indem die Ladung kommutiert wurde. Der Sinn der so erhaltenen Ablenkungen war übereinstimmend mit der Annahme, daß ein im elektrostatischen Felde

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 35. p. 264. 1888; 40. p. 93. 1890.

bewegtes Dielektrikum in Bezug auf magnetische Wirkungen zwei Stromlamellen äquivalent ist, welche entgegengesetzt sind und zwar so, daß der im Sinne der Rotation gedachte Strom an der Oberfläche des Dielektrikums zu fingieren ist, welche der negativ geladenen Belegung am nächsten steht. Mit anderen Worten: Die fingierten Ströme fallen mit den bewegten fingierten Ladungen zusammen. Was aber die Größe der Ablenkungen anbetrifft, so erhielt Röntgen bei einer Potentialdifferenz zwischen den Belegungen von etwa 10000 Volts und 100 Umdrehungen in der Sekunde einen doppelten Ausschlag der Nadel beim Kommutieren von 2—3 mm bei 229 cm Skalenabstand. Wenn auch diese Wirkung sicher zu beobachten war, so war sie dennoch nicht sicher genug, um quantitative Messungen vornehmen zu können. Die Versuche von Röntgen sind meines Wissens noch von keinem wiederholt worden, obgleich ihre Bedeutung für die weitere Ausbildung der elektromagnetischen Theorie für bewegte Körper auf der Hand liegt. Nur in der ganz letzten Zeit, nämlich in einer soeben erschienenen Arbeit bestätigt H. Pender¹⁾ indirekt das Resultat von Röntgen, indem er zeigt, daß, wenn eine Hartgummischeibe in einem elektrischen Wechselfelde rotiert, in einem benachbarten Leiter Induktionsströme erzeugt werden. Diese Wechselströme werden bei H. Pender durch einen synchronen Kommutator gleichgerichtet und in einem empfindlichen Galvanometer beobachtet. Bei einer Potentialdifferenz von 7470 Volts und 57,8 Umdrehungen der Scheibe in der Sekunde erhielt H. Pender einen doppelten Ausschlag im Galvanometer von 4,5 mm. H. Pender hat diesen Ausschlag auch berechnet in der Annahme, daß die fingierten Ladungen an den beiden Seiten der Hartgummischeibe zwei entgegengesetzte Konvektionsströme bei der Rotation der Scheibe bilden, welche gleichzeitig mit dem elektrischen Felde ihre Richtung wechseln; der so berechnete Ausschlag ist 4,85 mm. Die Übereinstimmung mit dem beobachteten Ausschlage ist also eine gute, obgleich bei der Rechnung ein homogenes Feld vorausgesetzt ist, welche Bedingung bei dem Versuche (Scheibe ohne Schutzring) nicht erfüllt war. Wir können dennoch aus dieser Über-

1) H. Pender, Phil. Mag. (6) 5. p. 43. 1903.

einstimmung der beobachteten mit den berechneten Induktionswirkungen schließen, daß eine bewegte *fingierte* Ladung auch ein magnetisches Feld erzeugt, wie eine *wahre* elektrische Konvektion.

27. Bei meinen eigenen Untersuchungen habe ich ausschließlich statische elektrische Felder erzeugt und statische magnetische Felder mit dem Magnetometer direkt beobachtet. Zu den Versuchen diente derselbe Apparat wie früher (§ 3), nur sind die Anordnungen so getroffen, daß möglichst *homogene* elektrostatische Felder erzeugt werden.

Die hier beobachteten Wirkungen stellen meistens eine Differenz von den Wirkungen zweier Konvektionsströme vor; die Ablenkungen sind also notwendigerweise klein. Um solche kleine Ablenkungen sicher messen zu können, habe ich alle Maßregeln getroffen, um die möglichste Ruhe der Magnetonadel auch während der Rotation der Scheibe zu erzielen. Die Beobachtungen selbst habe ich nur nach Mitternacht ausführen können, wenn die Maschinen der hiesigen Zentrale ihre Arbeit beenden. Der Strom für den Dreiphasenmotor, welcher den Rotationsapparat in Bewegung setzte, wurde von einem Umformer geliefert, welcher seinerseits mit einem Akkumulatorenstrom gespeist wurde.

Um die Wirkungen der Konvektionsströme mit denen der galvanischen Ströme zu vergleichen, wurden zwei dünne, mit Stanniol beklebte Mikanitscheiben benutzt, welche dieselben Dimensionen wie die rotierenden Scheiben hatten und welche immer an die Stellen angebracht wurden, wo die Konvektionsströme während der Rotation, also an der Oberfläche der rotierenden Scheiben, zu erwarten waren. Die Belegung dieser Hülfscheiben war durch feine Risse in einzelne Ringe (Fig. 8) von untereinander gleichem Flächeninhalte eingeteilt; diese Ringe entsprechen also gleichen Kapazitäten, gleichen Elektrizitätsmengen und gleichen Konvektionsströmen. Alle Ringe sind hintereinander geschaltet und werden von einem und demselben Strom i durchflossen. Ist C die Kapazität eines Ringes, V die Potentialdifferenz im Kondensator, n die Umdrehungszahl, a der doppelte Ausschlag



Fig. 8.

beim Kommutieren der Ladung während der Rotation, und b der doppelte Ausschlag beim Kommutieren des Stromes i , so ist

$$\frac{QVn}{a} = \frac{i}{b}.$$

Die Beobachtungen wurden in folgender Reihenfolge gemacht. Zunächst wurde die Scheibe Z an die Flächen, wo die Konvektionsströme zu erwarten waren, mit ein wenig Wachs sorgfältig angeklebt; sodann wurde der ganze Apparat zusammengestellt und die Wirkungen der Ströme b (es waren ja meistens zwei Ströme) mit den Wirkungen eines Hilfsstromes c verglichen. Nachdem dieses mehrmals geschehen ist, werden die Scheiben Z vorsichtig herausgenommen, ohne etwas an dem Rotationsapparate und an dem Magnetometer zu ändern. Beim Herausnehmen wurden natürlich die Stanniolringe (durch die Achse) zerrissen und mußten für jeden Versuch neu gemacht werden. Endlich wurde der Kondensator geladen, die Scheibe in Rotation versetzt und die Ausschläge a beim Kommutieren der Ladung mit den Ausschlägen c beim Kommutieren des Hilfsstromes verglichen.

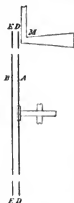


Fig. 9.

Da wir hier homogene Felder benutzen, so fällt der in § 5 erwähnte Fehler wegen unregelmäßiger Verteilung der Ladung fort. Ebenso wird die Korrektion wegen ungleicher Verteilung der Konvektionsströme und der Leitungsströme in den einzelnen Ringen auch sehr klein, weil der äußere Ring nur 0,9 cm breit ist, die inneren Ringe aber erstens eine geringere magnetische Wirkung ausüben und zweitens immer größere Abstände von der Magnetnadel haben.

Die Versuche.

28. Eine rotierende Mikanitscheibe A (Fig. 9) bildet mit einer anderen unbeweglichen Scheibe B einen Kondensator mit Schutzringen D und E . Die Scheiben sind mit Stanniol beklebt, der Ring D ist aus Zink. B , E und D sind unbeweglich, A und D an Erde gelegt, B und E sind isoliert und können geladen werden. Während der Rotation der Scheibe A und beim Kommutieren der Ladung des Kondensators werden die Ablenkungen des Magnetometers M beob-

achtet. Zwischen A und B befindet sich entweder Luft oder eine Platte aus Hartgummi oder Glas. Die Platten werden an B fest angelegt, sodaß die Scheibe A frei rotieren kann.

Dieser Versuch ist also eine Wiederholung des in § 17 beschriebenen Versuches, aber dieses Mal mit Benutzung eines homogenen Feldes.

Bezeichnen wir mit d_0 den Abstand zwischen A und B und schieben wir eine dielektrische Platte von der Dielektrizitätskonstante ϵ und der Dicke d hinein, so vergrößert sich die Kapazität des Kondensators um

$$K = \frac{d_0}{\frac{d}{\epsilon} + (d_0 - d)} \text{ mal.}$$

Bei mir war $d_0 = 1,25$ cm.

Für die Hartgummiplatte ist $d_1 = 0,95$ cm, $\epsilon = 2,96$, $K = 2,0$.

„ „ Glasplatte „ $d_1 = 0,98$ „ $\epsilon = 5,50$, $K = 2,8$.

In der Tab. V sind alle Beobachtungen und Rechnungen zusammengestellt. Für die beobachteten Ausschläge a gebe ich nur die Mittelwerte bei + und – Rotation an, weil der Unterschied zwischen diesen Größen immer sehr klein war. Der Wert a ist also das Mittel aus 20 Beobachtungen. Alle Ausschläge sind auf gleiche Empfindlichkeit der Nadel reduziert.

Tabelle V.

Dielektrikum	V	n	a		Diff.	$\frac{a}{V \cdot n} 10^5$	Mittelwert von $\frac{a}{V \cdot n} 10^5$	ϵ aus den Versuchen	ϵ direkt bestimmt
			beob.	ber.					
Luft	4000	± 78	$\pm 4,2$	$\pm 4,0$	+0,2	1,31	1,30	1,02	1,00
	6250	± 78	$\pm 6,0$	$\pm 6,2$	–0,2	1,24			
	8750	± 78	$\pm 9,1$	$\pm 8,7$	+0,4	1,33			
	6250	± 123	$\pm 10,0$	$\pm 9,8$	+0,2	1,30			
Hartgummi	4000	± 78	$\pm 8,4$	$\pm 8,0$	+0,4	2,70	2,59	2,97	2,96
	6250	± 78	$\pm 12,2$	$\pm 12,4$	–0,2	2,50			
	8750	± 78	$\pm 17,5$	$\pm 17,4$	+0,1	2,56			
	6250	± 123	$\pm 20,0$	$\pm 19,6$	+0,4	2,60			
Glas	4000	± 78	$\pm 11,1$	$\pm 11,2$	–0,1	3,56	3,62	5,16	5,50
	6250	± 78	$\pm 18,0$	$\pm 17,4$	+0,6	3,69			
	8750	± 78	$\pm 24,7$	$\pm 24,4$	+0,3	3,62			
	6250	± 123	$\pm 27,8$	$\pm 27,5$	+0,3	3,62			

Wie man sieht, stimmen die beobachteten und berechneten Werte der Ausschläge gut überein; auch die aus diesen Versuchen berechneten Dielektrizitätskonstanten sind mit den direkt bestimmten in genügender Übereinstimmung.

Ich muß noch bemerken, daß hier die Fehler in der Ausmessung der Größen d_0 einen bedeutenden Einfluß haben. Diese Abstände d_0 konnte ich aber nicht genauer als bis auf $\frac{1}{2}$ mm messen.

29. Die Belegung A (Fig. 10) ist jetzt eine Zinkplatte und unbeweglich aufgestellt. Eine Hartgummischeibe $A'B'$ rotiert zwischen A und B . Aus demselben Hartgummi ist auch ein Schutzring $D'E$ hergestellt, sodaß das Feld als genügend homogen gelten kann. Jetzt ist $d_0 = 1,60$, $d_1 = 0,95$, $K = 1,72$.

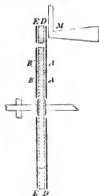


Fig. 10.

Bei der Rotation der Hartgummischeibe ohne Ladung erhält man Ablenkungen der Magnetnadel von 30 mm, welche aber von der Bewegungsrichtung unabhängig sind (vgl. § 8). Kommutiert man die Ladung während der Rotation der Hartgummischeibe $A'B'$, so erhält man Ablenkungen der Magnetnadel, welche mit dem Sinne der Rotation und der Ladung auch ihren Sinn wechseln; sie sind aber denjenigen Ablenkungen, welche man bei der Rotation der Scheibe A erhalten würde, entgegengesetzt. Das entspricht auch vollständig der Erwartung, denn ist die Scheibe A mit $+e$ geladen, so bedeckt sich die nächste Seite A' der Hartgummischeibe mit einer fingierten Ladung $-e$, die Seite B' wieder mit $+e$ und wir beobachten die Differenz der Wirkungen dieser zwei fingierten Konvektionsströme. Da der Strom $-A'$ näher zum Magnetometer gelegen ist und größere Wirkungen auf denselben ausübt, so ist die Differenz $-A' + B'$ negativ.

Nennen wir C die Kapazität des Kondensators mit Luft als Dielektrikum, so ist seine Kapazität mit der Hartgummischeibe KC . Die Ladung auf den Belegungen A und B ist KCV ; die fingierten Ladungen an A' und B' sind $(K-1)CV$ und die fingierten Ströme $(K-1)CVn$.

Nennen wir C die Kapazität des Kondensators mit Luft als Dielektrikum, so ist seine Kapazität mit der Hartgummischeibe KC . Die Ladung auf den Belegungen A und B ist KCV ; die fingierten Ladungen an A' und B' sind $(K-1)CV$ und die fingierten Ströme $(K-1)CVn$.

Vor dem Versuche werden an die Flächen A' und B' die zwei oben beschriebenen Mikanitscheiben Z angelegt und ein bekannter galvanischer Strom durch die Stanniolspiralen geschickt und zwar bei A' und B' in entgegengesetzter Richtung. Beobachtet man dabei die Magnetometerablenkung b , so können die Ablenkungen, welche die beiden Konvektionsströme verursachen, berechnet werden. Folgende Tab. VI enthält die Resultate.

Tabelle VI.

Nr.	V	n	a		Diff.	$\frac{a}{V \cdot n} \cdot 10^6$
			beob.	ber.		
1	8 000	± 68	$\mp 2,0$	$\mp 1,8$	+0,2	3,69
2	10 000	± 68	$\mp 2,1$	$\mp 2,2$	-0,1	3,09
3	12 500	± 68	$\mp 3,1$	$\mp 2,7$	+0,4	3,65
4	10 000	± 104	$\mp 3,2$	$\mp 3,3$	-0,1	3,08
5	10 000	± 118	$\mp 3,9$	$\mp 3,8$	+0,1	3,30
6	10 000	± 130	$\mp 4,4$	$\mp 4,2$	+0,2	3,39

Mittelwert: 3,37

Den Mittelwert von $a/Vn \cdot 10^6$ kann man benutzen, um die Größe K und die Dielektrizitätskonstante ϵ zu berechnen. Man erhält so

$$K = 1,75 \text{ statt } 1,73$$

$$\epsilon = 3,02 \quad „ \quad 2,96$$

Obgleich die beobachteten Ausschläge ziemlich klein sind, so kann man sie dennoch gut messen, weil die Nadel bei günstigen Versuchsbedingungen sich sehr ruhig verhält. Mit einer Glasscheibe habe ich diesen Versuch nicht gemacht, nm die Zahl dieser schwierigen Versuche nicht zu vergrößern. Wir werden aber sehen (vgl. § 31), daß auch für Glas analoge Resultate zu erwarten sind.

Die Versuche zeigen also, daß eine bewegte „fingierte“ Ladung in Bezug auf ihre magnetischen Wirkungen einer wahren elektrischen Konvektion oder auch einem gewöhnlichen Leitungsstrom von gleichem numerischen Betrage völlig äquivalent ist.

30. Schon bei den ersten Versuchen von Röntgen mit bewegten Dielektrika haben die Herren Rowland und Hutchinson einen Einwand gemacht, daß man die von ihm be-

obachtete magnetische Wirkung nicht den fingierten, sondern den wahren Ladungen der dielektrischen Scheibe zuschreiben könnte. Solche Ladungen können in der Tat entweder durch die Leitfähigkeit der Luft oder des Dielektrikums entstehen. Im ersteren Falle würden aber die Flächen A' und A mit gleichnamiger Elektrizität geladen und alle Ausschläge der Magnetnadel müßten das entgegengesetzte Zeichen haben. Die Leitfähigkeit des Dielektrikums kann nur dann eine wahrnehmbare Ladung erzeugen, wenn die Ladungszeit mit der Relaxationszeit vergleichbar wäre. Nun ist aber Hartgummi ein vorzüglicher Isolator, dessen Relaxationszeit gewiß größer als 5 Sek. ist, welche Zeit bei unseren Versuchen von einem Kommutieren bis zum anderen gebraucht wurde.

H. Pender¹⁾ sieht in der von ihm gewählten Methode einen Vorteil in der Beziehung, daß dort kein konstantes Feld, sondern ein Wechselfeld benutzt wird und die Scheibe keine Zeit hat sich zu laden. Bei H. Pender wechselt das elektrische Feld 12—20 mal in der Sekunde. Aber schon Röntgen²⁾ selbst hat eine Anordnung angegeben, in welcher die Polarisierung im Dielektrikum 200 mal in einer Sekunde wechselt und dennoch blieb das Endresultat, d. h. die magnetische Wirkung ungeändert. Den oben erwähnten Einwand halte ich deshalb schon durch die Versuche von Röntgen selbst für gehoben.

Wollen wir aber dennoch die Möglichkeit voraussetzen, daß die Luft bei der schnellen Rotation der Scheibe sich verdünnt und ein wenig leitend wird, dann wird die magnetische Wirkung des fingierten Stromes zum Teil durch den wahren Konvektionsstrom vernichtet. Die beobachteten Ausschläge entsprechen einem Strome $i = (K - 1) C V n$, aber in Wirklichkeit könnte ein Strom $i_1 = K C V n$ bestehen. Die im folgenden § 31 beschriebenen Versuche³⁾, in welchen kein Luftzwischenraum benutzt wird, schließen die hier vorausgesetzte Möglichkeit aus.

31. Lassen wir die beiden Belegungen eines Kondensators mit dem Dielektrikum zusammen rotieren, so müssen wir

1) H. Pender, l. c. p. 42.

2) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 40. p. 97—100. 1890.

3) A. Eichenwald, Physik. Zeitschr. 4. p. 308. 1903.

folgendes erwarten. Auf jeder Belegung A und B wird ein Konvektionsstrom erzeugt von der Größe $i_1 = \epsilon \cdot C V n$ (Rowlandeffekt), wie es die Versuche in § 28 zeigen; auf jeder Seite des Dielektrikums A' und B' müssen wir einen Strom $-(\epsilon - 1) C V n$ (Röntgeneffekt) fingieren (§ 29). Wir erhalten also eine Superposition beider Wirkungen und der äquivalente Strom an jeder Seite des Kondensators wird

$$i = \epsilon \cdot C V n - (\epsilon - 1) C V n = C V n.$$

Wir können also die magnetischen Wirkungen bei diesen Versuchen so berechnen, als ob die Belegungen in Luft rotieren, denn die Dielektrizitätskonstante hat hier keinen Einfluß.

Bei der praktischen Ausführung dieser Versuche muß natürlich der Umstand berücksichtigt werden, daß die geladene, nicht zur Erde abgeleitete Belegung B des Kondensators sich von beiden Seiten ladet. Die Anordnung muß also folgendermaßen getroffen werden.

Eine Hartgummi- oder Glasscheibe von 25 cm Durchmesser ist von beiden Seiten A und B mit Stanniol beklebt und kann um eine horizontale Achse rotieren (Fig. 11). Zwischen den unbeweglichen Schutzringen D und E befindet sich dasselbe Dielektrikum, wie zwischen A und B . Das elektrische Feld zwischen A und B kann als genügend homogen gelten; der Zwischenraum zwischen dem Kondensator AB und seinem Schutzring ist 0,2 cm. CF ist eine unbewegliche Mikanitplatte mit Stanniolbelegung; der Abstand BC ist gleich 0,5 cm. Die Stanniolbelegung CF ist isoliert und wird immer auf dasselbe Potential geladen wie BE ; zwischen B und C wird also kein elektrisches Feld erzeugt und B ladet sich nur von der zu A zugewandten Seite.

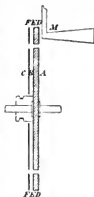


Fig. 11.

In der Tab. VII sind die Versuche mit einer Hartgummi-scheibe von 0,95 cm Dicke zusammengestellt; die Tab. VIII enthält die Resultate, welche mit einer Glasscheibe von 0,98 cm Dicke erhalten wurden.

Tabelle VII.
Dielektrikum: Hartgummi.

V	n	α		Diff.
		beob.	ber.	
7 500	± 65	+ 3,3	$\pm 3,6$	- 0,3
		- 3,4		- 0,2
10 000	± 65	+ 4,9	$\pm 4,7$	+ 0,2
		- 4,7		+ 0,0
7 500	± 95	+ 5,0	$\pm 5,2$	- 0,2
		- 4,9		- 0,3
10 000	± 95	+ 7,1	$\pm 6,9$	+ 0,2
		- 6,8		- 0,1
7 500	± 120	+ 6,3	$\pm 6,6$	- 0,3
		- 6,3		- 0,3
10 000	± 120	+ 9,0	$\pm 8,7$	+ 0,3
		- 8,7		+ 0,0

Tabelle VIII.
Dielektrikum: Glas.

V	n	α		Diff.
		beob.	ber.	
7 500	± 64	+ 4,5	$\pm 4,8$	- 0,3
		- 4,9		+ 0,1
10 000	± 64	+ 6,2	$\pm 6,4$	- 0,2
		- 6,5		+ 0,1
7 500	± 95	+ 7,6	$\pm 7,1$	+ 0,5
		- 7,2		+ 0,1
10 000	± 95	+ 9,6	$\pm 9,5$	+ 0,1
		+ 9,0		- 0,5

Der Sinn und die Größe der beobachteten Ausschläge stimmen mit den berechneten gut überein.

Wir haben somit einen experimentell bewiesenen Satz:
Wird ein Kondensator bis zu einer gegebenen Potentialdifferenz

geladen und mit dem Dielektrikum zusammen bewegt, so übt er eine magnetische Wirkung aus, welche aber vom Material des Dielektrikums unabhängig ist.

Benutzen wir diesen Satz im Zusammenhange mit den im § 28 beschriebenen Versuchen, wo die Belegung allein in Rotation versetzt wurde, so können wir schließen, daß dem Röntgen-effekt wirklich ein äquivalenter Strom $i = (K - 1) C V n$ zukommt. Mit einer Glasscheibe habe ich den Röntgenversuch (§ 29) nicht gemacht, aber wegen der Übereinstimmung der Versuche in §§ 28 und 31 mit unseren Voraussetzungen müssen wir auch für Glas, wie für Hartgummi einen fingierten Konvektionsstrom von der Größe $(K - 1) C V n$ annehmen. Da bei dieser Versuchsanordnung kein Luftzwischenraum gebraucht wird, so sind die Versuche noch einwandsfreier, als die im § 29 beschriebenen und wir können noch sicherer schließen, daß nicht die Größe $K C V n$, sondern die Größe $(K - 1) C V n$ den fingierten Strömen beizulegen ist.

32. Noch von einem anderen Standpunkte aus kann unser letzter Versuch betrachtet werden. Wir können folgende drei Annahmen machen: Die magnetische Wirkung kann in irgend einem unbeweglichen Punkte des Raumes abhängen:

a) von der absoluten Bewegung der Ladung im Raume; dann ist der äquivalente Strom $i = \epsilon \cdot C \cdot V \cdot n$;

b) von der Bewegung der Ladung relativ zum Dielektrikum; bei unserem Versuche ist dann $i = 0$;

c) von der Bewegung der Ladung zu dem von der Ladung selbst erzeugten Felde; dann ist $i = C V n$. Denn die Ladung des Kondensators $\epsilon \cdot C \cdot V$ muß aus zwei Teilen gedacht werden: der erste Teil $(\epsilon - 1) C V$ erzeugt ein elektrisches Feld in der Materie und rotiert mit derselben, gibt also kein magnetisches Feld; der zweite Teil $C V$ rotiert im unbeweglichen Äther.

Würde also die erste Annahme a) richtig sein, wo $\epsilon = 2,96$ ist, so müßten alle beobachteten Magnetometerausschläge fast dreimal größer als die berechneten sein, bei der zweiten Annahme b) würde man überhaupt keine Ausschläge erhalten und nur die dritte Annahme entspricht dem Versuche.

Es können also unsere Versuche nur durch eine solche Theorie erklärt werden, welche den Äther als ruhend annimmt oder zu solcher Anschauung führt; und zwar müssen wir den Äther als

ruhend nicht nur in der Umgebung bewegter Körper annehmen, sondern auch im Innern der bewegten Dielektrica selbst.

33. Wir wollen jetzt die Ergebnisse unserer Versuche mit der elektromagnetischen Theorie für bewegte Körper vergleichen. Nach der Maxwell-Hertzschen Theorie können wir die hier beobachteten magnetischen Wirkungen dem Vorhandensein von Gleitflächen im elektrostatischen Felde zuschreiben, indem wir unter Gleitflächen die Flächen verstehen, an welchen sich die tangentialen Komponenten der Geschwindigkeiten un stetig ändern. An solchen Flächen müssen nach H. Hertz ¹⁾ magnetische Kräfte entstehen von der Größe

$$M = A \cdot \epsilon \cdot E \cdot (v_1 - v_2),$$

wo E die normal zur Fläche genommene Polarisaton und $v_1 - v_2$ die Geschwindigkeitsdifferenz oder die relative tangentiale Geschwindigkeit zweier sich berührender Körper bedeutet.

Wenden wir diese Gleichung an den Fall bewegter Leiter, so erhalten wir einen richtigen Wert der magnetischen Kraft: $M_1 = A \cdot \epsilon \cdot E(v_1 - v_2)$; im Falle eines rotierenden Dielektrikums müssen wir schon an den Hertzschen Gleichungen eine Korrektur anbringen und $M_2 = A \cdot (\epsilon - 1) \cdot E \cdot (v_1 - v_2)$ schreiben; rotiert endlich der Kondensator mit seinen Belegungen zusammen, so haben wir im Sinne der Hertzschen Gleichungen überhaupt keine Gleitflächen, überall ist $v_1 - v_2 = 0$ und nm M_3 in diesem Falle von Null verschieden zu erhalten, müssen wir den Äther in den bewegten Dielektrika als ruhend annehmen. Dann erhalten wir eine Gleitfläche zwischen jeder Belegung des Kondensators und dem angrenzenden ruhenden Äther im Dielektrikum. Die magnetische Wirkung wird dann übereinstimmend mit den Versuchen $M_3 = A \cdot E \cdot (v_1 - v_2)$.

Daraus sehen wir schon, daß die Maxwell-Hertzschen elektromagnetischen Gleichungen für bewegte Körper bei unseren Versuchen mit Dielektrika versagen. Was aber die Theorie von Lorentz anbetrifft, so liefert sie richtige Werte der magnetischen Wirkungen auch bei den bewegten Dielektrika, denn alle unsere Rechnungen sind eigentlich im Sinne der Lorentzschen Elektronentheorie gemacht worden. Aber

1) H. Hertz, Ausbreitung der elektrischen Kraft p. 274. 1892.

auch andere Theorien, welche den Versuch von Fizeau mit strömenden Wasser erklären, müssen auch richtige Werte für den Röntgeneffekt liefern, denn die oben an M_2 angebrachte Korrektur $s - 1/s$ ist ja nichts anderes, als der Fresnelsche Mitführungskoeffizient.

34. Ich will hier noch einen Kontrollversuch anführen. Es soll jetzt das Dielektrikum, nämlich Hartgummi mit der Belegung B rotieren, während A stillsteht (Fig. 12). Zwischen B und C ist kein elektrisches Feld vorhanden. Dann müssen wir bei der Berechnung bei B einen Strom CFn und bei A' einen Strom $(K-1)CFn$ fingieren. Beide Ströme sind gleichgerichtet und die magnetischen Wirkungen addieren sich.

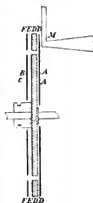


Fig. 12.

Tabelle IX.

V	n	a		Diff.	$\frac{a}{V \cdot n} 10^6$
		beob.	ber.		
8 750	± 72	$\mp 2,3$	$\mp 2,2$	+0,1	0,85
5 000	± 72	$\mp 2,9$	$\mp 3,0$	-0,1	0,81
6 250	± 72	$\mp 8,5$	$\mp 8,7$	-0,2	0,78
7 500	± 72	$\mp 4,7$	$\mp 4,4$	+0,3	0,87
10 000	± 72	$\mp 6,1$	$\mp 5,9$	+0,2	0,85
10 000	± 116	$\mp 9,3$	$\mp 9,5$	-0,2	0,80

Mittelwert: 0,827

Berechnet: 0,821

Auch in diesem Fall stimmen unsere Rechnungen mit den Beobachtungen.

35. Bis jetzt sind bei der Bewegung der Dielektrika nur solche Fälle behandelt worden, wo das Feld während der Rotation unverändert blieb. Benutzt man Dielektrika, welche keine Rotationskörper sind und teilt man noch die Belegungen in einzelne isolierte Sektoren, so erhält man in denselben Wechselströme, welche man, wie in § 19 und § 20, mit dem Telephon nachweisen kann.

Läßt man eine biskuitartige Hartgummiplatte über einer gut leitenden Glasplatte im elektrostatischen Felde Torsionsschwingungen ausführen, so werden diese Schwingungen durch die dabei entstehenden Konduktionsströme in der Glasplatte gedämpft. Nimmt man eine volle Hartgummischeibe, so erhält man keine Dämpfung ganz analog dem § 22. Alle diese Versuche sind leicht zu machen.

36. Endlich können noch bei der Bewegung des Dielektrikums im elektrostatischen Felde Verschiebungsströme entstehen und es ist die Frage zu beantworten, ob solche Ströme auch ein magnetisches Feld erzeugen. Diese wichtige Frage ist bekanntlich indirekt durch die Hertzschen Versuche im positiven Sinne schon beantwortet; aber es ist dennoch wünschenswert, einen direkten Beweis dafür zu liefern. Der einzige direkte Versuch in dieser Richtung ist von Röntgen¹⁾ gemacht worden; die Versuche von S. P. Thomson²⁾ (mit Telephon), von Nikolaiew³⁾ (Induktion) sind nicht einwandfrei und indirekt; endlich sind noch die Versuche von R. Blondlot⁴⁾ und J. Whitehead⁵⁾ zu erwähnen, obgleich die letztgenannten Verfasser aus ihren Versuchen den Schluß ziehen, daß eine magnetische Wirkung des Verschiebungsstromes überhaupt nicht vorhanden wäre. Aber sogar die mit Erfolg angestellten Versuche können schon deshalb keine befriedigende Antwort geben, weil sie alle nur einen qualitativen Charakter haben. Der einzige Versuch, der hier in Betracht genommen werden kann, ist der von Röntgen und da ich im Prinzip dieselbe Methode benutzt habe, so will ich kurz den Röntgenschen Versuch beschreiben.

Eine horizontale Ebonitscheibe von 16 cm Durchmesser und 0,5 cm Dicke rotiert um eine vertikale Achse zwischen zwei unbeweglichen ringförmigen Stanniolbelegungen. Die untere Belegung ist in zwei voneinander isolierte Halbringe eingeteilt, welche immer entgegengesetzt geladen werden; die obere Be-

1) W. C. Röntgen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 195. 1885; Rep. d. Phys. 21. p. 521. 1885.

2) S. P. Thomson, Proc. Roy. Soc. 45. p. 392. 1889.

3) W. de Nikolaiew, Journ. de Phys. 4. p. 245. 1895.

4) R. Blondlot, Journ. de Phys. 1. p. 8. 1902.

5) J. B. Whitehead jr., Physik. Zeitschr. 4. p. 229. 1903.

legung ist dauernd zur Erde abgeleitet. Bei jeder Umdrehung der Scheibe wechselt in derselben die Polarisierung zweimal ihr Zeichen und es entstehen an der Trennungslinie der Halbringe zwei vertikale Verschiebungsströme, welche entgegengesetzt gerichtet sind. Dicht über der oberen Belegung ist eine empfindliche Magnetnadel aufgehängt; ihre Mitte befindet sich in der Verlängerung der Drehungsachse, und ihre Richtung ist parallel mit der Trennungslinie der Halbringe. Beide Verschiebungsströme müssen auf die Nadel in gleichem Sinne wirken. Beim Kommutieren der Ladung während der Rotation der Scheibe erhielt Röntgen im günstigsten Falle einen doppelten Ausschlag von 1,5 mm bei 3 m Skalenabstand und erst nach einer großen Übung „konnte Röntgen bei seinen letzten Versuchen die Ablenkungsrichtung fast ausnahmslos richtig angeben“. ¹⁾ Aus dieser Beschreibung ist zu ersehen, daß es wünschenswert ist erstens eine größere Sicherheit in der Beobachtung zu erzielen und zweitens quantitative Resultate zu erhalten, welche einen Vergleich mit der Theorie erlauben. Außerdem ist noch zu beweisen, daß die beobachteten Ablenkungen von der magnetischen Wirkung der Verschiebungsströme und nicht der Konvektionsströme (§ 29) herrühren; diese letzte Wirkung wechselt nämlich auch ihr Zeichen mit dem Sinne der Ladung und der Rotation.

37. Wie gesagt, habe ich im Prinzip dieselbe Methode benutzt wie Röntgen, die Anordnung war aber eine andere. Eine vertikale Hartgummischeibe $A'B'$ (Fig. 13) kann um eine horizontale Achse rotieren. Die Scheibe ist am Rande 1,25 cm dick, in der Mitte aber nur etwa 0,5 cm, sodaß sich am Rande ein 1,5 cm breiter Hartgummiring bildet. Parallel mit der Scheibe sind zwei unbewegliche Mikanitplatten mit ringförmigen Stanniolbelegungen aufgestellt. Der Abstand zwischen A und B ist 1,50 cm, sodaß $AA' = BB' = 0,125$ cm ist. Die Belegungen sind in Halbringe geteilt und lassen oben und unten je einen Zwischenraum von 1 cm frei. Um den früher benutzten Rotationsapparat nicht umzubauen, ließ ich die Scheiben wie früher im magnetischen Meridian rotieren, den über dem oberen

1) W. C. Röntgen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. z. Berlin p. 197. 1885.

Rande der Scheibe aufgehängten Magnetometer M aber um 90° gedreht. Die Magnetnadel mußte jetzt in der Ostwestrichtung stehen und das konnte leicht durch den Astasierungsmagneten erzielt werden. Wird die Scheibe in

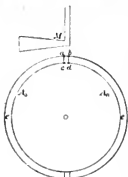


Fig. 13.

Rotation versetzt und alle Halbringe paarweise entgegengesetzt geladen, so entstehen bei ac und bd (Fig. 13 und 15) Verschiebungsströme, welche die Magnetnadel ablenken. Betrachten wir den ganzen Apparat von oben (Fig. 15) und ist der nördliche Halbring An mit $+e$, der nördliche Halbring Bn mit $-e$ und die südlichen Halbringe entgegengesetzt den nördlichen geladen, so muß bei der Bewegung des Dielektrikums in der Pfeilrichtung (Fig. 15) ein Verschiebungsstrom

von A nach B entstehen. Die Versuche zeigen, daß die Nadel ns wirklich der Richtung dieser Verschiebungsströme entsprechend abgelenkt wird. Die Ablenkungen wechseln ihr Zeichen mit dem Sinne der Ladung und der Rotation.



Fig. 14.



Fig. 15.

Wird der ganze Ring A mit gleichnamiger Elektrizität geladen, die Halbringe Bs und Bn aber mit ungleichnamiger, so reduzieren sich die Ablenkungen der Magnetnadel auf die Hälfte. Werden endlich die Halbringe so leitend verbunden, daß die Ringe A und B entgegengesetzt, aber ihre Hälften gleichnamig geladen werden, so erhält man keine Ausschläge der Nadel. Im letzteren Falle entsteht nämlich bei der Bewegung keine Änderung der dielektrischen Polarisation, wohl aber ein Konvektionsstrom (§ 28); bei der hier gewählten symmetrischen Lage der Nadel können die Konvektionsströme, welche senkrecht zu der Magnetnadel verlaufen, auf dieselbe keine Wirkung ausüben, und der Versuch bestätigt auch dieses vollkommen.

38. Um die magnetischen Wirkungen des Verschiebungsstromes mit den Wirkungen eines galvanischen Stromes zu

verglichen, werden vor dem Versuche an den Hartgummiring vier Halbringe aus Zink mit ein wenig Wachs angeklebt, ganz entsprechend den Stanniolbelegungen des Kondensators. (In den Figg. 13, 14 und 15 müssen jetzt die Belegungen an die Hartgummischeibe fest angelegt gedacht werden, dann stellen sie die Zinkhalbringe vor.) An den Punkten a , b , c und d sind an die Halbringe feine Drähtchen angelötet, welche durch die Hartgummischeibe hindurch gehen und die auf den entgegengesetzten Seiten der Scheibe angeklebten Zinkhalbringe miteinander leitend verbinden, und zwar in der Weise, daß a mit a' , b mit b' (Fig. 15) etc. verbunden werden. Schickt man jetzt einen bekannten galvanischen Strom in der Richtung $A_s . a . a' . B_s$ einerseits und einen zweiten Strom in der Richtung $B_n . b' . b . A_n$, so fallen die Richtungen dieser Ströme mit denen der fingierten Ströme zusammen. Die Teile dieser Stromkreise, welche mit aa' , bb' etc. bezeichnet sind, sollen den Verschiebungsströmen, welche bei der Bewegung im Dielektrikum entstehen, äquivalent sein. In Wirklichkeit aber kommt der Verschiebungsstrom nicht in den einzelnen Stromfaden aa' etc. zu stande, sondern in den zwei Flächen aca' und bdb' ; wir machen also hier denselben Fehler wie in § 5, welcher aber, wie eine annähernde Rechnung zeigt, bei dem großen Abstände der Magnetnadel (1,5 cm) von aa' und bb' kleiner als die Beobachtungsfehler (etwa 5 Proz.) ausfällt.

Die Versuche wurden in folgender Reihenfolge angestellt. Zunächst werden die Zinkhalbringe an die Hartgummischeibe angeklebt, zusammengelötet und der ganze Apparat zusammengestellt. Sodann dreht man die Scheibe so, daß der Punkt σ (Fig. 13) an dem Magnetometer zu stehen kommt und sucht eine solche Stellung der Nadel ns auf, bei welcher die Wirkung des in den Halbringen $A_n . b . b' . B_n$ zirkulierenden galvanischen Stromes ein Minimum wird. (Bei einer idealsymmetrischen Aufstellung müßte das Minimum gleich Null sein, weil die Ströme senkrecht zu der Nadel verlaufen.) Jetzt dreht man die Scheibe zurück, bis der Zwischenraum in den Zinkhalbringen mit dem Zwischenraum in den Stanniolbelegungen zusammenfällt und beobachtet die Ausschläge b der Nadel beim Kommutieren des Stromes i in den Zinkhalbringen; die Nadel muß dabei dieselbe Nulllage haben, welche in dem vorher-

gegangenen Versuche ausgesucht wurde; das kann leicht durch einen kleinen Richtmagneten vom Beobachtungsplatze aus erzielt werden. Dieselbe Nulllage der Nadel muß auch bei den Versuchen mit den Verschiebnungsströmen beibehalten werden.

Bei mir war $i = 4 \cdot 10^{-5}$ Amp.; $b = 49,6$ mm bei 2 m Skalenabstand. Rückt der Punkt e an das Magnetometer, so erhält man Ausschläge der Magnetnadel, die kleiner als 1 mm sind und nur bei $i = 20 \cdot 10^{-5}$ Amp. erhielt ich einen doppelten Ausschlag von 4 mm. Der Fehler ist also kleiner als 2 Proz. und kann vernachlässigt werden.

Die Größe des Verschiebnungsstromes kann man folgendermaßen berechnen. Ist ϵ die Dielektrizitätskonstante und E die elektrische Kraft, so ist bekanntlich der Verschiebungsstrom

$$(i) = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{dE}{dt}.$$

Bei uns bleibt aber E unverändert mit der Zeit und außerdem wollen wir annehmen, daß sich bei der Bewegung *nur in der Materie* ein Verschiebnungsstrom bildet, der Äther aber in Ruhe bleibt; dann ist

$$(i) = \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} \cdot E \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{(\epsilon - 1)E}{4\pi} S n,$$

wo S die ganze Fläche eines Ringes A und n die Umdrehungszahl in der Sekunde bedeutet. Es ist aber bei homogenem Felde

$$S = 4\pi C d \quad \text{und} \quad E = \frac{V}{d},$$

also

$$(i) = (\epsilon - 1) C V n.$$

Endlich muß man noch berücksichtigen, daß nicht der ganze Zwischenraum mit dem Dielektrikum ausgefüllt ist und die Größe ϵ durch die Größe K (§ 28) ersetzt werden muß.

Beobachtet man während der Rotation der Scheibe beim Kommutieren der Ladung einen Ausschlag a , so muß wie früher sein

$$\frac{(K - 1) C V n}{a} = \frac{i}{b}.$$

Die Rechnung haben wir für ein homogenes Feld durchgeführt. Bei einem unhomogenen Felde, welches wir notwendigerweise

bei unseren Versuchen benutzen müssen, bedeutet $(K - 1)C$ die Kapazitätsvergrößerung, welche bei einem Luftkondensator AB eintritt, wenn in denselben eine Hartgummiplatte $A'B'$ eingeschoben wird. Ich habe $(K - 1)C$ direkt bestimmt und erhielt $(K - 1)C = 0,9 \cdot 10^{-11}$ Farad. Auf diese Weise habe ich die Ausschläge a der Magnetnadel berechnet und sie mit den beobachteten verglichen, wie es in der Tab. X angegeben ist.

Tabelle X.

V	n	a		Diff.
		beob.	ber.	
3000	± 65	+2,0	$\pm 2,2$	-0,2
		-2,0		-0,2
6250	± 65	+4,9	$\pm 4,5$	+0,4
		-4,7		+0,2
3000	± 110	+3,0	$\pm 3,7$	-0,7
		+3,8		+0,1
6250	± 110	+8,0	$\pm 7,7$	+0,3
		-7,9		+0,2
3000	± 134	+4,4	$\pm 4,5$	-0,1
		+4,2		-0,3
6250	± 134	+9,8	$\pm 9,4$	+0,4
		-9,6		+0,2

Obgleich die Übereinstimmung der Beobachtung und Rechnung auch hier eine gute ist, so muß ich dennoch bemerken, daß ich diesen Versuchen nur eine Genauigkeit bis etwa 10 Proz. beilegen kann. Wahrscheinlich kompensieren sich teilweise die verschiedenen hier vorkommenden Fehler. Außerdem wanderte der Nullpunkt der Nadel während der Zeit einer Ablesung um etwa 2 mm, was bei der Kleinheit der beobachteten Ausschläge schon einen bemerkbaren Einfluß auf den Mittelwert haben kann. Ich habe immer 10 Ablesungen nacheinander gemacht und dann durch einen Richtmagneten die Nadel auf die frühere Stelle gebracht. Ein Hilfsstrom c diente auch hier, wie bei allen früheren Beobachtungen, zur Kontrolle der Empfindlichkeit der Magnetnadel.

Durch diese Versuche ist also direkt gezeigt worden, daß auch der *Verschiebungsstrom ein magnetisches Feld erzeugt und zwar von der Größe, welche von der Theorie verlangt wird.*

39. Diese Versuche zeigen außerdem, daß der Verschiebungsstrom, welcher bei der Bewegung des Dielektrikums in einem unhomogenen elektrischen Felde entsteht, nicht der Änderung der gesamten Polarisierung des Dielektrikums mit der Zeit, sondern nur der zeitlichen Änderung der Polarisierung der bewegten Materie gleich ist. Wir haben nämlich unsere Versuche nach der Formel $(K-1)CFn$ und nicht nach der Formel $KCFn$ berechnet (vgl. § 33). Dieser Verschiebungsstrom ist ja nichts anderes, als die Fortsetzung des Konvektionsstromes, welchen wir an den beiden Seiten der bewegten dielektrischen Scheibe fingieren müssen. In der Tat zeigt auch die auf p. 438 durchgeführte Rechnung, daß beide Ströme dieselbe Größe haben. Der ganze Stromkreis, Konvektionsstrom + Verschiebungsstrom erscheint hier ganz in derselben Weise geschlossen, wie unser galvanischer Strom i , welchen wir vor dem Versuche durch die Zinkhalbringe geschickt haben.

Vergleichen wir diesen Versuch mit dem Versuche in § 21¹⁾, wo die Konduktionsströme, welche durch Bewegung des Leiters in einem unhomogenen Felde entstehen, beobachtet wurden, so finden wir, daß beide Versuche ganz analog erscheinen. In beiden Fällen entstehen in den bewegten Körpern Wechselströme, welche bei dem Magnetometer, ebenso wie bei jedem unbeweglichen Punkte immer mit derselben Phase vorbeigehen und so im äußeren Raume ein statisches magnetisches Feld erzeugen. Auch im Falle eines bewegten Leiters wird der Konvektionsstrom K durch zwei Konduktionsströme G zu einem geschlossenen Stromkreise ergänzt.

Bei reiner elektrischer Konvektion ist der Konvektionsstrom in sich selbst geschlossen.

Wir schließen also, daß alle von uns beobachteten Ströme (Konvektions-, Leitungs- und Verschiebungsströme) stets *geschlossene* Stromkreise bilden.

1) A. Eichenwald, Ann. d. Phys. 11. p. 28. 1903.

Resultate.

In der vorliegenden Arbeit sind die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde unter möglichst variierten Versuchsbedingungen *quantitativ* untersucht worden. Es wurden Geschwindigkeiten bis zu etwa 150 m in der Sekunde und Feldstärken bis zu etwa 30 C.G.S. gebraucht. Die Messungen können mit Fehlern in *maximo* bis zu etwa 10 Proz. behaftet sein.

Unter allen diesen Beschränkungen lassen sich die Ergebnisse unserer Versuche folgendermaßen kurz zusammenstellen.

1. Bei der Bewegung der Körper im elektrostatischen Felde entstehen im allgemeinen Konvektions-, Konduktions- und Verschiebungsströme; alle diese Ströme sind in Bezug auf magnetische Wirkungen den Wirkungen eines galvanischen Stromes von gleichem numerischen Betrage völlig äquivalent.

2. Im Falle reiner elektrischer Konvektion sind die Bewegungen und die magnetischen Wirkungen der bewegten Ladungen unabhängig voneinander. Die Ladungen haften an der Materie.

3. Alle von uns beobachteten Ströme bilden stets geschlossene Stromkreise.

4. Die Versuche sind mit der Annahme eines überall auch in den bewegten Dielektrika ruhenden Äthers im Einklange.

Zum Schluß will ich noch bemerken, daß ganz analoge Gesetze auch für die Bewegung der Körper im magnetischen Felde gelten müssen; nur haben wir keinen „wahren“ Magnetismus.

Moskau, Ingenieur-Hochschule, Februar 1903.

(Eingegangen 9. März 1903.)

**11. Über eine Abänderung
des Rowland-Gilbertschen Versuches;
von Peter Lebedew.**

Die interessanten Versuche, welche Gilbert¹⁾ auf Veranlassung von H. Rowland angestellt hat, um elektrische Ströme in Leitern durch deren Bewegung im Äther zu erzeugen und hierdurch eine experimentell begründete Erklärung des Ursprunges des Erdmagnetismus zu gewinnen, haben bekanntlich kein positives Resultat ergeben.

Da die auftretende Wirkung der Geschwindigkeit des Leiters proportional sein muß, so habe ich es versucht, die geringe im Laboratorium zu erzielende Geschwindigkeit durch die tausendmal größere Bahngeschwindigkeit der Erde (30 km pro Sekunde) zu ersetzen. Der gewählten Versuchsanordnung liegt sowohl die Rowlandsche Hypothese zu Grunde, daß an den Enden eines linearen Leiters, welcher in seiner Längsrichtung (im Äther) bewegt wird, eine Potentialdifferenz entsteht, als auch eine weitere Hülfshypothese, daß diese Potentialdifferenz unter gleichen Bedingungen für chemisch verschiedene Leiter verschieden groß ist; stellt man hiernach



Fig. 1.

zwei parallele gleich lange Drähte aus *Kupfer* (Cu) und *Nickelin* (Nn) (Fig. 1) in die Richtung der Bahnbewegung der Erde und verbindet das eine Endenpaar miteinander,

so muß zwischen dem anderen Endenpaare eine konstante Potentialdifferenz entstehen, welche einen ununterbrochen dauernden Strom im Galvanometer *G* erzeugen wird.

Für die Versuche wurden 500 *Kupferdrähte* (Dicke = 1,5 mm) und 500 *Nickelindrähte* (Dicke = 2,35 mm) von je 75 cm Länge

1) N. Gilbert, Phil. Mag. (6) 3. p. 361. 1902.

genommen, welche in derselben Weise wie die Elemente einer Mellonischen Thermosäule hintereinander geschaltet waren und in einem dickwandigen Holzkasten *K* (Fig. 2) eingebettet wurden; ein biegsamer Doppelleiter *L* führte zum Galvanometer *G*. Der Kasten *K* saß auf einer vertikalen Achse *A* und konnte mittels des Hebels *H* nach allen Richtungen der Windrose gedreht werden; er trug oben einen Zapfen *P*, um welchen eine zur Erde abgeleitete, fast geschlossene Zinkhülle *ZZ* ununterbrochen und unabhängig vom Kasten rotieren konnte; die Zinkhülle *ZZ* (Fig. 2 im Durchschnitt) wurde durch einen Motor angetrieben und es zeigte sich, daß nach einer fünfstündigen Rotation sich die Temperaturen im Innern des Kastens *K* genügend ausglich und die Differenz der Temperaturänderungen der beiden Enden des Drahtbündels kaum $0,02^{\circ}\text{C}$. pro Stunde erreicht.

Der Gesamtwiderstand der Drähte betrug 35 Ohm, der des Galvanometers 80 Ohm; um die Galvanometerempfindlichkeit bestimmen zu können, war in den Stromkreis ein Widerstand von 1 Ohm eingeschaltet, an dessen Enden eine elektromotorische Kraft von $6 \cdot 10^{-7}$ Volt (Galvanometerausschlag ca. 10 Skt.) angelegt werden konnte (vgl. Fig. 2).

Um die stets vorhandenen thermoelektrischen Kräfte zu eliminieren, wurden die Galvanometerablesungen für eine bestimmte Stellung des Kastens *K* gemacht und hierauf die Achse *A* um 180° gedreht; 10 bis 30 aufeinander folgende Ablesungen, welche durch gleiche Zeitintervalle (30 Sek.) getrennt waren, bildeten eine Beobachtungsreihe.

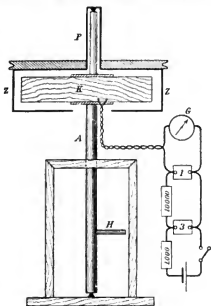


Fig. 2.

Die Beobachtungen wurden im Dezember 1902 zur Mittagszeit gemacht; in die NS-Richtung fällt dann die Komponente der Bewegung des Sonnensystems, und in die OW-Richtung die Bahnbewegung der Erde.

Die sechs definitiven Beobachtungsreihen ergeben übereinstimmend, daß eine elektromotorische Kraft, welche $3 \cdot 10^{-8}$ Volt überschreitet und einer Temperaturdifferenz der Lötstellen von $3 \cdot 10^{-6}$ Grad C. äquivalent wäre, bei diesen Versuchen **nicht** nachgewiesen werden konnte.

Moskau, Physikal. Laborat. d. Univ., im Februar 1903.

(Eingegangen 5. März 1902.)

12. *Über den Energieumsatz in der Mechanik.
Berichtigung;
von Hans Januschke.*

Unter diesem Titel hat Hr. Zemplén Győző einen Aufsatz¹⁾ in diesen Annalen veröffentlicht, in welchem die Bedingungen für die Gültigkeit des *Ostwaldschen Prinzipes der Energieumwandlungen* untersucht werden. Bei dieser Gelegenheit wird darauf hingewiesen, daß dem genannten Prinzip in meinem Buche über das Prinzip der Erhaltung der Energie in der Naturlehre²⁾ (p. 12 u. 105) eine zu weit gehende Bedeutung beigemessen werde. Es sei mir gestattet, hier zu skizzieren, daß dies nicht der Fall ist. Meine Beispiele beziehen sich auf die Bewegung auf einer schiefen Fläche, auf die Wurf- oder Zentralbewegung und auf die Pendelbewegung. Zur Begründung verweise ich dort auf den Satz, daß die resultierende Bewegung stets in der Richtung der größtmöglichen Arbeitsleistung erfolgt (p. 12 u. 35). Da ich bei den angeführten Erscheinungen die mathematische Formulierung des Nachweises nicht gegeben habe, möge dieselbe für die Zentralbewegung kurz notiert werden.

Das *Energieprinzip* kann in folgender selbstverständlichen Form geschrieben werden:

$$P \cdot dr - m v \cdot dv = 0,$$

1) Zemplén Győző, Ann. d. Phys. 10. p. 419. 1903.

2) H. Januschke, Das Prinzip d. Erh. d. Energie i. d. Naturlehre. Teubner 1897.

wenn P die Zentralkraft angibt. Ist die Länge eines Bahnelementes ds , $\sphericalangle(r ds) = \alpha$ und der Winkel zweier aufeinander folgender Bahnelemente gleich β , dann läßt sich das Ostwaldsche *Prinzip des Arbeitsmaximums* durch die Gleichung darstellen:

$$P \frac{dr}{ds} \cdot ds + \frac{1}{2} m v^2 \cos^2 \beta - \frac{1}{2} m v^2 = \text{Maximum.}$$

Der *Energieumsatz* besteht nämlich in der Arbeit der Zentralkraft P längs des Weges ds und in der Änderung der lebendigen Kraft infolge der Richtungsänderung von v . Wie eine einfache Reduktion zeigt, ist diese zugleich der Verlust an lebendiger Kraft in der Richtung der Fliehkraft; die Gleichung läßt sich nämlich auch so schreiben:

$$P \cdot \cos \alpha \cdot ds - \frac{1}{2} m v^2 \cdot \sin^2 \beta = \text{Maximum.}$$

Es ergibt sich aus der Gleichwertigkeit der lebendigen Kraft und der Arbeit der Fliehkraft, nämlich aus $\frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \beta = m v \cdot (dv/dn) dn$, daß Zentral- und Fliehkraft zusammen die größte Arbeit leisten. Die Bedingung für das Maximum ist

$$- P \sin \alpha d\alpha ds - m \cdot v^2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot d\beta = 0.$$

Hierin ist $\sphericalangle \alpha + \beta = \sphericalangle(v r)$ bei gegebener Richtung von v und P im betrachteten Bahnelemente konstant, daher $d\beta = -d\alpha$. Aus diesen Beziehungen und $dn = ds \cdot \sin \beta$, wobei dn das Wegelement der Fliehkraft ist (oder auch aus $\frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \beta = m \gamma \cdot \frac{1}{2} \gamma r^2$), folgt die Bedingung

$$P \cdot \sin \alpha = m v \cdot \frac{dv}{dn} \cdot \cos \beta$$

oder, wenn $\cos \beta = 1$ gesetzt wird,

$$P \cdot \sin \alpha = m v \cdot \frac{dv}{dn},$$

d. h. die Komponente der Zentralkraft in der Richtung der Bahnnormalen ist der Fliehkraft des betreffenden Bahnelementes

gleich und entgegengesetzt. Beide Kräfte heben einander gegenseitig auf und die andere Komponente der Zentralkraft, welche in der Bahnrichtung wirkt, leistet das geforderte Maximum der Arbeit; denn diese Komponente ist zugleich die Resultierende aus der ganzen Zentralkraft und der Fliehkraft. In diesem Sinne habe ich das Ostwaldsche Prinzip in meinem Buche geltend gemacht.

Bei einer Bewegung auf vorgeschriebener Bahn muß die Arbeit der geweckten Elastizität in die Bedingung für das Arbeitsmaximum aufgenommen werden.

Hr. Zemplén stellt neben dem Energieprinzip das Ostwaldsche Prinzip des größten Energieumsatzes in folgender Form auf:

$$T_{i+r} - T_i = \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2) = \text{Maximum}$$

und als Bedingung hierfür

$$\delta(T_{i+r} - T_i) = m(\dot{u} \cdot \delta \dot{u} + \dot{v} \cdot \delta \dot{v} + \dot{w} \cdot \delta \dot{w}) = 0.$$

Der letztere Ausdruck gibt aber doch keinen anderen physikalischen Inhalt als der erstere, nichts anderes als die Änderung der lebendigen Kraft längs eines Bahnelementes; er soll ein *Maximum*, aber nicht gleich *Null* sein.¹⁾ Es fehlt also die eigentliche Formulierung des Ostwaldschen Prinzips; die vorstehende Bedingungsgleichung stimmt mit demselben nicht überein und es können daher auch die Folgerungen daraus zur Beurteilung des Prinzips nicht verwendet werden.

In meinem Buche fanden analytische Entwicklungen keine Anwendung; es lag mir deshalb auch fern, durch analytische

1) In der Form

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = m v \left(\frac{dv}{ds}\right) ds + m v \left(\frac{dv}{dn}\right) dn = \text{Maximum}$$

stimmt derselbe mit der obigen Darstellung des Energieumsatzes genau überein.

Behandlung des vorstehenden Ausdruckes das Ostwaldsche Prinzip zu bestätigen. Wie oben angedeutet wurde, habe ich den Energieumsatz bewirkt gedacht durch die Arbeit der *Resultierenden* aus der Zentralkraft, Fliehkraft und in einem besonderen Falle auch der Elastizität und diese Arbeit ist eine *Maximalleistung*; somit wird auch dem Ostwaldschen Prinzipie entsprochen. Vorstehende Skizze soll die betreffenden Anschauungen eingehender erläutern.

(Eingegangen 27. Februar 1903.)

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 11.

1. VI. Niederschlagsmembranen und Zellen in Gallerten oder Lösungen von Leim, Eiweiß und Stärke; von G. Quincke.¹⁾

§ 107. *Grenzflächenspannung von Silberchromatleim gegen wässrige Flüssigkeiten.* Bei der Einwirkung wässriger Lösungen von Natriumbichromat oder Kaliumbichromat und Silbernitrat entstehen braunrote, durchsichtige Kristalle von Silberbichromat; bei Gegenwart von Leim eine öltartige Flüssigkeit, die eine merkliche Oberflächenspannung an der Grenze mit der umgebenden wässrigen Flüssigkeit besitzt.

Zwei Glasröhrchen von $6 \times 0,5$ mm wurden mit einer wässrigen Lösung von Natriumbichromat (1,009) gefüllt, nebeneinander auf einen Objektträger unter ein Deckglas gelegt, und unter das Deckglas ein Tropfen Silbernitratlösung (1,014) gebracht. Als die letztere Lösung von beiden Seiten in das Glasröhrchen eingeflossen war, zeigten sich plötzlich gut ausgebildete rote, durchsichtige und doppeltbrechende Kristalle ($0,02 \times 0,003$ mm) von Silberbichromat und ein schwarzes Pulver mit hellen runden Stellen oder Löchern, die auf Kreisen oder Kreisbogen von $0,03$ — $0,08$ mm Durchmesser lagen. Die Kristalle erscheinen außerhalb des Röhrchens und sind kleiner, wenn sich das $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ außerhalb, und das AgNO_3 innerhalb des Röhrchens befindet.

Ganz anders gestaltet sich die Erscheinung, wenn man dieselben Salzlösungen bei Gegenwart von Leim zusammenbringt.

Das Glasröhrchen wurde mit einer $\frac{1}{20}$ Normallösung von $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ mit 12 Proz. β -Leim (spezifisches Gewicht 1,0210)

1) G. Quincke, Fortsetzung von Ann. d. Phys. 7. p. 57—96, 631—682, 701—744. 1902; 9. p. 1—43, 796—836, 969—1045. 1902; 10. p. 478—521, 673—703. 1903; 11. p. 54—95. 1903.

gefüllt und eine $\frac{1}{20}$ Normallösung von AgNO_3 mit 12 Proz. β -Leim (spezifisches Gewicht 1,0225) wurde unter das Deckglas gebracht. Das Natriumbichromat strömt langsam aus dem horizontalen Gläseröhrchen bei *O* in das Silbernitrat unter Wirbelbildung ein. An der Berührungsstelle beider Flüssigkeiten entsteht ein periodischer Niederschlag von Silberbichromat, der sich im umgebenden Leim auflöst zu einer braunen ölartigen Flüssigkeit, welche dünne Häute mit Oberflächenspannung an der Grenze mit den leimhaltigen wässerigen Salzlösungen bildet. Diese dünnen ölartigen Häute bilden wieder um die Ausflußöffnung *O* zwanzig oder mehr radiale Schläuche mit kugelförmigen oder elliptischen Anschwellungen. Die von β -Leim nicht gelösten Teilchen von Silberbichromat schwimmen in diesen ölartigen Häuten und machen sie dadurch sichtbar. Die ölartigen Schläuche enden in birnförmige Köpfe, welche mit salzarmer oder spezifisch leichterer Flüssigkeit gefüllt sind, wie Luftballons in der umgebenden Flüssigkeit in die Höhe steigen und dann plötzlich nach der Ausströmungsöffnung *O* hingezogen werden.

An der äußeren Oberfläche dieser Ballonhüllen breitet sich in kurz aufeinander folgenden Perioden eine Flüssigkeit *C* aus, welche in periodischem Wechsel von der Öffnung *O* aus an die Ballonhüllen herantritt und diese dann durch die Ausbreitungswirbel nach dem Ausbreitungszentrum und der Ausströmungsöffnung *O* hinzieht, wie ich früher¹⁾ nachgewiesen habe. Die Flüssigkeit *C* ist wahrscheinlich die salzarme Leimlösung, die durch Ausfällung von $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ entstanden ist, und an der Grenze des Silberchromatleims *A* mit der umgebenden Flüssigkeit *B* sich ausbreiten muß, da sie in beiden Flüssigkeiten *A* und *B* löslich ist.

Die mit den Ballons verbundenen Schläuche hängen durch den Rest einer dünnen, den ursprünglichen Wirbel begrenzenden Ölhaut zusammen, aus der in gleichen Abständen von der Achse des Wirbels und voneinander die dünnen Schläuche entstanden sind. Alle Teile der dünnen ölbedeckten Schläuche haben wegen der Oberflächenspannung das Bestreben sich zusammenzuziehen und besitzen gleichzeitig von der voraus

1) G. Quincke, Wied. Ann. 35. p. 580. 1888.

gegangenen Wirbelbewegung noch eine Rotationsgeschwindigkeit. Aus beiden Kräften resultiert nun eine komplizierte Bewegung in der stark klebrigen Flüssigkeit. Die Ölhaut wird durch Auflösen von Silberbichromat dunkelbraun und schon in sehr dünnen Schichten sichtbar. Sie bildet schließlich ein schönes kompliziertes Schaumnetz mit Randwinkeln von 120° , einem Vogelkäfig aus Drahtgeflecht ähnlich, dessen braunen Wände leise zittern, während sie sich unter dem Einfluß der Flüssigkeitsströmung verschieben und vergrößern. Diese braunen flüssigen Wände lösen sich allmählich in der umgebenden Flüssigkeit, werden gelb und verschwinden.

Die Erscheinungen verlaufen ähnlich, wenn man 8- oder 16proz. Lösung von β -Leim statt 12proz. Leimlösung verwendet, oder Lösungen von $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ und AgNO_3 von doppelter Konzentration ($1/10$ normal), oder wenn das $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ durch $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ersetzt wird.

Mit dem Querschnitt der Glasröhrchen nimmt die Anzahl der radialen Schläuche zu, die von der Öffnung O ausgehen und kugelförmige Anschwellungen bilden. Mit $1/20$ Normallösungen von $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ und AgNO_3 in 8proz. β -Leim entstanden 72 radiale Schläuche bei einem Röhrchen von 0,95 mm Durchmesser, und 30 radiale Schläuche bei einem Röhrchen von 0,61 mm Durchmesser.

Bringt man umgekehrt in das Glasröhrchen von 1 mm Durchmesser die $1/10$ Normallösung von AgNO_3 mit 6proz. β -Leim (1,063) und unter das Deckglas außerhalb des Glasröhrchens die äquimolekulare $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ -Lösung mit 16, 8 oder 0 Proz. β -Leim vom spez. Gewicht 1,060, 1,030 oder 1,009, so strömt die Bichromatlösung langsam von beiden Seiten in das Glasröhrchen ein. Beide Ströme treffen mit den abgerundeten Köpfen in der Röhrchenmitte zusammen und bleiben hier durch eine ebene oder kugelförmige helle Scheidewand von 0,033 mm Dicke getrennt, die erst nach 1—2 Min. verschwindet.

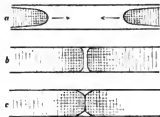


Fig. 151.

Fig. 151, a, b, c gibt drei aufeinander folgende Zustände dieser Strömungskuppen. Parallel der Röhrchenachse ent-

stehen an der Grenze von Silbernitrat und einströmender Bichromatlösung braune Linien mit Anschwellungen und seitlichen rückläufigen oder rechtläufigen Wirbeln in gleichen Abständen voneinander. Auf diese Wirbel werde ich an einer anderen Stelle näher eingehen. Je nachdem Bichromatlösung mit 16, 8 oder 0 Proz. β -Leim verwandt wurde, bildeten sich zwei, vier oder sechs solcher braunen Linien aus, deren Zahl also mit der Klebrigkeit der einströmenden Flüssigkeit abnimmt.

Zuweilen floßen mehrere Ströme von Bichromatlösung im oberen Teil des Glasröhrchens ein und Silbernitratlösung im unteren Teile des Glasröhrchens aus. Die in das Glasröhrchen einströmende Flüssigkeit bildete Anschwellungen und Einschnürungen wegen der Oberflächenspannung des öltartigen Silberbichromatleims an ihrer Oberfläche. Die ausströmende Flüssigkeit bildete Wirbel, die sich kreisförmig um die Ausströmungsöffnung ausbreiteten. In der Grenzfläche der Lösungen von $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ und AgNO_3 entstanden in kleinen Abständen voneinander periodische Niederschläge von braunem öltartigen Silberbichromatleim, die als wellenförmige, scharf begrenzte braune Falten auf der zylindrischen Oberfläche des strömenden Flüssigkeitsfadens oder am Rande der Flüssigkeitswirbel auftraten (ähnlich wie bei dem öltartigen Cu_2FeCy_6 in § 25 Fig. 12—15) und sich später in der umgebenden Flüssigkeit lösten (vgl. § 23).

Bringt man an die Leimlösung, welche durch Auflösen von Silberbichromat eine gelbbraune, zähe, homogene Flüssigkeit geworden ist, Wasser unter das Deckglas auf dem Objektträger, so scheiden sich wieder öltartige Lamellen aus, die als helle Linien auf gelbbraunem Grunde erscheinen und Schaumwände mit Neigungswinkeln von 120° bilden. Die zähe Flüssigkeit dieser Schaumwände wird nach den Schaumkanten und deren Kreuzungspunkten hingezogen und bildet dort mehr oder weniger kugelförmig begrenzte Flüssigkeitsmassen. An der Außenwand dieser hellen Fäden oder Schaumwände scheidet sich bei weiterer Einwirkung des Wassers unlösliches Silberbichromat (oder eine Leimverbindung desselben) in unlöslichen dunkelbraunen Körnchen ab, und umhüllt die hellen Linien. Nach einiger Zeit lösen sich die hellen Linien, Schaumwände

und Schaumkanten in der umgebenden Flüssigkeit auf und verschwinden. Es ist interessant zu sehen, wie zwei von drei hellen Schaumwänden mit Neigungswinkeln von 120° beim Verschwinden der einen Schaumwand, da deren Oberflächenspannung mit der Dicke abnimmt, allmählich einen immer größeren Neigungswinkel einschließen, bis dieser 180° geworden ist, und die beiden übrig gebliebenen Schaumwände eine einzige Schaumwand bilden (Fig. 152, a, b, c).

Entstehen Schaumwände aus öltartigem Silberbichromatleim an der Grenze von zwei Leimlösungen verschiedener Konzentration, so ist der Neigungswinkel der Schaumflächen in der leimreicheren Flüssigkeit ein spitzer Winkel, d. h. die Oberflächenspannung des öltartigen Silberchromatleims ist an

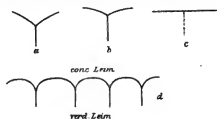


Fig. 152.

der Grenze mit verdünnter Leimlösung größer, als an der Grenze mit konzentrierter Leimlösung (Fig. 152, d).

Die eben erwähnten hellen Schaumwände bilden sich auch beim Einfließen von Wasser in das mit flüssigem braungelben Silberchromatleim gefüllte Glasröhrchen. Die beiden gegeneinander fließenden Flüssigkeitsströme sind von einer braunen und einer diese umhüllenden hellen Kreislinie begrenzt, platten sich am Kopfende beim Aufeinandertreffen ab und bleiben durch eine ebene oder kugelförmige Grenze voneinander getrennt, die sich erst allmählich in der umgebenden Flüssigkeit auflöst, wobei wieder der Neigungswinkel der beiden anderen Flächen allmählich von 120° in 180° übergeht (Fig. 152, a, b, c).

Bei dem Mischen von Wasser mit der gelbbraunen Lösung von Silberchromatleim scheiden sich Luftblasen ab mit einer hellen klaren Hülle. Auf der Außenfläche dieser öltartigen Hülle breitet sich auch Flüssigkeit (Wasser oder verdünnte

Leimlösung?) aus, die Luftblase wird nach dem Ausbreitungszentrum hingezogen und läßt einen hellen Faden ölartiger körnchenfreier Flüssigkeit hinter sich.

Floß aus einem hohlen Glasfaden $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat, dem so viel β -Leim zugesetzt war, daß eine Flüssigkeit vom spez. Gewicht 1,044 entstand, in einen Glas- trog von $10 \times 10 \times 1$ cm mit wässriger Natriumbichromatlösung vom spez. Gewicht 1,018, so entstand ein Flüssigkeitsstrahl mit braunen Körnchen in der Grenze beider Flüssigkeiten. Dieser Strahl bildete Wirbel, die sich längs des Strahles verschoben, sich einholten, durcheinander schlüpfen, wieder einholten etc. Dabei zeigte der Flüssigkeitsstrahl Anschwellungen, die zum größten Teil, aber nicht ganz, von Wirbelwirkung herrührten (Fig. 153, a, b).

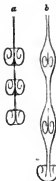


Fig. 153.

Ähnliche Flüssigkeitsfäden mit Anschwellungen und Wirbeln im Innern gab ein Glasstab mit eingetrocknetem Silberchromatleim nach dem Einhängen in den mit Wasser gefüllten Glasrog.

Wirbelbildungen ähnlicher Form sind schon 1872 von J. Bosscha ¹⁾ beobachtet worden.

§ 108. *Bildung von Silberbichromat in Gallerte von α -Leim.* Silberbichromat gibt nicht nur mit β -Leim, sondern auch mit gewöhnlicher Gelatine (α -Leim) und Wasser braune ölartige Flüssigkeit.

Gleiche Volumina von $\frac{2}{10}$ Normallösungen von AgNO_3 und $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ mit 10 Proz. Gelatine wurden im Wasserbade erwärmt, gemischt und in einen frisch gezogenen hohlen Glasfaden aufgesogen, der Glasfaden an einem Ende zugeschmolzen, in eine Glasröhre mit Wasser von 100° gebracht und mit dieser erkalten gelassen. Der Glasfaden enthielt dann eine dunkelbraune erstarrte Masse von $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ in Gelatinegallerte gelöst. Mit dem Glasmesser wurden Stücke von 6—10 mm Länge und 0,25—0,67 mm Durchmesser abgeschnitten, paarweise nebeneinander auf einen Objektträger unter ein Deck-

1) J. Bosscha, Jr. Acad. Amsterdam 30. Sept. 1871; Institut 1872. p. 135, 142; Fortschritte der Physik 28. p. 166. 1872.

glas gelegt und ein Tropfen 17 proz. Lösung von β -Leim unter das Deckglas gebracht. Der Objektträger wurde in einer feuchten Kammer unter einer Blechkappe gegen Licht und Verdunstung geschützt. Die Silberhichromatgallerte löste sich in der β -Leimlösung auf (im Laufe von 1, 7 und 9 Tagen auf einer Strecke von 1,7, 3,4 und 4 mm vom Ende der Röhrchen), wurde dabei gelbbraun und durchsichtig und ließ unter dem Mikroskop Schaummassen erkennen, in deren Wänden dunkle Körnchen von 0,002 mm oder kleiner auf Kreisen von 0,015—0,075 mm Durchmesser lagen. Daneben waren größere Blasen — kugelförmig, elliptisch oder langgezogen mit Einschnürungen — sichtbar, in deren Innerem dunkelbraune Massen lagen (Fig. 154, a). Auch einzelne Luftblasen hatten sich abgeschieden, in deren Nähe die Masse schwach doppelbrechend war. Nach acht Tagen hatten sich die Schaummassen vermehrt. In der grauen Masse an beiden Enden der Röhrchen ließen sich in Abständen von 0,5 mm helle und

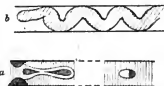


Fig. 154.

dunkle Schichten erkennen, normal zur Röhrenwand mit ebenen oder kugelförmigen Grenzflächen. Das Mikroskop zeigte in diesen Schichten viele auf Kreisen angeordnete kleine Körner, die in den dunklen Stellen zahlreicher vorhanden waren, als an den hellen Stellen. In der Mitte der Röhrchen war die Flüssigkeit klar und Körnchen frei. In der Nähe der Öffnung zeigten sich schraubenförmige Schaumwände, in welchen dunkle Körnchen von 0,0008 mm auf kugelförmigen Hohlräumen von 0,012—0,028 mm Durchmesser verteilt lagen.

Ähnliche schraubenförmige Schläuche bildeten sich, wenn man zu dem in den Röhrchen eingetrockneten Silberhichromatleim Wasser brachte (Fig. 154, b).

Man kann das Silberhichromat auch allmählich in der Gallerte entstehen lassen.

$\frac{2}{10}$ Normallösung von AgNO_3 oder $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ mit 10 Proz. Gelatine (spez. Gewicht 1,050) wurde in einem Wasserhade erwärmt in frisch gezogene Glasfäden von 0,5—1,25 mm Durchmesser aufgesogen, der Glasfaden am unteren Ende zuge-

schmolzen, in eine Glasröhre mit Wasser von 100° gehängt und mit diesem erkalten gelassen. Von dem Glasfaden mit der erstarrten Gallerte wurden mit dem Glasmesser Stückchen von 8—10 mm Länge abgeschnitten, paarweise nebeneinander unter ein Deckglas auf einen Objektträger gelegt und ein Tropfen $\frac{1}{10}$ Normallösung $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ oder AgNO_3 unter das Deckglas gebracht.

Oder es wurden 30—40 mm lange Stücke des Glasfadens mit dem unteren Ende in ein kleines Becherglas gestellt, das mit diesen Lösungen gefüllt war. Die Röhrchen wurden nur während der Beobachtungen unter einer Blechkappe fortgenommen, welche sie vor Licht und Verdunstung schützte.

In den Röhrchen mit Silbernitratgallerte, die in Natriumbichromatlösung eingestellt waren, entstanden in 20 Stunden acht braune Schichten, die oben weiter voneinander entfernt waren, als unten. Diese braunen Schichten sind schon von Liesegang¹⁾ mit Ammoniumbichromat erhalten, genau beschrieben und gemessen und *A*-Linien genannt worden. Dieselben hilden sich auch, wenn man wässrige Lösung von Silbernitrat in Röhrchen mit Bichromatgallerte aufsteigen läßt. In diesem Falle fand Liesegang den Abstand der braunen Schichten, die er als Silberbichromat auffaßt, um so größer, je mehr sie vom unteren Ende der Röhren entfernt waren, und bei verschiedener Konzentration des Silbernitrats um so kleiner, je größer die Konzentration war.

Die braunen Schichten bestehen, wie aus meinen oben beschriebenen Versuchen folgt, aus ölartigem Silberbichromatleim und sind häufig von Kugelflächen begrenzt. Oft hilden die braunen Schichten in der Nähe des Röhrenendes eine zusammenhängende Schraubenfläche, wie bei einem Korkenzieher, oder lassen noch deutlich erkennen, daß sie aus den einzelnen Windungen einer solchen Schraube entstanden sind,



Fig. 155.

deren Flächen nahezu normal zur Oberfläche des Glasröhrchens lagen (Fig. 155).

1) R. Ed. Liesegang, *Chemische Reaktionen in Gallerten* p. 43—48. 8°. Düsseldorf 1898; vgl. auch unten § 113.

Die braunen Schichten bilden sich in Röhrchen, welche oben offen oder zugeschmolzen sind, und in welche Bichromatlösung von unten eintritt, in gleicher Weise aus. Bei Röhrchen unter einem Deckglas, in welche von beiden Enden die Bichromatlösung eintritt, liegt die zuletzt entstandene braune Schicht um so näher dem Röhrende, je kürzer die Röhre ist.

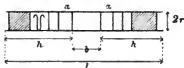


Fig. 156.

Nennt man (Fig. 156) l die Länge der Röhrchen, $2r$ den Durchmesser, h den Abstand der letzten braunen Schicht vom Ende des Röhrens, b die Breite des reaktionsfreien Raumes in der Mitte des Röhrens zwischen den beiden letzten Schichten, α den Abstand der letzten von der vorletzten Schicht, so ergab sich:

Diffusion von $\frac{1}{10}$ Natriumbichromatlösung in $\frac{1}{10}$ Silbernitratgallerte (mit 10 Proz. Leim.)

$l =$	28 mm*	11,8 mm	9,2 mm	5,8 mm
$2r =$	0,7 mm*	1,27 mm	1,0 mm	1,0 mm
Zeit	h			
2,5 ^b	2,4 mm	—	—	—
5	3,8	4,3 mm	3,4 mm	2,4 mm
30	8,8	5	4,2	2,4
240	10,8	5,2	4,2	2,4
	α			
2,5	0,4	—	—	—
5	0,7	1,5	0,6	0,3
30	2,0	1,2	0,6	0,6
240	1,7	0,2	0,7	0,5
	b			
5	—	3,8	1,4	0,2
30	—	1,5	1,4	0,2
240	—	1,4	1,2	0,2

Für die mit * bezeichnete Röhre fand die Diffusion nur einseitig statt.

Aus diesen Versuchen folgt, daß sich Silberbichromatleim in längeren Zwischenräumen oder periodisch abscheidet. Die von beiden Seiten in das Röhren eindringenden Diffusions-

ströme stauen sich in der Mitte des Röhrchens; dringen um so langsamer vor, je kürzer das Röhrchen ist und bilden in der Mitte einen reaktionsfreien Raum, dessen Breite δ um so schmaler ist, je kürzer das Röhrchen ist.

Die braunen Schichten von Silberbichromatleim entstehen auf einer größeren Strecke, wenn die Bichromatlösung nur von einer Seite in das Röhrchen eindringt, als wenn sie von beiden Seiten eindringt.

Bei einem anderen Versuch an längeren Glasfäden mit Silbernitratgallerte wurden die beiden offenen Enden der Glasfäden auf demselben langen Objektträger mit zwei verschiedenen Deckgläschen bedeckt und unter jedes Deckgläschen ein Tropfen Bichromatlösung gebracht.

Diffusion von $\frac{1}{10}$ Natriumbichromatlösung in $\frac{1}{10}$ Silbernitratgallerte (mit 10 Proz. Leim).

	$l = 35 \text{ mm}$	$2r = 0,7 \text{ mm}$	
Zeit	h	a	b
Tage			
0,8	6,8 mm	1,6 mm	21,4 mm
2	11,6	2,2	11,7
3	13,2	2,2	8,3
4	13,2	1,8	8,3
6	13,2	1,8	8,3
8	14,3	1,7	8,3

Aus den vorstehenden Beobachtungen ersieht man, daß nach drei Tagen die letzten braunen Schichten von Silberbichromatleim in 13,2 mm Entfernung von den Enden lagen, 2,2 mm von der vorhergehenden Schicht entfernt waren und einen reaktionsfreien Raum von 8,3 mm begrenzten. Die Lage dieser Schichten änderte sich dann nicht weiter. Nach vier Tagen bildete sich an den Enden der Röhrchen eine weißliche



Fig. 157.

Schicht von 1,5 mm Breite, und die braunen Schichten zerfielen allmählich in Körnchen und Kristalle (Fig. 157). Die

Kristalle, an denen keine Doppelbrechung wahrzunehmen war, zeigten sich auf der Außenseite der braunen Schichten und

waren Würfel von 0,008 mm Kantenlänge, Tetraederzwillinge von 0,012 mm oder kleiner, und einzelne nicht deutlich ausgebildete Granatoeder. Die Kristalle waren wohl aus runden Blasen abgeschieden worden. Die größeren Kristalle lagen zunächst der braunen Schicht, die kleinen Kristalle weiter entfernt nach dem offenen Röhrchenende zu.

Ähnliche verschieden große blasenförmige Abscheidungen auf konvexen Flüssigkeitskuppen habe ich oben beschrieben bei Niederschlägen von CaCO_3 aus wässerigen Lösungen von CaCl_2 und K_2CO_3 (Fig. 59, § 38) oder bei MnSO_4 , Wasser und Alkohol (Fig. 74, a, § 50).

Ähnliche braune Schichten und Kristalle bildeten sich, wenn Röhrchen mit $\frac{2}{10}$ normaler Natriumbichromatlösung und 10 Proz. α -Leim in wässrige $\frac{2}{10}$ normale Silbernitratlösung gelegt wurden, oder wenn man Röhrchen mit Silbernitratlösung von größerer Konzentration (zwei Grammoleküle im Liter) und 10 Proz. α -Leim unter einem Deckglas in $\frac{1}{10}$ Kalibichromatlösung brachte.

Die braunen Schichten waren in letzterem Fall von konkaven oder konvexen Kugelflächen begrenzt und verschwanden, als die Glasröhrchen in Wasser eingelegt wurden. An Stelle der braunen Schichten und in ihrer Nachbarschaft traten zahlreiche Schaumwände und Blasen von 0,015 mm auf, oder durchsichtige blartige Fäden mit Anschwellungen und Einschnürungen, die 0,06 mm voneinander entfernt normal zur Glaswand lagen und sich langsam zusammenzogen.

§ 109. *Bildung von Zellen aus Kupferchromat, Eisenchromat, Ferrocyan kupfer bei Gegenwart von Leim.* Die in § 108 beschriebenen Versuche wurden in der Art abgeändert, daß das Silbernitrat durch Kupfersulfat oder Eisenchlorid ersetzt wurde.

Bringt man Glasröhrchen mit $\frac{1}{30}$ Normallösung von Natriumbichromat und 10 Proz. Gelatine unter ein Deckglas mit Kupfersulfatlösung (1,155) oder Eisenchloridlösung (1,004), so bilden sich an beiden Röhrenenden kugelförmige Blasen oder Röhren mit Einschnürungen und Anschwellungen (Fig. 158). Die dicken gallertartigen Wände der Blasen und Röhren, in denen man drei konzentrische Schichten unterscheiden kann,

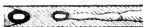


Fig. 158.

zeigen schwache, die Gallerte außerhalb starke Doppelbrechung mit Hauptschnitt normal zu dem abgerundeten Kopfende der Röhren.

In Wasser quellen die Blasen von Eisenchromatleim schnell auf und bilden Schaummassen mit dünnen Wänden ohne Doppelbrechung, welche Ponceaurot aus dem umgebenden Wasser aufspeichern. Die Zellen und Blasen aus Kupferchromatleim quellen in Wasser langsam auf und bewahren dabei ihre dicke Wandung und Doppelbrechung.

Bei Zusammenbringen von $\frac{1}{20}$ Normallösungen von Ferrocyankalium und Kupfersulfat, die beide $\frac{1}{4}$ Proc. Gelatine enthielten, bildeten sich Röhren mit geschlossenen Enden und

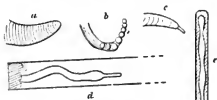


Fig. 159.

Querrippen oder aneinander gereihete Blasen von 0,03 mm Durchmesser (Fig. 159, a, b, c), schraubenförmige Röhren oder Röhren mit Einschnürungen (Fig. 159, d, e) aus.

Röhrchen mit Natriumbromat und 10 Proz. Gelatine bildeten in verdünnter wässriger Lösung von Natriumsilicat an den Röhrenden kugelförmige Blasen mit dicken gallertartigen Wänden, die zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen das Krenz der Sphärokristalle zeigten. In wenigen Stunden vergrößerten dieselben ihr Volumen bedeutend und verloren die Doppelbrechung, während in der Gallerte im Innern der Glasröhrchen jetzt starke Doppelbrechung auftrat.

Die Gegenwart des Leims beeinflusst also auch hier die Oberflächenspannung und Form der gebildeten ölartigen Niederschläge, aber in geringerem Maße, als bei Silberbromat (§ 108).

§ 110. *Flüssige Niederschläge oder Niederschlagmembranen von AgCl, AgBr und AgJ.* Bei dem Zusammenbringen von wässrigen Lösungen von Silbernitrat und Natriumchlorid ent-

steht ein Niederschlag von Silberchlorid, der kurze Zeit flüssig bleiben und eine Oberflächenspannung zeigen kann, ehe er erstarrt.

Röhrchenmethode. Zwei Glasröhrchen mit $\frac{2}{10}$ Normallösung von Silbernitrat (1,280) wurden unter ein Deckglas auf einen Objektträger gelegt und eine $\frac{1}{10}$ Normallösung von Natriumchlorid in Wasser (1,005) unter das Deckglas gebracht. Die Kochsalzlösung fließt in den oberen Teil des Glasröhrchens ein, bildet einen hellbraunen Schланч mit Einschnürungen und kolbenartigem Ende, das unter dem Einfluß der Oberflächenspannung des öartigen Silberchlorids Kugelgestalt annehmen will und sich verkürzt oder zurückzieht, ehe es zu einer dunkelbraunen Masse erstarrt (ähnlich wie Fig. 158). Zuweilen entstehen in der hellbraunen Haut des Schlauches 10 bis 20 dunkle Querrippen von 0,04 mm Breite (ähnlich wie Fig. 159, a) oder ein schraubenförmig gewundener Schlauch mit 4 bis 5 Windungen. Die Schlauchwand verdickt sich aber schnell, wird nach 0,5 Sek. undurchsichtig und dann sind die Querrippen nicht mehr wahrzunehmen. Die aus den Glasröhrchen unter das Deckglas geflossene Lösung von Silbernitrat bildet mit dem Natriumchlorid braungelbe, kugelförmige Blasen oder Schaumwände mit faltigen Rändern, wie ich sie früher (Fig. 14 und 15, § 25) bei Cu_2FeCy_6 beschrieben habe, und eine braune, zitternde Schaummasse, die auch schnell erstarrt und zu Körnchen zerfällt.

Mit verdünnter Silbernitratlösung ($\frac{1}{10}$ oder $\frac{2}{10}$ normal) oder konzentrierter Kochsalzlösung erhielt ich Niederschläge von AgCl , an welchen nur unter günstigen Umständen oder gar nicht eine Oberflächenspannung wahrzunehmen war.

Ähnliche hellbraune Niederschläge wurden erhalten, wenn zu Silbernitratlösungen ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ oder $\frac{1}{100}$ normal) in Glasröhrchen von 1—1,5 mm Durchmesser unter einem Deckglas äquivalente Lösungen von KBr oder KJ gebracht wurden.

Beim Einfließen von $\frac{1}{10}$ AgNO_3 -Lösung in $\frac{1}{10}$ KBr -Lösung, oder umgekehrt beim Einfließen von KBr - in AgNO_3 -Lösung entstehen an der Berührungsfläche beider Flüssigkeiten hellbraune Wände von öartiger Flüssigkeit, deren vorderer Rand sich verlängert und Falten bildet, oder sich zu zylindrischen Röhren aufrollt oder braune Röhren mit Astlöchern zeigt und

nach 1 Min. oder länger in viele dunkelbraune Körnchen zerfällt, die in der umgebenden wässerigen Flüssigkeit zu Boden sinken.

Bei der Einwirkung von $\frac{1}{100}$ Normallösungen von AgNO_3 und KBr bildeten sich nach kurzer Zeit dicke braune Wände unter dem Deckglas, die zusammenflossen, Randwinkel von 120° einschlossen und sich allmählich, scheinbar ohne Körnchenbildung, in der umgebenden Flüssigkeit auflösten, wobei der Winkel von 120° beim Auflösen der gegenüberliegenden Schaumwand allmählich in 180° überging.

Ähnliche dicke braune Scheidewände entstanden ferner bei Einwirkung von $\frac{1}{50}$ Normallösungen von AgNO_3 und KJ , doch blieben sie viel kürzere Zeit flüssig.

Die Niederschläge von AgBr entstehen periodisch in kurzen Zwischenräumen, erscheinen im reflektierten Licht weißlich, ziehen sich wegen der Oberflächenspannung zusammen oder zurück, haben das Bestreben sich in Falten zu legen und bilden unter dem Deckglas leise zitternde Schaummassen, die nach einigen Minuten, zuweilen erst nach längerer Zeit, sich in der umgebenden Flüssigkeit auflösen, oder in viele braune Körnchen zerfallen.

Ähnlich wie KBr verhält sich KJ , das in sehr verdünnten Lösungen ($\frac{1}{100}$ normal) auch langgestreckte Röhren mit Einschnürungen bildete.

Hebermethode. Läßt man in der oben (§ 26, Fig. 17) beschriebenen Weise Silbernitratlösung ($\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{100}$ normal) vom spezifischen Gewicht 1,014 bis 1,0014 aus einem Heberrohr von 0,35 mm Durchmesser in einen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm fließen, der mit übereinander geschichteten Lösungen von NaCl , KBr oder KJ verschiedener Konzentration ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{35}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$ normal und den spezifischen Gewichten 1,040, 1,008, 1,0016, 1,0003, 1,00006) gefüllt ist, wie dies oben § 26 näher beschrieben wurde, so entsteht ein Schlauch mit glatter Oberfläche von weißlichem AgCl , AgBr oder AgJ , dessen Wanddicke und Durchmesser schnell zunimmt, der häufig wellen- oder schraubenförmig wird, am unteren Ende einen Wirbel von der Form eines hängenden Tropfens bildet und dann in zwei dünnere Schläuche mit zwei Wirbeln am Ende sich verzweigt, in der zuerst von Tomlinson beschriebenen

Weise (vgl. § 47 und 79). Diese Wirbeltropfen teilen sich wieder in zwei dünnere Schläuche mit Wirbeltropfen am unteren Ende etc. An den gegen die Vertikale geneigten Stücken am oberen Ende des Schlauches entstehen neue Wirbel in gleichen Abständen voneinander, die sich auch senken und teilen, und so entstehen schließlich 20 bis 30 feine vertikale Fäden mit kugelförmigen Anschwellungen und einem birnförmigen Tropfen am unteren Ende, die sich schwach abstoßen, sehr langsam sinken und genau aussehen, als wären sie unter dem Einfluß der Oberflächenspannung der öartigen Haut des Schlauches von AgCl entstanden. Mit einem Mikroskop und starker Vergrößerung erkennt man aber in diesen Anschwellungen und Tropfen wirbelnde Massen und viele feine Körnchen, die sich im Innern schnell nach unten und an der Außenseite sehr langsam nach oben bewegen. Die feinen Fäden zeigen häufig Wellenlinien und sind noch nach Stunden sichtbar. Schließlich fällt das AgCl in kleinen Körnchen auf den Boden des Glastroges. Ähnliche verzweigte Strahlen mit Anschwellungswirbeln und Wirbeltropfen habe ich oben (§ 47) bei Zinksulfat und (§ 79, Fig. 117, 118, *a* und *b*) bei Schwefelösungen, (§ 107, Fig 153, *a*, *b*) bei Silberbichromat beschrieben.

Kurz unter der Heberöffnung hat der Schlauch von AgCl eine glatte Haut mit Oberflächenspannung. Aber bald entstehen auch Wirbel hinter- und nebeneinander, die aufeinander einwirken, gegenseitig Gestalt und Fortpflanzungsgeschwindigkeit beeinflussen, sich längs des Schlauches mit verschiedener Geschwindigkeit verschieben und häufig Gestalten zeigen, wie sie sonst nur unter dem Einfluß der Oberflächenspannung sich bilden (Fig. 160, *a*—*d*). Ich werde auf diese merkwürdigen Erscheinungen an einer anderen Stelle zurückkommen.

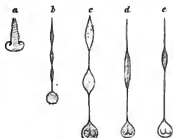


Fig. 160.

Man erhält ähnliche Erscheinungen mit Lösungen von KBr und KJ , wie mit solchen von NaCl .

Floß eine $\frac{1}{100}$ Normallösung von Silbernitrat in verdünnte wässrige Lösungen von NaCl, KBr oder KJ ($\frac{1}{625}$ normal) ein, so zeigte der Schlauch unter der Hebermündung nacheinander die Gestalt *a*, *b*, *c*, Fig. 161 nach 10 Sek., nach 90 Sek. oder etwas später. Mit NaCl entstand ein Schlauch mit Wirbeltropfen am unteren Ende; mit KBr ein Säckchen von der Gestalt eines hängenden Tropfens, das in einen Schlauch mit Anschwellungen und einem Wirbeltropfen am unteren Ende überging; mit KJ ein Säckchen, das ebenfalls in einen Schlauch mit kugelförmiger Anschwellung und einem Wirbeltropfen am unteren Ende überging.

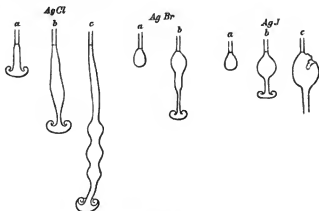


Fig. 161.

Durch die von ölarziger Flüssigkeit gebildete Hülle des Schlauches tritt also Wasser von außen in das Innere des Schlauches ein und vergrößert seinen Durchmesser, während gleichzeitig die Oberflächenspannung der ölarzigen Hülle die Anschwellungen hervorruft. Die Anschwellungen und die Oberflächenspannung sind hiernach am größten bei AgJ, am kleinsten bei AgCl. Bei AgBr scheint die Schlauchhülle am längsten flüssig zu bleiben, ehe sie erstarrt.

Benutzt man weniger verdünnte Lösungen, so steigen vom oberen Teile des Schlauches geschlossene Glocken mit salzärmer und spezifisch leichterer Flüssigkeit gefüllt in die Höhe, die später schwerer werden und herabsinken.

Diese Erscheinung, sowie die Auflösung der dicken braunen Schaumwände und das Zerfallen derselben in braune Körnchen weisen darauf hin, daß der öltartige Niederschlag an der Grenze von Silbernitratlösung mit den verdünnten Lösungen der Haloidsalze ein Hydrat von AgCl , AgBr , AgJ ist, das nach einiger Zeit Wasser abgibt, erstarrt und zu Boden sinkt, in ähnlicher Weise, wie die oben (§ 25 u. f.) beschriebenen öltartigen Niederschläge von K_4FeCy_6 mit den Salzen von Kupfer, Eisen etc.

Läßt man in den Glastrog mit den übereinander geschichteten Lösungen von NaCl , KBr und KJ von verschiedener Konzentration aus dem Heber $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat einfließen, so bilden sich dicke Flocken von AgCl , AgBr , AgJ (oder deren Hydrate), die sich an die Glaswand ansetzen und dort haften bleiben, besonders auf der dem Sonnenlichte zugewandten Seite. Die Flocken zeigen also positive Photodromie. Die an der Glaswand haftenden Flocken sind weniger zahlreich bei AgCl , als bei AgBr und AgJ , und beweisen ebenfalls, daß die Niederschläge des Silbers mit den Haloidsalzen kürzere oder längere Zeit flüssig gewesen sind.

Die fallenden Flocken bilden breite Schraubenflächen oder Wellenlinien von nahezu konstanter Ganghöhe und nach unten abnehmendem Durchmesser, welche später in horizontale Flockenschichten mit einem der Ganghöhe entsprechenden Abstand übergehen (Fig. 162), ähnlich den schraubenförmigen Gebilden bei Schwefelrübungen (Fig. 118, b, § 79).

§ 111. *Niederschlagmembranen von AgCl , AgBr , AgJ bei Gegenwart von β -Leim. Rührchenmethode.* Die im vorigen Paragraphen beschriebenen Erscheinungen werden ganz andere, wenn man in die Glasröhrchen unter dem Deckglas $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat mit 12 oder 6 Proz. β -Leim füllt und einen Tropfen $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{100}$ Normallösung von NaCl , KBr , KJ unter das Deckglas bringt.

Die Salzlösung strömt von beiden Seiten langsam in das Röhrchen ein, beide Ströme treffen in der Mitte des Röhrchens

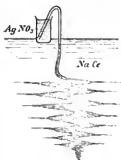


Fig. 162.

mit abgerundeten Köpfen zusammen, stauen sich hier (wie oben in Fig. 151, § 107), erscheinen kurze Zeit durch eine helle Linie getrennt, und fließen ineinander. An der Grenze der Silbernitrat- und Haloidsalzlösung bilden sich unter dem Einfluß der Oberflächenspannung der ölartigen Niederschlagsmembran und der wirbelnden Flüssigkeit merkwürdige Wirbeltropfen aus, ähnlich denjenigen, welche ich oben bei Silberchromatleim beschrieben habe. Die zähe Silbernitratlösung fließt aus dem Röhrchen in die Salzlösung unter dem Deckglas und bildet zitternde Schaummassen mit Scheidewänden und Randwinkeln von 120° .

Man kann auch einen Tropfen Silbernitratlösung mit 12 oder 6 Proz. β -Leim an den Rand der Salzlösung unter dem Deckglas hringen und die Bildung der ölartigen Niederschläge von Silberhaloidleim unter dem Deckglase beobachten. Bei $\frac{1}{10}$ Normallösung von NaCl entstanden zahlreiche Röhrchen mit kugelförmigen Köpfen, die mit salzarmer Flüssigkeit gefüllt wie Luftballons in die Höhe stiegen. In $\frac{1}{1}$ Normallösung von NaCl zeigten sich viele helle Scheidewände mit Randwinkeln von 120° . Verschwand eine Scheidewand allmählich durch Auflösen, so ging der Randwinkel der heiden anderen Scheidewände allmählich in 180° über. Ähnliche Erscheinungen zeigten sich in Lösungen von KBr und KJ. Bei Silbernitrat mit großem Leimgehalt lösen sich die Schaumwände bald auf. Silbernitrat mit 6 Proz. β -Leim bildete Körnchen, die zu Boden sanken. Bei AgBr lösten sich die Schaumwände schneller und war die Körnchenbildung geringer, als bei AgCl und AgJ.

Hebermethode. Die Oberflächenspannung des ölartigen Silberhaloidleims läßt sich noch besser an der Form der Strahlen erkennen, welche vertikal aus einer Heberöffnung von 0,5 mm Durchmesser in einen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm mit übereinander geschichteten Lösungen von NaCl, KBr oder KJ verschiedener Konzentration ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$ normal) einfließen. Die Strahlen fließen zuerst vertikal und bilden dann Schraubenlinien, deren Ganghöhe nach unten abnimmt (wie Fig. 64, § 46). Sie zerfallen 1 mm unter der Heberöffnung in Wirbeltropfen. Es war bei

$\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat in β -Leim:

	In Lösungen von	NaCl	KBr	KJ
Die Höhe des längsten Schraubenganges	bei 24 Proz. Leim	11,9 mm	7 mm	6,7 mm
	" 12 " "	12,6	5,5	5,2
	" 6 " "	13,5	{ zuweilen schraubenförmig	
Die Länge l des Strahles über den Wirbeltropfen	bei 24 Proz. Leim	49 mm	33 mm	18 mm
	" 12 " "	34	27	17
	" 6 " "	14	7,5	(5)
Länge l_0 des vertikalen oberen Teiles des Strahles	bei 24 Proz. Leim	18 mm	4 mm	2,5 mm

Die schraubenförmige Gestalt des Strahles entsteht unter dem Einfluß der Oberflächenspannung der ölartigen Niederschlagmembran an der Grenze von Leim und Haloidsalz. Sobald die Dicke dieser Schicht kleiner als die doppelte Wirkungsweite der Molekularkräfte ist, muß an den Stellen größerer Strömungsgeschwindigkeit und größerer Stoffzufuhr eine dickere Haut von ölartigem Silberhaloidleim mit größerer Oberflächenspannung entstehen und eine konkave Krümmung des Schlanthes auftreten.

Unter sonst gleichen Bedingungen wird der Einfluß der Oberflächenspannung der ölartigen Niederschlagmembranen sich um so stärker geltend machen, je größer die Oberflächenspannung ist und je länger sie besteht. Die Viskosität einer Silbernitratlösung war wesentlich durch ihren Leimgehalt bestimmt und für Strahlen in den drei verschiedenen Salzlösungen gleich groß. Man wird daher aus der kleineren Höhe der Schraubenwindungen schließen können, daß für AgBr-Leim und AgJ-Leim die Oberflächenspannung größer war, als für AgCl-Leim. Ebenso löste sich die ölartige Niederschlagmembran von Silberhaloidleim in der umgebenden Flüssigkeit schneller bei AgBr und AgJ, als bei AgCl, da die Länge des vertikalen oberen Schlauchteils l bei letzterem größer war, als bei den beiden ersten.

Bei Silbernitratlösung mit 6 Proz. β -Leim zeigte der in die Haloidsalzlösung einfließende Strahl nur zeitweise schraubenförmige Gestalt. Kurz unter der Hebermündung hatte er in NaCl und KBr eine glatte Oberfläche und eine längliche Einschnürung, unterhalb welcher er sich mit einer dünnen Schanm-

masse überzog, die in einzelnen Flocken losgerissen wurde. In KJ zeigte er dagegen unter der Hebermündung eine starke Anschwellung, die sich mit dünnen Schaummassen bedeckte (Fig. 163).

Es bildete sich also auch bei dem geringen Gehalt von 6 Proz. β -Leim an der Berührungsfläche von Silbernitrat und Salzlösung eine ölartige Haut mit einer gewissen Oberflächenspannung, die bei AgJ am größten war und am schnellsten wieder verschwand.

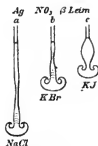


Fig. 163.



Fig. 163a.

Die Reihenfolge der Silberhaloide ist dieselbe, wie ohne β -Leim und nähern sich die Eigenschaften der in Salzlösungen ausfließenden Strahlen von Silbernitrat mit verschiedenem Leimgehalt den oben § 110 beschriebenen ohne β -Leim um so mehr, je geringer der Leimgehalt ist.

Eine $\frac{1}{10}$ Normallösung von AgNO_3 mit 25 Proz. β -Leim, welche mehrere Jahre in einer zugeschmolzenen Glasröhre vor Licht geschützt gelegen hatte, gab beim Einfließen in einen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm mit KBr-Lösung (1,02) einen Strahl mit 4 bis 5 Spiralwindungen, der oben 0,1 mm und 19 mm tiefer 0,23 mm Durchmesser hatte. Unten zerfiel der Strahl in vertikale Fäden, die in Wirbeltropfen ausliefen, in gleichen Abständen auf den Schraubenwindungen verteilt waren, und auf einem braunen Zylindermantel von 4 mm Durchmesser lagen, der die Schraube umhüllte (Fig. 163a).

Von einzelnen Stellen der oberen Schraubenwindungen stiegen gerade Schlieren in die Höhe. Nach 18 Stunden hatten sich 6 Zickzackwindungen oranger Flockenschichten am unteren 50 mm hohen Teile der Lichtwand des Glastroges festgesetzt. Am folgenden Tage waren die Flocken an der Glaswand verschwunden, aber noch drei horizontale Schichten zu erkennen. Die oberste Schicht hellgelb, die mittlere gelb, die unterste braun gefärbt. Die Oberfläche der Flockenschichten war sehr empfindlich gegen Belichtung, auch durch gewöhnliches Tages-

licht, und lag in der Nähe der schmalen Tragwände gewöhnlich tiefer als in der Mitte. Die drei Flockenschichten hatten in aufeinanderfolgenden Tagen folgende Höhen

Höhe der Flockenschichten nach 1		2	3	4—6 Tagen	
Nr. 1	Hellgelb	12 mm	11 mm	6,3 mm	—
„ 2	Gelb	18	22	25	30 mm
„ 3	Braun	15	11	11	—
Gesamthöhe		45	44	42	30 mm

Nach vier Tagen war nur noch eine Flockenschicht von 30 mm Höhe sichtbar, die mehrere Tage unverändert blieb. Bei Belichtung der Flockenschicht 2 mit einem horizontalen Lichtkegel von Sonnenstrahlen mittels einer Linse von 8 cm Durchmesser und 30 cm Brennweite hob sich die obere Fläche der Schicht 2 um 12 mm, der Schicht 1 um 4 mm über der belichteten Stelle und sank bei Beschattung sofort wieder zurück. Die Flocken wurden also von unsichtbaren Luftteilchen getragen, die an den Flocken sich ausgeschieden hatten, daran hafteten und wie ein Cartesischer Taucher wirkten. Ähnliche horizontale Flockenschichten und eine ähnliche Wirkung des Lichtes habe ich früher beschrieben bei Trübungen von Mastix (§ 6), Kaolin (§ 9, 20), Kieselsäure (§ 31), alkoholischer Zinksulfatlösung (§ 47, Fig. 65), Leimtannat (§ 104).

Bei Belichtung mit elektrischem Bogenlicht beobachtete ich eine konkave Krümmung des oberen geraden Teiles des einfließenden Strahles auf der belichteten Seite und dadurch eine scheinbare negative Photodromie.

Floß der Silbernitratleim statt in KBr- in NaCl-Lösung (1,02) ein, so bildete er längere Schraubenwindungen und an der Lichtseite der Glaswand setzten sich neun horizontale graue Flockenschichten in gleichen Abständen auf einer 50 mm hohen Fläche fest.

§ 112. *Bildung von Silberchlorid und Silberbromid in Gallerte von α -Leim (Gelatine).* Läßt man AgNO_3 statt auf $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ auf NaCl oder KBr in einer Gallerte von α -Leim einwirken, so entstehen ebenfalls periodische Niederschläge und öltartige Schichten von Silberchloridleim und Silberbromidleim mit Oberflächenspannung an der Grenze mit der umgebenden wässrigen Flüssigkeit.

Lange Glasfäden von 0,6—1 mm Durchmesser wurden mit einer warmen wässrigen Lösung von NaCl ($\frac{1}{10}$ normal) und 10 Proz. Gelatine gefüllt, mit dem zugeschmolzenen Ende in Wasser von 100° gehängt und mit dem Wasser erkalten gelassen. Von den Glasfäden wurden zwei 10 mm lange Stücke mit dem Glasmesser gerade abgeschnitten, auf einen Objektträger unter ein Deckglas gelegt, ein Tropfen wässriger $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat unter das Deckglas gebracht und der Objektträger durch eine Blechkappe vor Licht und Verdunstung geschützt.

Nach drei Tagen zeigte jedes Glasröhrchen eine Reihe feiner weißlicher, von Kugelflächen begrenzter Schichten von 0,037 mm Abstand zu beiden Seiten eines 2 mm breiten, schichtenfreien Raumes in der Mitte des Röhrchens. Die Kugelflächen wandten bald die konkave, bald die konvexe Seite der Eintrittsstelle des Silbernitrats zu.

In einseitig zugeschmolzenen Röhrchen mit NaCl-Gelatine zeigten sich in derselben Zeit am offenen Ende auf einer Strecke von 20 mm feine Schichten von 0,21 mm Abstand. Hier war also das Silbernitrat viel weiter eingedrungen in die NaCl-Gallerte, als in den beiderseitig offenen Röhrchen.

Nach Einlegen der Glasröhrchen mit NaCl-Gelatine ($\frac{1}{10}$ normal) von 8,3 mm Länge und 0,6—1,2 mm Durchmesser in konzentrierte Silbernitratlösung ($\frac{1}{1}$ normal) entstanden im Dunkeln nach 10 Stunden feine von Kugelflächen begrenzte Schichten von weißlichem Silberchloridleim mit 0,026 mm Abstand zu beiden Seiten eines schichtenfreien Raumes von 1 mm Länge.

Röhrchen mit $\frac{1}{10}$ Normallösung von AgNO_3 und 10 Proz. Gelatine wurden unter einem Deckglas mit $\frac{1}{10}$ Normallösung von NaCl im Dunkeln zusammengebracht. Dieselben zeigten bei 10 mm Länge und 1,2—0,8 mm Durchmesser nach einiger Zeit 2 mm von den Enden 0,3 mm dicke Querwände, die von ebenen oder Kugelflächen begrenzt waren. Auf diese Querwände folgten 20 bis 30 gerade oder schwach gekrümmte Linien, deren Abstand 0,2—0,8 mm betrug und nach der Mitte des Röhrchens zunahm.

Diese Linien waren in der Mitte durch einen linienfreien oder reaktionsfreien Raum von 2—3 mm Länge getrennt und

erwiesen sich unter dem Mikroskop als Schraubenlinien, auf denen zahlreiche runde Körnchen von 0,0005 mm Durchmesser in kreisförmigen Schaumflächen von 0,005 bis 0,015 Durchmesser verteilt waren. Die Körnchen lagen auf den Schraubenlinien dichter, als zwischen denselben und waren in den mit geschmolzenem Paraffin verschlossenen Röhrchen noch nach zwei Jahren sichtbar. Bei schadhaftem Paraffinverschluß verdampft das Wasser allmählich und es bildeten sich kugelförmige Blasen oder schraubenförmig gewundene Schläuche, in deren Wänden viele Hohlinsen verteilt lagen (Fig. 164). In demselben Röhrchen konnte der Abstand der Schraubenlinien auf einer Seite halb so groß wie auf der anderen Seite sein.



Fig. 164.

Die Farbe der Körnchen war erst grau und später braun. Der reaktionsfreie Raum in den beiderseitig offenen Röhrchen konnte unter Umständen auch nur 0,12—0,15 mm Länge haben.

Wurden die Röhrchen mit $\frac{1}{10}$ AgNO₃ und 10 Proz. Gelatine im Dunkeln in $\frac{1}{10}$ KBr-Lösung, statt in NaCl-Lösung gebracht, so zeigten sich nach 4 Stunden in der Nähe der offenen Enden der Röhrchen feine Schichten von 0,05 mm Dicke, die von ebenen oder kugelförmigen Schichten begrenzt waren. Vor den Enden außerhalb des Röhrchens entstanden konzentrische, verschieden gefärbte kugelförmige Schichten oder periodische Niederschlagmembranen von ölartiger Flüssigkeit mit zahlreichen dicken, braunen kugelförmigen Schanmwänden im Innern. An den Enden oder im Innern der Röhrchen scheiden sich häufig Luftblasen ab, wie an der Grenze von heterogenen Flüssigkeiten. Die Gallerte war in der Nähe der feinen Schichten oder der Oberfläche der Luftblasen häufig doppeltbrechend. Die dicke, gallertartige Wand der Luftblasen zeigte zwischen gekreuzten Nicolschen Prismen das dunkle Kreuz der Sphärokristalle. Wurde die KBr-Lösung dann durch Wasser ersetzt, so wurden nach zwei Stunden 20 feine helle Linien oder Scheidewände sichtbar.

§ 113. *Frühere Versuche über die Bildung chemischer Niederschläge in Gallerten.* Die Bildung chemischer Niederschläge in Gallerten ist schon 1895 von N. Pringsheim und 1897 bis 1899 von R. Ed. Liesegang untersucht worden.

N. Pringsheim¹⁾ füllte eine Glasröhre mit warmer Gelatinelösung, ließ diese erstarren und von beiden Enden wässrige Lösungen von KCl und AgNO_3 (oder anderen Salzen — AgNO_3 und BaCl_2 oder K_2CrO_4 ; $\text{Pb}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$ und $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$; ZnSO_4 oder CuSO_4 und K_4FeCy_6 ; $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ und K_2CrO_4 —) in den horizontalen Gallertzylinder eintreten. Im Innern der Gallerte, wo die Diffusionsströme beider Salze sich treffen, bildete sich eine dünne Querwand von AgCl mit begrenztem Wachstum, wenn die benutzten Salzlösungen äquiproportional waren oder die Salzmenngen in der Volumeneinheit jeder Lösung chemisch äquivalent waren. Waren die Lösungen nicht äquiproportional, so wuchs der Niederschlag unbegrenzt und die neuen Schichten des Niederschlags setzten sich auf der Seite an, wo sich die molekular minderwertige Lösung befand. Der molekular mehrwertige Diffusionsstrom geht also durch den Niederschlag zu dem molekular minderwertigen über. Die dünnsten und die dichtesten dieser Niederschläge wachsen eine Zeitlang in die Dicke und sind permeabel, bevor sie ihr Wachstum sistieren und impermeabel werden. Die absolute Dicke, welche die Niederschläge mit begrenztem Wachstum erreichen, nahm mit der Länge des Gallertpfropfes zu.

Die Diffusionsströme der den Niederschlag bildenden Salze sollen beiderseits auf den Niederschlag einen Druck ausüben und es sei „nicht ausgeschlossen, daß die Erscheinungen, die man als osmotischen Druck bezeichnet, nur die resultierende Wirkung der Druckkräfte zweier Diffusionsströme ist, . . . die sich einander entgegen bewegen“.

Der Niederschlag braucht nicht dort, wo er in der Gallerte entstand, stehen zu bleiben, sondern er kann in einer ganz bestimmten Richtung langsam fortgeschoben werden, solange er sich nicht an die Glaswand angesetzt hat. Beim Entgegenwandern von Silbernitrat und Chlorbaryum wurde er nach letzterem hin verschoben, mochte letzteres molekular minderwertig oder mehrwertig sein. Eine Abhängigkeit der Verschiebungsrichtung von dem relativen Molekulargewicht der beiden Lösungen war nicht vorhanden. Bei Einwirkung von AgNO_3 auf KCl, CuSO_4 auf K_4FeCy_6 , K_4FeCy_6 auf ZnSO_4 ,

1) N. Pringsheim, Jahrb. f. wissensch. Botanik 28, p. 1—38. 1895.

$\text{Pb}(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_2$ auf $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ war ebenfalls die Verschiebung des Niederschlags stets nach dem zuletzt genannten Salze gerichtet.

R. Ed. Liesegang ¹⁾ hat Röhrchen mit Silbernitratgallerte in eine Flasche mit Lösungen von NaCl, KBr, KJ gebracht und das Fortschreiten des Niederschlags von AgCl, AgBr und AgJ gemessen. Die von beiden Seiten auswachsenden Chlorsilbermassen treffen dann nicht in der Mitte zusammen, sondern sie lassen dort einen vollkommen klaren Zwischenraum, dessen Länge mit der Länge des Röhrchens zunimmt, und von der Konzentration beider Salzlösungen abhängt.

Nach Liesegang wird der Diffusionsdruck eines Salzes durch Zusatz von Gelatinelösung zu wässriger Salzlösung ganz erheblich abgeschwächt.

Derselbe hat auch beim Entgegendiffundieren von ClNa und AgNO₃ in Gallertplatten solche schon von Pringsheim beobachtete Niederschlagsverschiebungen wahrgenommen. Bei äquiproportionalen Lösungen war die Grenzlinie eine Gerade, senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Tropfen, die sich auf der Gallertplatte ausbreiten. War die Wertigkeit beider Lösungen verschieden, so war die Grenzlinie gebogen und die konvexe Seite zeigte nach dem mehrwertigen Salze. Die Chlorsilbermasse auf der Gallertplatte war oft von feineren, dichteren Doppellinien durchsetzt, die in bestimmten Abständen parallel zur Grenzlinie lagen.

In den Röhren zeigten sich regelmäßige Folgen von schmalen dichteren und weniger dichten Stellen, namentlich dann, wenn Silbernitratlösung in eine Gallerte dringt, die nur äußerst wenig NaCl enthält (2 g NaCl in 1 Liter 10 proz. Gelatinegallerte).

Bei der Entstehung des AgCl in Gallerten soll die Gallerte den Übergang des naszierenden (in normalem Zustande) unlöslichen Salzes aus dem monomolekularen in den polymolekularen Zustand stark zu verzögern vermögen. Die Bildung von Molekülkomplexen aus einzelnen Molekülen soll auch beim „Reifen“ der Bromsilbergelatineplatten eine Rolle spielen,

1) R. Ed. Liesegang, Naturw. Wochenschr. 11. p. 353. 1896; Chemische Reaktionen in Gallerten 8°. p. 1—65. Düsseldorf 1898; Elektrolyse von Gallerten und ähnliche Untersuchungen 8°. Düsseldorf 1899; Versuche zur Nachahmung von Zellen p. 25—29.

indem das feinkörnige Bromsilber durch Erwärmen immer grobkörniger und dadurch die Lichtempfindlichkeit der Emulsion gesteigert wird.

Nach Liesegang soll das Jodkalium ein starkes Lösevermögen für das Jodsilber und die Gelatinegallerte besitzen, das Bromkalium dagegen weder Bromsilber lösen noch die Gallerte verflüssigen. Chlorsilber werde von Chlorstrontiumlösung leichter als von Chlornatriumlösung gelöst.

Ich glaube, daß die interessanten Beobachtungen von Pringsheim und Liesegang durch die Grenzflächenspannung der ölartigen Flüssigkeiten erklärt werden, die aus dem α -Leim und dem chemischen Niederschlag aus den wässerigen Salzlösungen entstanden sind, wenn man dabei berücksichtigt, daß die Niederschläge ein wenig in den Salzlösungen löslich sind, aus denen sie sich gebildet haben.

In neuester Zeit hat Lohry de Bruyn ¹⁾ kolloidale Lösungen erhalten mit Gelatine und Quecksilber, Silber, Gold, Schwefel, den Halogenverbindungen des Silbers, den Sulfiden und Hydroxyden der schweren Metalle, Silberchromat, Berliner Blau, Ferrocyan kupfer etc. Nach ihm scheine im allgemeinen Gelatine die Bildung eines sichtbaren Niederschlages für amorphe Substanzen leichter zu verhindern, als für kristallinische Substanzen.

§ 114. *Zellen aus Leim oder Eiweiß mit Eisensalzen.* Ein Trog aus zusammengeschmolzenen Spiegelglasplatten von $4 \times 4 \times 1$ cm wurde mit verdünnter wässriger Lösung von $\text{Fe}(\text{OH})_3$ gefüllt und auf die Oberfläche der Flüssigkeit ein Stückchen trockner β -Leim gebracht. Bei Auflösung des Leims löste sich ein Teil ab und sank zu Boden. Es entstand ein an der Flüssigkeitsoberfläche hängender Tropfen mit konzentrischen hellen und dunkelbraunen Schichten, sowie am Boden der Flüssigkeit eine Bodenblase mit zahlreichen festen Schaumfalten. Der an der Flüssigkeitsoberfläche zurückgebliebene Leim quoll zu einer flachen Blase von 7,5 mm Durchmesser und 5 mm Höhe auf, mit 3,2 mm hohem vertikalen Abstand von Kuppe und Bauch. Derselbe zeigte abwechselnd dunkle und helle konzentrische Schichten einer

1) Lohry de Bruyn, Recueil Trav. chim. Pays Bas 19. p. 236. 1900.

gallertartigen Masse und im Innern derselben helle runde Blasen von 0,5 mm und dunkelbraune Kugeln von 0,05—0,2 mm Durchmesser.

Bei starker Vergrößerung erschien die Oberfläche der dunkelbraunen Kugeln mit zahlreichen runden Blasen besetzt. Die dunkelbraunen Kugeln selbst bestanden aus stärker brechender Substanz als die umgebende Leimmasse und waren besonders zahlreich im oberen Teil der gallertartigen Blase verteilt (Fig. 165, a).

Die hellen Blasen zeigten eine dunkelbraune Hülle von stärker brechender Substanz als der helle, orangefarbene Inhalt, in dem kleinere Blasen und Schaumzellen mit Wänden von größerer Lichtbrechung als die Grundmasse verteilt waren.



Fig. 165.

Läßt man eine Mischung von 5 proz. Gelatinelösung mit einer verdünnten Lösung von $\text{Fe}(\text{OH})_3$ auf einer reinen Quecksilberfläche eintrocknen, so entsteht eine Lamelle mit festen Randfalten und sternförmig angeordneten Kristallen in der Nähe des äußeren Randes, die sich aus kreisrunden Blasen abgeschieden haben. Wird ein Teil der noch nicht vollständig erstarrten zähflüssigen Masse mit einer Nadel unter ein Deckglas auf einen Objektträger gebracht, so sind darin bei starker Vergrößerung konische Röhren mit Anschwellungen und Schraubenwindungen zu erkennen, die im Innern mit einzelnen runden Blasen und zusammenhängenden Schaumzellen gefüllt sind. Die Wände der Röhren zeigten negative Doppelbrechung mit optischer Achse normal zur Wandfläche (Fig. 165, b, c, d).

Wurde anstatt des Leimes eingetrocknetes Hühnereiweiß auf die Oberfläche der $\text{Fe}(\text{OH})_3$ -Lösung in dem kleinen Glaszrog gebracht, so entstand zwar keine flache Gallertblase, wohl aber eine Schaummasse mit zahlreichen festen Wänden, aus der einzelne am Ende geschlossene Röhren oder Hörner hervortraten, von ähnlicher Gestalt wie bei den Metallsalzvegetationen.

Läßt man nach der oben (§ 25) beschriebenen *Röhrchenmethode* Hühnereiweiß oder Blutserum mit wässerigen Lösungen

von Ferrooxychlorid mit 7—0,07 Proz. $\text{Fe}(\text{HO}_3)\text{Cl}$ oder Eisenchlorid verschiedener Konzentration langsam zusammenfließen, so entstehen periodische Niederschläge, braune Schläuche mit öltartigen flüssigen Wänden, die das Bestreben haben, Einschnürungen, Anschwellungen, Schraubenwindungen oder kolbenförmige Enden zu bilden, in getrennte Blasen zu zerfallen und dann zu erstarren; oder Scheidewände zu bilden und diese nach dem Erstarren normal zur ursprünglichen Stromrichtung an der dünnsten Stelle zu durchbrechen, wie ich dies auch bei den Niederschlagsmembranen und Metallsalzvegetationen mit K_4FeCy_6 -Lösung beobachtet habe (§§ 25 und 29). Daneben entstehen aneinander hängende kugelförmige Blasen oder Schanzzellen mit feinen scharf gezeichneten Schaumwänden und Randwinkeln von 120° . Bei 0,7 Proz. Lösung von Ferrooxychlorid entstanden auch kolbenartige Gebilde mit dicken Wänden, wie bei den Myelinformen.

Die bei der Einwirkung auf das Eiweiß entstandenen Wände aus öltartiger Flüssigkeit erstarrten bei verdünnten Eisenlösungen eher, als bei konzentrierten Lösungen und waren bei letzteren zuweilen noch 12 Stunden nach dem Zusammenbringen flüssig.

Eine verdünnte Lösung von FeCl_3 in einem Glastrog mit Blutserum 6 Wochen lang bei 36 bis 38°C . in Berührung, wurde allmählich durchsichtiger und gab Schaummassen mit sehr feinen brannen Wänden, die aus klebriger Flüssigkeit zu bestehen und sich allmählich in dem Blutserum aufzulösen scheinen.

In der Grenzzone von Eiweiß und der wässerigen Lösung von FeCl_3 etc. traten häufig Luftblasen auf, die sich zu größeren Blasen vereinigen oder auf Kreisbogen liegen bleiben. Diese Luftblasen haben sich an der Grenze der öltartigen und wässerigen Flüssigkeit abgeschieden und in den Kanten der Schanzwände angesammelt. Die gelb gefärbten Teile des Serums mit den Schaummassen waren stärker doppeltbrechend als die Umgebung.

Wurden in derselben Weise Hühnereiweiß oder Blutserum mit wässerigen Lösungen von *Ferrum citronatum* in Glasröhrchen unter einem Deckglas zusammengebracht, so entstanden ebenfalls kugelförmige Blasen und Schanzzellen mit

dicken Wänden, in denen zahlreiche kleinere Blasen von 0,0005—0,001 mm Durchmesser verteilt lagen. Kleine Teilchen in der Nähe der kugelförmigen Wände der großen Blasen zeigten Brownsche Molekularbewegung, ein Zeichen, daß an ihrer Oberfläche periodisch Ausbreitungswirbel auftreten. Die Schaumwände lösten sich in dem umgebenden Eiweiß wieder auf; in Hühnereiweiß leichter als in Blutserum. Nach 12 Stunden war das ganze Eiweiß in dem Glasröhrchen mit unzähligen feinen kugeligen Körnchen und Blasen von 0,0005 mm oder kleiner erfüllt. Es hatte sich also durch Einwirkung des *Ferrum citronatm* eine Emulsion von Kügelchen in einer wässerigen Flüssigkeit, wie Milch, gebildet.

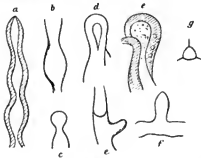


Fig. 166.

Ähnliche Kugeln und Schaummassen entstanden bei der Einwirkung von *Ferrum lacticum* auf Eiweiß. Doch erstarrten die Schaumwände hier bald unter Bildung von Randfalten, also unter Abscheidung von unsichtbaren Schaumwänden im Innern der erstarrenden Lamellen.

Alle diese Versuche zeigen, daß Eiweiß und wässrige Lösungen von Eisensalzen in kurzen Zwischenräumen öltartige flüssige Niederschläge bilden, mit Oberflächenspannung an der Grenze mit der umgebenden wässerigen Flüssigkeit. Die flüssigen Wände der hierdurch gebildeten Blasen und Schaumzellen erstarren je nach der Natur und Konzentration der Salzlösungen in kürzerer oder längerer Zeit.

§ 115. *Zellen von β -Eiweiß mit Eisenchlorid oder Salzsäure. Schnelle Diffusion durch flüssige Wände.* Läßt man in eine 10- oder 3 proz. Lösung von β -Eiweiß (§ 91) aus Hühnereiweiß

oder Blutserum (spezifisches Gewicht 1,002 oder 1,0007) in einem Probierröhrchen einige Sekunden lang aus einem 0,5 mm weiten Heberrohr (vgl. oben § 26, Fig. 17) 1 proz. Lösung von Eisenchlorid einfließen, so werden nach 1 Min. braune Schläuche von 30—80 mm Länge und 4 mm Durchmesser sichtbar, mit Anschwellungen und Verzweigungen und einem birnförmigen Säckchen am Ende, deren Volumen in verdünnter β -Eiweißlösung schneller wächst, als in konzentrierter Lösung, die sehr langsam herabsinken oder auch wohl in die Höhe steigen, sich wieder auflösen oder bei Wiederholung des Versuches sich als braune Massen am Boden der Eiweißlösung ansammeln (Fig. 167, *a, b, c*). Die braunen Massen zeigen

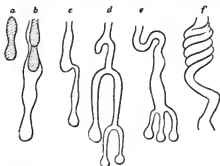


Fig. 167.

unter dem Mikroskop zahlreiche zusammenhängende Schaumwände, Blasen und Kugeln.

Ähnliche Schläuche mit Anschwellungen, Verzweigungen, Schraubenwindungen und birnförmigen Enden, aber mit weißlichen oder milchigen Wandungen bildeten sich, wenn Salzsäure vom spezifischen Gewicht 1,038 oder 1,0015 aus der Heberöffnung in die wässrige Lösung von β -Eiweiß einige Sekunden einfloß (Fig. 167, *d, e, f*).

Läßt man durch ein dünnes Glasrohr am Boden eines Probierrohres (Fig. 2, § 6) mit β -Eiweißlösung langsam eine spezifisch schwerere Lösung von FeCl_3 oder ClH zufließen, so entstehen in der Lösung von β -Eiweiß ähnliche braune oder weißliche Schläuche mit Anschwellungen und Einschnürungen, zuweilen von 5—8 cm Länge, in so kurzer Zeit, daß ein gewöhnlicher Flüssigkeitsstrahl in so kurzer Zeit nicht so hoch

steigen kann. Man muß annehmen, daß in der kolloidalen wässrigen Lösung von β -Eiweiß schon unsichtbare Wände einer öltartigen Flüssigkeit vorhanden waren, an deren Oberfläche sich die zugebrachte Lösung von FeCl_3 oder ClH schnell ausgebreitet und dann in kurzen Zwischenräumen oder periodisch einen neuen Niederschlag gebildet hat, durch dessen flüssige sehr dünne Wände Wasser von außen nach innen zum FeCl_3 oder ClH diffundierte und das Volumen des Schlauches schnell vergrößerte.

Die Volumenzunahme ist bei verdünnten Lösungen größer als bei konzentrierten, weil bei ersteren die Ölhaut dünner ist als bei letzteren.

Nach meiner Erfahrung sind diese Versuche das beste Beispiel einer Diffusion durch dünne öltartige Wände.

In der trüben Schlauchwand waren Teilchen mit anderer Lichtbrechung, Blasen und Schaumwände verteilt, wie wir sie bei allen flüssigen Niederschlägen kennen gelernt haben. Die Dicke der Schlauchwand vergrößerte sich allmählich durch Kontaktwirkung mit dem schon gebildeten, aber noch nicht abgeschiedenen Niederschlag von β -Eiweiß mit dem zugesetzten FeCl_3 oder ClH .

Läßt man umgekehrt aus einer Heberöffnung β -Eiweiß (1,002) in einen Glastrog von $10 \times 10 \times 1$ cm mit vier übereinander geschichteten Lagen Salzsäure vom spezifischen Gewicht 1,010, 1,005, 1,002 und 1,001 einströmen, so bildet der einfließende Strahl Schrauben- oder Wellenlinien. Nach unten nahm der Durchmesser des Strahles von 0,5 bis 0,7 mm zu und sank später wieder auf 0,4 mm. Der einfließende Strahl überzog sich mit einer dünnen Haut öltartiger Flüssigkeit, deren sehr geringe Dicke und Oberflächenspannung an den konkaven Stellen größer als an den konvexen Stellen war. Das Volumen dieses Schlauches nahm zuerst zu und später ab. Unten zerfiel der Strahl in Tropfen, deren Volumen durch Diffusion kleiner wurde, und in Schaumflocken, die sich an der Schattenseite der Glaswand festsetzten. Die Schaumwände dieser Flocken bestanden also noch aus öltartiger Flüssigkeit und zeigten negative Photodromie.

§ 116. *Zellen von Leim oder Eiweiß mit Kieselsäure.* Ein Tropfen β -Leim, der am unteren Ende eines Glasstabes er-

starrt war, wurde in einen Trog mit 1proz. wässriger Kieselsäure gehängt. Aus dem Leimtropfen entstand, ähnlich wie bei den § 33, Figg. 39—41



Fig. 168.

beschriebenen Versuchen, ein birnförmiges klares Säckchen mit glatter gallertartiger Wand von 0,2 mm Dicke und birnförmigen oder kugelförmigen Schaumwänden im Innern (Fig. 168, *k, l, m*). Kurze Zeit war in dem Säckchen ein abwärts gehender Körnchenstrom zu bemerken, wie in den Leimtannazellen (§ 100). Das Säckchen quoll auf, löste sich nach 15 Min. vom Glasstab und sank in der Kieselsäurelösung zu Boden. An seiner Außenfläche entstanden kolbenförmige Myelinformen. Nach 12 Stunden konnte man in der gallertartigen Hülle des Säckchens, die eine Dicke von 0,5 mm erreicht hatte, einzelne Schichten erkennen.

Bei Zubringen von Rosanilin färbte sich nur die Innenseite der Hülle tiefbraun, und im Innern des Säckchens wurden viele rote Körnchen sichtbar.

Aus der Leimmasse des Glasstabes entstanden noch andere birnförmige Säckchen oder Zellen, die mit einer zarten, durchsichtigen Membran bekleidet waren, sich ablösten und zu Boden sanken. Einzelne Wände dieser Zellen speicherten den Rosanilinfarbstoff, andere nicht.

Wurde der Tropfen β -Leim in 2proz. statt in 1proz. Kieselsäurelösung gehängt, so quoll er in wenigen Minuten auf, bildete einen dickwandigen vertikalen Schlauch, der langsam herabsank, im oberen Teile Anschwellungen und Einschnürungen zeigte, während von seinem unteren Teile in rascher Folge sich einzelne Stücke mit spitzen Enden ablösten (Fig. 168, *b, c, d, f*) und dann am unteren Ende sich kugelförmig abrundeten. Der Inhalt der Zellen konnte kleineres spezifisches Gewicht als die 2proz. Kieselsäurelösung (1,01) haben. Zuweilen war das untere Ende dieser Stücke oder

Zellen hakenförmig aufwärts gebogen, wie bei den Zellen von Cu_2FeCy_6 oder Co_2FeCy_6 (§ 26, Fig. 18). Die zu Boden gesunkenen Zellen quollen stark auf und bildeten eine Schaummasse mit kugelförmigen Blasen im Innern (Fig. 168, a).

Mit dem Mikroskop lassen sich im Innern der Leimsilicatmassen viele kleine Kugeln von 0,003 mm Durchmesser erkennen, die auf Kreisen von 0,033 mm Durchmesser lagen, also in flüssigen oder flüssig gewesenen Schaumwänden verteilt waren. Zuweilen habe ich auch von Kugelflächen gebildete Tetraeder wahrgenommen von 0,166 mm Höhe und von ähnlicher Gestalt, wie die Seifenblasen im Innern eines Plateauschen Drahttetraeders.

An den gallertartigen Massen war nur in seltenen Fällen schwache Doppelbrechung zu bemerken.

Eingetrocknetes *Hühnereiweiß* quoll in 2 proz. Kieselsäurelösung auf und bildete von Kugelflächen begrenzte Massen mit einer anfangs glatten, später faltigen Oberfläche und zahlreichen kugelförmigen Blasen und Schaumwänden mit Randwinkeln von 120° im Innern. Die Zellen am Rande wuchsen schneller als die Zellen im Innern, ähnlich wie bei Leimtannat in Wasser, aber langsamer als bei Leimtannat.

Auch in 2 proz. Lösung von Natronwasserglas bildete Eiweiß Schaummassen, in deren Kanten kleine Blasen eingelagert waren und auf Kreisen oder Ellipsen von 0,6—0,08 mm Durchmesser lagen.

β -Leim quoll in derselben Wasserglaslösung zu einer schaumlosen Masse auf, die keine Doppelbrechung zeigte.

Wie β -Leim mit Gerbsäure bilden β -Leim oder Eiweiß mit wässriger Kieselsäure öltartige Flüssigkeit, welche an der Grenze mit der umgebenden wässrigen Flüssigkeit eine Oberflächenspannung besitzt und mit dieser wässrigen Flüssigkeit hohle Blasen und Schaumzellen bildet, die durch Diffusion Wasser aufnehmen und wachsen und deren Wände später erstarren.

§ 117. *Zellen aus Eiweiß mit Gerbsäure und Zitronensäure.* Festes Eiweiß in 5 proz. Gerbsäurelösung gibt in $\frac{3}{4}$ Stunden eine hohle runde Blase von 1,5 mm Höhe, von der in den ersten Minuten ein Schlierenstrom abwärts fließt. Die hohle

Blase scheint sich bald mit einer festen Membran zu umbüllen. Zuweilen hemerkt man für kurze Zeit in der Randzone des Eiweiß kreisförmige fließende Flächen, die bald erstarren und von Methylenblau und Rosanilin nicht gefärbt werden.

Auch in wässriger Citronensäure hilden α -Leim, β -Leim, Hausenblase und Eiweiß Zellen mit nahezu kugeligen glatten Wänden, von denen kurze Zeit ein Schlierenstrom ausgeht, später Blasen und Schaumwände, die sich bei Eiweiß schließlich ganz auflösen.

Die Erscheinungen verlaufen so, daß ich eine Bildung ölartiger Lösungen von Citronensäure mit Leim, Hausenblase und Eiweiß dadurch für nachgewiesen halte, die in Wasser flüssige Lamellen hilden und dann erstarren können. Jedoch scheinen Bildung und Haltbarkeit dieser ölartigen Verbindungen von Konzentration und Temperatur in engen Grenzen besonders begünstigt zu werden, worüber weiterer Versuche entscheiden müssen.

§ 118. *Lösungen von Stärke und Kalksalzen.* Lösungen von Calciumnitrat, Natriumphosphat oder Kaliumsilikat, welche aus einer 1 mm weiten Heberöffnung in eine 0,2- oder 2 proz. Lösung von Kartoffelstärke einfließen (§ 26, Fig. 17), geben gerade glatte Strahlen ohne Schraubenwindungen, an deren Oberfläche also keine merkliche Oberflächenspannung herrscht.

Dagegen sind Calciumkarbonat und Calciumphosphat in wasserarmer und wasserreicher Stärkelösung verschieden löslich. Kalksalze und Stärke zeigen ähnliche Erscheinungen wie die Haloidsalze des Silbers und Leimes (§ 111—112).

Ein Glastrog von $6 \times 4 \times 1$ cm wurde mit Kartoffelstärkelösung gefüllt, die 2 Proz. Calciumnitrat enthielt, und ein Körnchen Soda oder kristallisiertes Phosphorsalz eingeworfen. Aus dem Korn entstanden statt der oben § 35 beschriebenen Vegetation ein branner flacher Tropfen, wie ein Quecksilbertropfen, am Boden einer weißlichen Schaummasse. Nach 12 Stunden war der Bodentropfen verschwunden und an der Schattenwand des Glastroges hatten sich zahlreiche Schaumflocken angesetzt. Es waren also Flocken mit flüssiger Oberfläche und negativer Photodromie entstanden, während ohne Stärke sich Vegetationen mit positiver Photodromie (§ 35) gebildet hatten.

Die aus dem Sodakorn entstandene Schaummasse wurde in einen hohlen Glasfaden aufgesogen und der Glasfaden unter ein Deckglas in Wasser gelegt. Mit dem Mikroskop zeigten sich im oberen Teile des Glasfadens einzelne oder aneinander gebackene Kugeln von 0,02 mm, die zwischen gekrenzten Nicol'schen Prismen ein dunkles Krenz, in seltenen Fällen auch einen dunklen Ring vom halben Durchmesser der Kugel zeigten. Eine Kugel zeigte ähnliche Erscheinungen, wie ein zweiachsiger Kristall, ein dunkles Kreuz mit zwei kleinen Kreisen, welches bei Drehen des Objekttisches um 45° in zwei dunkle Hyperbeln überging



Fig. 169.

(Fig. 169, a, b). Wurden der Stärkelösung 5 Proz. Calciumnitrat zugesetzt, so entstanden keine Flocken, sondern eine zähe, Faden ziehende flüssige Gallerte. In der Gallerte lagen viele Flüssigkeitskugeln von 0,005 mm mit kleinen Kalkspatrhomboedern im Innern. Aus Phosphorsalz hatten sich Sphärökrystalle erster Klasse (§ 42) gebildet.

In hohle lange Glasfäden von 0,5—1 mm Durchmesser wurde eine Lösung von löslicher Stärke (1,05) aufgesaugt, der 2 Proz. Calciumnitrat zugesetzt war. Die an beiden Seiten zugeschmolzenen Glasfäden wurden in einem mit Wasser gefüllten langen Probierrohr auf 100° erhitzt und langsam erkalten gelassen, um die gute Ausbildung der Schaumwände aus wasserarmer Stärkelösung zu begünstigen. Die lösliche Stärke bildete bei 100° eine klare, durchsichtige Flüssigkeit, bei gewöhnlicher Temperatur eine weiße Gallerte.

Von dem Glasfaden mit calciumnitrathaltiger Stärkergallerte wurden je zwei 40 mm lange Stücke mit dem Glasmesser abgeschnitten, das eine Ende zugeschmolzen oder mit geschmolzenem Paraffin geschlossen, und beide nebeneinander mit dem offenen Ende unter ein Deckglas auf einen Objektträger gelegt. Unter das Deckglas wurde eine Lösung von Soda (1,02) oder Natriumphosphat (1,045) gebracht.

Mit Sodalösung zeigten sich nach 1 bis 2 Tagen im Innern der Glasfäden doppeltbrechende Kalkspatrhomboeder von 0,001 bis 0,05 mm auf Kreisbogen von 0,06—0,12 mm Durchmesser verteilt. Die kleinsten Rhomboeder lagen in der Nähe des offenen Endes des Glasfadens, die größten 16 mm davon ent-

fernt. Alle waren offenbar aus Kugeln oder Linsen in den Kanten von Schaumwänden abgeschieden. An einer Stelle lagen sechs aus gleich großen Kugeln entstandene Rhomboeder mit radialer Achse um eine zentrale Kugel gleicher Größe herum, und bildeten einen Sphärrokristall von 0,1 mm. Am geschlossenen Ende des Glasfadens war ein Skalenoeeder mit Rhomboederflächen an beiden Enden entstanden. Gelegentlich lagen die Kalkspatrhomboeder in der Wand eines schraubenförmigen Schlauches oder auf Spiralen oder Kreisen von 0,4 mm Durchmesser oder die doppeltbrechenden Massen waren in radialen Fächern um eine Kernblase herum gelagert.

Mit *Natriumphosphat* bildeten sich in den Glasfäden mit Calciumnitrat und Stärkagallerte dunklere Querschichten mit

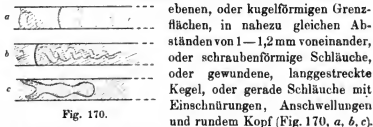


Fig. 170.

Zwischen diesen einfach brechenden Gebilden, welche ähnlich, aber weniger regelmäßig geformt waren, wie die oben (§ 108) beschriebenen Querschichten aus braunem Silberchromatleim, lagen Strahlenbüschel von doppeltbrechenden Kristallen.

Ähnliche Erscheinungen erhielt ich, wenn die Glasfäden statt mit löslicher Stärke mit einer Lösung von dialysierter Kartoffelstärke (1,03) gefüllt waren, der 2 Proz. $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ zugesetzt war.

Wurde unter das Deckglas statt der Sodalösung eine verdünnte Lösung von *Kaliumsilikat* gebracht, so bildete sich an der Mündung des calciumnitrathaltigen Stärkeröhrchens eine einfach brechende, feinkörnige Schaummasse und im Innern lagen auf Schaumwänden eine Reihe doppeltbrechender Kugeln von 0,024 mm oder kleiner, deren Oberfläche mit doppeltbrechenden Kristallnadeln von 0,005 mm Länge, wie mit Stacheln besetzt war. Die mit Schaummassen gefüllten Kugeln waren in der Nähe der Röhrchenmündung am größten, wurden nach innen allmählich kleiner. Daneben lagen Kugeln von

0,001 mm mit größerer Lichtbrechung als die Umgebung und mit radial angeordneten Blasen im Innern, deren Oberflächenschicht beim Drehen zwischen gekrenzten Nicolschen Prismen für bestimmte Lagen dunkel wurde. Im Innern dieser kleinen einzelnen oder zusammengebackenen Kugeln lagen einfach oder schwach doppeltbrechende Oktaeder mit Auslöschungsrichtung parallel einer Oktaederkante, oder die Kugeln waren mit doppeltbrechenden Schaummassen gefüllt.

Diese Versuche lehren, daß Kalksalze mit wasserarmer Stärkelösung eine ölartige Flüssigkeit bilden und aus dieser später in Form von Rhomboedern oder anderen Kristallen sich abscheiden, in Übereinstimmung mit meinen früheren Versuchen über wasserarme und wasserreiche Stärkelösung (§ 94).

§ 119. *Resultate.* 1. Bei der Mischung wässriger Lösungen von Alkalibichromat und Silbernitrat entstehen rote doppeltbrechende Kristalle von Silberbichromat. Dieselben Salzlösungen geben bei Gegenwart von α - oder β -Leim eine ölartige braune Flüssigkeit *A* — Silberchromatleim —, deren Grenze mit der umgebenden wässrigen Flüssigkeit *B* eine Oberflächenspannung zeigt.

Der Niederschlag von Silberbichromat entsteht in kurzen Zwischenräumen oder periodisch und wird reichlicher gelöst von wasserarmer als von wasserreicher Leimlösung.

2. Die Oberflächenspannung der Lösung von Silberchromatleim ist kleiner an der Grenze mit konzentrierter, als an der Grenze mit verdünnter Leimlösung.

3. Unter dem Einfluß der Oberflächenspannung bildet Silberchromatleim in β -Leimlösung wechselnder Konzentration Blasen, aneinanderhängende Schaumkammern und Röhren mit Anschwellungen, eigenartig gebaute verzweigte Zellen, oder eine homogene klebrige Flüssigkeit.

4. Bringt Alkalibichromat- bez. Silbernitratlösung in dünne Glasröhrchen mit silbernitrathaltiger bez. alkalibichromathaltiger Leimgallerte ein, so bildet der Silberchromatleim unter dem Einfluß der Oberflächenspannung braune Querwände, die von Kugelflächen oder Schraubenflächen begrenzt sind. Mit der Entfernung vom Ende der Röhrchen wächst der Abstand der Querschichten voneinander.

Die Querschichten fehlen in der Mitte der Röhren, wo die einfließenden Salzlösungen aufeinander treffen und gestaut werden. Der schichtenfreie oder reaktionsfreie Raum in der Röhrenmitte ist um so kürzer, je kürzer die Glasröhren sind.

Die braunen Schichten von Silberchromatleim entstehen auf einer größeren Strecke, wenn die Salzlösung nicht von beiden Seiten, sondern nur von einer Seite in das Röhren mit Leimgallerte eindringt.

5. Nach einigen Tagen zerfallen die braunen Schichten in einzelne runde Kugeln, aus denen sich einfach brechende reguläre Kristalle (Leim oder Silberchromatleim?) abscheiden in Form von Würfeln, Tetraederzwillingen und Granatoedern.

6. Ähnliche Querschichten, von Kugel- oder Schraubenflächen begrenzt, und ähnliche reaktionsfreie Räume in der Röhrenmitte, wie bei Silberchromatleim, entstehen beim Eindringen von Silbernitratlösung in Leimgallerte mit NaCl oder KBr, indem sich öltartige Niederschläge von Silberchloridleim und Silberbromidleim abscheiden, mit Oberflächenspannung an der Grenze mit der umgebenden wässrigen Leimlösung. Auch hier dringt das Silbernitrat in einseitig geschlossene Röhren mit Leimgallerte weiter ein, als in auf beiden Seiten offene Röhren.

7. Beim Eindringen von Kupfersulfat- oder Eisenchloridlösung in Leimgallerte mit Alkalibichromat oder Ferrocyanalkalium entstehen ähnliche öltartige Flüssigkeiten von Kupferchromatleim, Eisenchromatleim, Ferrocyan kupferleim mit Oberflächenspannung und unter dem Einfluß dieser Oberflächenspannung ähnliche Gebilde, wie bei Silberchromatleim, Röhren mit Anschwellungen, Blasen etc.

8. Wässrige Lösungen von Silbernitrat und Natriumchlorid, Kaliumbromid, Kaliumjodid (ohne Leim) geben einen flüssigen Niederschlag von wasserhaltigem Silberchlorid, Silberbromid, Silberjodid mit Oberflächenspannung an der Grenze mit den wässrigen Salzlösungen, der Röhren mit kugelförmigen Anschwellungen bildet, nach kurzer Zeit Wasser abgibt und erstarrt. Dieser Niederschlag bleibt am längsten flüssig bei Silberbromid. Die Oberflächenspannung war bei Silberjodid am größten, bei Silberchlorid am kleinsten.

9. Beim Einfließen von Silbernitratlösung mit β -Leim in wässrige Lösungen von NaCl, KBr, KJ überzieht sich der

einfließende Strahl mit einer öltartigen Haut, deren Oberflächenspannung bei AgJ am größten ist und am schnellsten unmerklich wird. Die Reihenfolge der leimhaltigen Silberhaloide ist dieselbe, wie ohne β -Leim. Gleichzeitig entstehen an der Grenze beider Salzlösungen Schaummassen, deren Wände unter 120° gegeneinander geneigt sind und allmählich in der Leimlösung sich auflösen unter allmählicher Änderung der Neigungswinkel und der Oberflächenspannung.

10. β -Leimlösung mit Silbernitrat, welche aus einer engen Heberöffnung langsam in Lösung von NaCl oder KBr einströmt, bildet einen schraubenförmigen Strahl, an dessen konkaver Seite eine größere Oberflächenspannung herrscht, als auf der konvexen Seite. Der Strahl zerfällt in den unteren Schraubenwindungen in viele Strahlen mit Wirbeltropfen am unteren Ende und später in horizontale Flockenschichten mit positiver Photodromie.

11. Die Beobachtungen von N. Pringsheim und Ed. Liesegang über chemische Reaktionen in Leimgallerte erklären sich durch die verschiedene Löslichkeit der periodisch gebildeten Niederschläge in wasserreicher und wasserarmer Leimlösung und die Oberflächenspannung an der gemeinsamen Grenze beider Lösungen.

12. Leim und Eiweiß bilden mit wässrigen Lösungen von Eisensalzen öltartige Niederschläge mit Grenzflächenspannung gegen die wässrige Salzlösung. Die aus dieser öltartigen Flüssigkeit bestehenden Wände der Blasen und Schaumkammern erstarren nach längerer oder kürzerer Zeit, welche mit der Konzentration der Lösungen wechselt.

13. Läßt man aus einer Heberöffnung von 0,5 mm eine 1 proz. Lösung von Eisenchlorid oder Salzsäure einige Sekunden lang in eine wässrige Lösung von β -Eiweiß einfließen, so entsteht in einer Minute ein Schlauch aus öltartiger Flüssigkeit von 30–80 mm Länge und 4 mm Durchmesser mit Anschwellungen und rundem Kopf. Indem Wasser von außen nach innen durch die flüssige Schlauchwand diffundiert, quillt der Schlauch schnell auf; um so schneller, je dünner die Schlauchwand ist, je verdünnter die einströmende Lösung von FeCl_3 oder ClH ist. An den festgewordenen Stellen wird die Wand durchbrochen und werden neue Schläuche mit Ölhaut gebildet.

Häufig entstehen Schläuche mit zwei Zweigen und runden Köpfen am unteren Ende.

14. β -Leim und Eiweiß bilden mit wässerigen Lösungen von Kieselsäure, Gerbsäure, Zitronensäure eine öltartige Flüssigkeit, welche an der Grenze mit der wässerigen Flüssigkeit eine Oberflächenspannung besitzt, und mit dieser wässerigen Flüssigkeit hohle Blasen und Schaumzellen, auch zugespitzte Schaumzellen bildet. Die Schaumzellen nehmen durch Diffusion Wasser auf und quellen. Später erstarren die Wände der Schaumzellen.

15. Lösungen von Natriumphosphat oder Soda, welche in Röhrchen mit calciumnitrathaltiger Stärkelläute eindringen, geben periodische Niederschläge von öltartiger Calciumphosphatstärke oder Calciumkarbonatstärke, welche von Kugel- und Schraubenflächen begrenzte Schichten bilden, ähnlich den Schichten von Silberchromatleim (vgl. Nr. 4).

16. Die wasserarme Lösung *A* und die wasserreiche Lösung *B*, welche ein Kolloid gleichzeitig mit Wasser bildet, lösen Salze und chemische Niederschläge in verschiedener Menge.

Heidelberg, 15. Januar 1903.

(Eingegangen 23. Januar 1903.)

**2. Das optische Verhalten
der Metallkolloide und deren Teilchengröße;
von Felix Ehrenhaft.**

(Mitgeteilt aus den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien.
Mathem.-naturw. Klasse. 112. Abt. II a. 12. Februar 1903.)

Die nachfolgende Untersuchung bezweckt das optische Verhalten von suspendierten, metallischen Teilchen, deren Dimensionen klein sind gegen die Wellenlängen des Lichtes, auf Grund der Resultate der elektromagnetischen Lichttheorie zu charakterisieren und in Gegensatz zu stellen zu isolierenden, suspendierten Teilchen derselben Größenordnung, sowie auf das Verhalten der Teilchen selbst und deren Größe Rückschlüsse zu ziehen.

Die elektromagnetische Lichttheorie zeigt, daß zwischen Isolatoren und Leitern der Elektrizität strenge Unterschiede bestehen. Aus vorliegender Untersuchung geht hervor, daß diese Sonderung auch hier nicht bloß eine zur Anordnung des Themas zweckmäßige, sondern im tieferen Wesen der Erscheinung wurzelnde ist. Es ist daher nötig, zunächst die theoretischen und experimentellen Resultate des optischen Verhaltens isolierender, suspendierter Teilchen zu kennzeichnen, dann diesen das Verhalten der metallischen, suspendierten Substanzen gegenüberzustellen.

I. Teil: Polarisation.

Wenn in einem durchsichtigen Medium, etwa Wasser oder Luft, feine Teilchen suspendiert werden, tritt eine Trübung desselben ein. Das von einem solchen trüben Medium diffus reflektierte Licht ist teilweise planpolarisiert und zwar am stärksten in jenen diffusen Strahlen, die in einer zum primären Strahl senkrechten Ebene zerstreut werden. Dies Phänomen entdeckte Tyndall. Es fand seine Erklärung durch Lord

Rayleighs¹⁾ Theorie, deren für uns wichtige Resultate hier angeführt werden.

Fällt in einem Medium, in dem isolierende Kugeln eingebettet sind, deren Dimensionen klein sind gegen die Wellenlängen des Lichtes, das etwa durch obenerwähnte trübe Medien oder kolloidale Suspensionen repräsentiert wird, ein planpolarisierter Lichtstrahl auf eine solche Kugel, dann erfordert die Rayleighsche Theorie das Verschwinden des zerstreuten Lichtes in der Ebene senkrecht zur Richtung des einfallenden Strahles in allen Punkten der Normalen zum magnetischen Vektor des Lichtes. Trifft umgekehrt eine Welle natürlichen Lichtes ein solches Medium, dann wird das primär zerstreute Licht vollständig polarisiert in allen Punkten der durch das Zentrum der Kugel senkrecht zum einfallenden Strahl gelegten Ebene, wobei die bevorzugte Schwingungsrichtung senkrecht zum Primärstrahl ist. Die Polarisation kann aber, wie Soret²⁾ bewiesen hat, nur bei jenem Licht eine totale sein, das nur einmal diffus zerstreut wurde. Erleidet ein Lichtstrahl eine mehrfache Zerstreuung an anderen Kugeln, so bleibt die Polarisationsebene sowie die Lage des Maximums der Polarisation zwar dieselbe, durch die Komponenten des sekundär zerstreuten Lichtes wird jedoch die Totalität der Polarisation gedrückt. Erst Teilchen, deren Dimensionen an die Lichtwellenlängen heranragen, werden Licht nach den gewöhnlichen Gesetzen der Optik reflektieren und so die Reinheit der Erscheinung stören.

J. J. Thomson³⁾ hat in dem Artikel „Über die Zerstreuung elektrischer Wellen durch Metallkugeln“ das Analogon für die Leiter der Elektrizität gelöst. Trifft ein planpolarisierter Lichtstrahl, dessen magnetischer Vektor senkrecht, dessen elektrischer Vektor in der Zeichenebene schwingt, eine Metallkugel, deren Dimension klein ist gegen die Wellenlänge des Lichtes, so verschwindet das zerstreute Licht in der Ebene, die durch das Zentrum der Kugel senkrecht zum magnetischen Vektor gelegt ist, längs der Geraden, die einen Winkel von 120°

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 12. p. 81. 1881.

2) C. Soret, Archives de sciences de Genève 20. p. 429. 1888.

3) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism p. 437. 1893.

mit dem einfallenden Strahl bildet, an dem Punkte, an dem die Welle die Kugel zum ersten Male trifft. Wenn also umgekehrt nicht polarisierte elektrische oder Lichtwellen eine Kugel treffen, die obige Bedingungen erfüllt, dann ist die Richtung, in der das diffus reflektierte Licht planpolarisiert ist, unter einem Winkel von 120° gegen den einfallenden Strahl geneigt. Die bevorzugte Schwingungsrichtung ist senkrecht zum primären Strahl. Der theoretischen Behandlung des Spezialfalles, daß die eingebettete Metallkugel klein ist gegen die Wellenlängen des Lichtes, liegen zwei Voraussetzungen zu Grunde, auf deren Erfüllung wesentlich zu achten ist:

1. Bedeutet σ den spezifischen elektrischen Widerstand, μ die Permeabilität, a den Kugelradius, λ die Wellenlänge der einfallenden Schwingung, V deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so muß

$$\frac{2\pi V \mu a^2}{\lambda \sigma} \text{ sehr groß sein.}$$

2. Da der Kugelradius sehr klein sein soll gegen die Wellenlänge der einfallenden Schwingung, so muß

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \text{ klein sein.}$$

Ebenso wie bei isolierenden suspendierten Teilchen, wird in einem Medium, in dem eine große Zahl solcher metallischer Kugeln eingebettet ist, die Lage der Polarisationssebene nicht geändert, wohl aber die Totalität der Polarisation gedrückt. Dagegen würden Teilchen, deren Dimensionen die Lichtwellenlängen erreichen oder überschreiten, das Licht nach den gewöhnlichen Gesetzen der Metallreflexion zerstreuen und so die Reinheit der oben beschriebenen Erscheinung stören.

Die diffuse Reflexion des Lichtes an suspendierten, gegen die Lichtwellenlängen kleinen Metallteilchen folgt also anderen Gesetzen als denjenigen, die bei der analogen Erscheinung an isolierenden Partikeln, dem Tyndallphänomen herrschen.

Denn wenn nicht polarisiertes Licht auf ein Medium trifft, in dem kleine, isolierende Kugeln eingebettet sind, dann hat das diffus reflektierte Licht das Maximum der Polarisation in allen Punkten einer durch das Kugelzentrum senkrecht auf die Richtung des einfallenden Strahles gelegten Ebene.

Wenn dagegen Licht durch leitende, gegen die Lichtwellenlängen kleine Kugeln diffus zerstreut wird, dann sind die Punkte der stärksten Polarisation auf einem Kegelmantel gelegen, dessen Achse durch die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Strahlen gegeben ist und dessen halber Scheitelswinkel 120° beträgt.

Über die Herstellung von Substanzen, bei welchen Teilchen eingebettet sind, die obige Voraussetzungen erfüllen — also nicht magnetische Metallpartikeln, deren Dimensionen im Vergleich zu den Wellenlängen des Lichtes klein sind —, wird vor den experimentellen Resultaten dieser Arbeit berichtet.

Damit sind die entsprechenden theoretischen Fundamente des ersten Teiles festgestellt und es sollen nun einesteils die bereits vorhandenen experimentellen Resultate erwähnt werden, andererseits die Methode, sowie die Resultate der nachfolgenden Untersuchung angeführt werden.

Methode der Untersuchung.

Die Polarisationsmessungen wurden mit dem Photopolarimeter von Cornu ausgeführt. Die durch ein achromatisches Linsensystem parallel gemachten Zentralstrahlen einer sehr konstanten Bogenlampe fielen senkrecht auf die Seitenfläche eines planparallelen Glastroges in das Innere der jeweiligen Flüssigkeiten, in welchen die Teilchen suspendiert waren. Auf Abblenden jedes natürlichen oder von den Trogwänden oder anderweitig reflektierten Lichtes wurde sorgfältig geachtet.

Da die Lichtstrahlen an der Oberflächenschichte durch am Trog angebrachte schwarze Papierstreifen abgeblendet wurden, konnte in das Polarimeter nur aus dem Innern der Flüssigkeit diffus reflektiertes Licht gelangen.

Der Gang der Untersuchung war etwa folgender: Zunächst wurde bei allen Messungen die Polarisationsart des diffus reflektierten Lichtes untersucht. Da Gang und Resultat bei allen Suspensionen gleich ist, ist es zweckmäßig, dies gleich hier anzuführen.

Das diffus reflektierte Licht zeigte, mit einem Nicol als Analysator untersucht, ein Intensitätsmaximum, jedoch bei keiner Stellung des Analysators die Intensität 0. Bei Einschaltung einer $\lambda/4$ -Platte vor den Analysator mit der Haupt-

schwingungsrichtung parallel der Maximumstellung des Analysatorhauptschnittes gibt es keine Analysatorstelle mit der Intensität 0. Dieselbe Stelle wie vorher verbleibt die Maximumstellung. Daher haben wir es in allen Fällen der nachfolgenden Untersuchung mit teilweise linear polarisiertem Lichte zu tun. Die Polarisationssebene ist in allen Fällen gegeben durch die durch das einfallende und diffus reflektierte, beobachtete Strahlenbündel fixierte Ebene. Die bevorzugte Schwingungsrichtung ist also senkrecht zu dieser.

Die quantitativen Messungen wurden mit dem Cornuschen Photopolarimeter, einem außerordentlich zweckdienlichen Apparate vorgenommen, der nebst den zur Polarisationsmessung nötigen Drehungen noch eine an einem Teilkreis ablesbare Drehung in der Vertikalebene gestattete, um das Polarimeter in verschiedene Neigung gegen den einfallenden Strahl einzustellen. Es muß an dieser Stelle auf eine ausführliche Beschreibung des seinen Hauptbestandteilen nach aus einem doppeltbrechenden Wollaston mit Teilkreis und einem Nicol mit Teilkreis bestehenden Apparate verzichtet und auf die Literatur verwiesen werden.¹⁾ Das Polarimeter wurde unter dem jeweilig angeführten Winkel gegen die parallel einfallenden Primärstrahlen justiert, sodaß in den Strahlengang des Apparates nur Licht gelangen konnte, das aus dem Flüssigkeitsinnern diffus reflektiert wurde und die von den primären Strahlen nicht durchleuchtete Oberflächenschichte durchdringen mußte. Hierauf wurde die Lage der Polarisationssebene bestimmt, dann zuerst in dieser, sodann in der darauf senkrechten Ebene der Nicol auf gleiche Helligkeit der Felder im Polarimeter eingestellt.

Der Sinns der Differenz der beiden Ablesungen gibt eine der Polarisations proportionale Größe. Bedenkt man, daß bei total linear polarisiertem Lichte 100 Proz. des Lichtes senkrecht zur Polarisationssebene schwingen, so ergeben sich bei den nachfolgenden Messungen die Prozente des senkrecht zur Polarisationssebene schwingenden Lichtes durch das in den

1) Kongreßberichte der Association française 1882 und 1890 oder J. M. Pernter, Denkschriften der math.-naturw. Klasse der k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 73, p. 301. 1901.

Tabellen durchwegs angeführte Produkt $100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$, wenn ω_2 bez. ω_1 obenerwähnte Ablesungen bedeuten. Es wurden sowohl in der Polarisationssebene als auch senkrecht zu dieser 5—6 Einstellungen gemacht, welche gut übereinstimmten. Alle Einstellungen wurden in einem abgedunkelten Raume mit an Dunkelheit akkommodierten Augen gemacht, indem ich mit dem Kopfe unter einem schwarzen Tuche blieb. Um die Abhängigkeit der Polarisation von der Wellenlänge zu untersuchen, wurde das Licht zunächst durch einen Prismensatz à vision directe in seine Farben zerlegt. Schon bei Vormessungen zeigte es sich, daß der Mittelwert aus den Größen der Polarisation in den einzelnen Farben im Verhältnisse zur Größe der Polarisation im weißen Lichte zu hoch war. Veranlaßt wurde dies durch den Umstand, daß das Licht durch den Prismensatz à vision Beimengungen polarisierten Lichtes erhielt. Bei Zerlegung des Lichtes durch ein 60° -Flintglasprisma, mit dem nachfolgende Messungen durchgeführt wurden, war keine Komponente polarisierten Lichtes beigemischt, sowie auch erhöhte Lichtstärke erreicht.

Herstellung der zur Untersuchung verwendeten Suspensionen.

Da die Messungen an isolierenden, nicht metallischen Suspensionen bei verschiedenem Material ausgeführt und deren Übereinstimmung mit der Theorie bestätigt ist, wurden als Vertreter der isolierenden suspendierten Teilchen bloß kolloidales Arsensulfit, das auf bekanntem chemischen Wege hergestellt wurde und kolloidale Kieselsäure untersucht. Die Eigenschaften der metallischen Suspensionen wurden an den Metallkolloiden untersucht. Dieselben wurden nach der von Bredig angegebenen Methode unter Leitfähigkeitswasser im elektrischen Lichtbogen zerstäubt. Destilliertes Wasser wurde wiederholt durch eine Zinnröhre über alkalischem Permanganat aus Wiener Normalglasflaschen in solche destilliert, sodann durch einen Strom kohlenstoffsaurefreier Luft von dieser gereinigt, sodaß die spezifische Leitfähigkeit auf $1-2 \cdot 10^{-6}$ sank. Bezüglich der näheren Details der Herstellung sei auf die Bredigsche Monographie¹⁾

1) G. Bredig, *Anorganische Fermente*. Leipzig, Verlag W. Engelmann 1901.

bezüglich der Edelmetalle, bezüglich der kolloidalen Suspensionen bez. der Hydroxyde von Cu, Co, Fe, Ni auf die Mitteilung des Verfassers ¹⁾ verwiesen. Nnr für das kolloidale An sind einige Andeutungen zweckmäßig. Schwarze, schwarzviolette, rotviolette Goldsole von größerer oder geringerer Haltbarkeit herzustellen unterliegt keiner sonderlichen Schwierigkeit. Dagegen erfordert die Herstellung rubinroter, in derselben Farbensnuance monatelang haltbarer Sole Sorgfalt und Übung. Es wurden Feingolddrähte von ca. 1,5 mm Durchmesser bei möglichst kleinen Stromstärken (1—2 Amp. bei 120 Volt) in kleinen Quantitäten Wassers von der spezifischen Leitfähigkeit $1-2 \cdot 10^{-6}$ zerstäubt. Bei Bildung des Lichtbogens unter Wasser schießen znnächst schwarze Wölkchen aus der Kathode. Jetzt wurde tropfenweise dem Wasser eine verdünnte Lösung kohlenensäurefreien NaOH zugesetzt, und zwar so lange, bis die aus der Kathode schießenden Wölkchen rot gefärbt waren. Es genügt schon eine Spnr dieses Znsatzes; bei größerem Alkalizusatz erfolgt leicht, manchmal sogar sehr bald ein Farbenumschlag des Sols. Es wurde die Zerstänbnng also bei der Minimalstromstärke mit dem geringst möglichen Alkalizusatz ausgeführt, durch Eiskühlung bei Bereitung des Kolloides in einem möglichst dünnwandigen Gefäße die Erhitzung des Wassers verhindert. Das filtrierte Goldsol wurde in ausgedämpften Normalglasflaschen aufbewahrt; es gelang so tief-rubinrote Kolloide herznstellen, die nunmehr 8 Monate ihre Farbe nicht änderten. Der Metallgehalt des Kolloides wurde auf nachfolgende Weise bestimmt. Ein kleines ausgedämpftes Becherglas aus Normalgas wurde ausgewogen, sodann in demselben eine bestimmte Quantität Kolloides durch eine Spur Salzsäure gefällt, sodaß das Metall den Gefäßboden als Bodensatz bedeckte. Das darüber befindliche Wasser wurde mit einem Heber zum Teil entfernt, der Rest verdampft, darauf das Becherglas mit dem gefällten Metall, sodann nach Entfernung des metallischen Bodensatzes wieder gewogen, um eventuelle Gewichtsverluste konstatieren zu können, die aber bei ausgedämpftem Normalglas höchstens 0,0001 g betrug. Um

1) F. Ehrenhaft, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. z. Wien 1902; Akademischer Anzeiger Nr. 18.

sich von der Genauigkeit dieser Methode zu überzeugen, wurde die Fällung und Wägung an demselben Kolloide öfters ausgeführt, wobei sich für den Metallgehalt in 100 cm³ Werte ergaben, die entweder ganz übereinstimmten oder um 0,0001 g differierten.

Polarisationsmessungen an isolierenden suspendierten Teilchen.

Eine Reihe von Untersuchungen bestätigt das Tyndall'sche Phänomen, daß in reinen trüben Medien das seitliche Licht senkrecht auf den einfallenden Strahl das Maximum der Polarisation besitzt, z. B. an Mastixsuspensionen in Wasser, am blauen Dampfstrahl und ähnlichem. Pernter zeigte in der schon zitierten Arbeit, daß bei stark konzentrierten Mastixsuspensionen für rotes Licht das Maximum der Polarisation noch bei 90°, für grünes und violettes jedoch um 7° davon entfernt war und erklärt dies durch die Teilchengröße, welche noch hinreichend klein für die langwelligen Strahlen, aber nicht mehr für die kurzwelligen waren.

Nachfolgende Tabellen geben die Resultate der Messungen an im auf- und durchfallenden Lichte orangegelb gefärbten Arsensulfid und an wasserheller kolloidaler Kieselsäure wieder.

Abhängigkeit der Polarisation vom Winkel gegen den einfallenden Strahl.

Neigung gegen den einfallenden Strahl	Arsensulfid		Kieselsäure
	I	II	
	100 sin (ω ₂ - ω ₁)	100 sin (ω ₂ - ω ₁)	100 sin (ω ₂ - ω ₁)
70°	—	72,5	66,9
80	—	78,0	78,8
85	—	84,4	—
90	80,8	83,8	85,7
100	71,4	75,7	82,9
110	68,6	—	81,7
120	67,0	—	73,7
130	58,9	—	—

Die angeführten Zahlen bedeuten die Prozente des senkrecht zur Polarisationssebene schwingenden Lichtes. Die Messungsreihe II ist an einem konzentrierterem Kolloide ausgeführt.

Arsensulfit.

Abhängigkeit der Polarisation vor der Konzentration unter 90°
gegen den einfallenden Strahl.

Teile		$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
Wasser	Kolloid	
30	1	50,0
18	1	50,1
10	1	58,8
0	1	80,8

Arsensulfit.

Abhängigkeit der Polarisation von der Wellenlänge.

Farbe des Lichtes	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
		10 Teile Wasser + 1 Teil AsS
Rot	84,5	20,8
Rotorange	46,9	—
Orange	77,5	43,7
Gelbgrün	75,8	—
Grün	75,4	39,1
Blauviolett	total absorbiert	13,7

Das Polarisationsmaximum liegt bei Arsensulfit unter $87,5^\circ$, bei kolloidaler Kieselsäure unter 90° gegen den einfallenden Strahl, das Maximum in Abhängigkeit von der Wellenlänge im Orange. Während aber bei Mastixsuspensionen bei zunehmender Konzentration die Stärke der Polarisation abnimmt wegen der größeren Zahl der eingebetteten Teilchen, deren Dimensionen an die Lichtwellenlängen heranreichen, zeigt sich beim Arsensulfit vom ganz verdünnten Zustand bis zum konzentriertesten Kolloid stetige Zunahme der Polarisation, eine Erscheinung, die, wie im zweiten Teile der Arbeit gezeigt wird, auf außerordentliche Kleinheit der Teilchen und Abwesenheit aller die Erscheinung störenden größeren Partikeln zurückzuführen ist. —

Polarisationsmessung an metallischen Suspensionen.

Prof. Threlfall¹⁾ hat bei einer an Gold, Platin, Eisen und Eisenoxydsuspensionen vorgenommenen Untersuchung den von der Theorie geforderten Unterschied zwischen diesen und Mastixemulsionen nicht konstatieren können. In einem Anhang an diese Arbeit teilt J. J. Thomson¹⁾ mit, daß auch er schon dasselbe negative Resultat erhalten habe und erklärt dies in Übereinstimmung mit Maxwell und Wien durch den wesentlich höheren Widerstand, den die Metalle den so raschen Wechselströmen des Lichtes entgegensetzen. Nachfolgende Untersuchung scheint zu zeigen, daß nicht dies die Ursache der Nichtübereinstimmung gewesen ist, sondern daß die untersuchten Metallsuspensionen den engen von der Theorie geforderten Voraussetzungen nicht entsprachen.

Nach dem zweiten Teile dieser Untersuchung wird es nötig sein, nochmals darauf näher zurückzukommen. Dieselbe wurde, wie schon erwähnt, an den Metallkolloiden, die mit größtmöglicher Sorgfalt hergestellt waren, ausgeführt.

Die Abhängigkeit der Polarisation vom Winkel gegen den Primärstrahl, von der Wellenlänge und von der Konzentration wurde gemessen an zwei kolloidalen Ag von brauner und braungrüner Farbe, an drei Sorten kolloidalem Au von rubinroter, violetter und schwarzvioletter Farbe, an braunem, kolloidalem Pt, an kolloidalem Cu (grüner Farbe), letzteres in ganz frischem Zustand. Endlich an im Lichtbogen zerstäubtem, kolloidalem Eisenhydroxyd sowie grob suspendiertem Hg. Zuerst wurden im weißen Lichte die Winkel der stärksten Polarisation aufgesucht, dann unter dieser Neigung die Abhängigkeit von der Konzentration, sowie von der Wellenlänge untersucht. Nachfolgende Tabellen enthalten die Resultate.

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 38. p. 445. 1894.

Silber.

Abhängigkeit der Polarisation vom Winkel gegen den einfallenden Strahl.

Winkel	Ag I			
	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
60°	—	—	—	35,0
70	—	—	—	36,0
80	—	—	—	37,5
90	32,6	—	34,2	38,7
100	37,7	46,8	38,3	48,4
110	40,4	49,2	43,8	52,3
115	39,2	—	—	—
120	37,5	47,5	34,8	45,7
130	23,1	—	—	41,5
Metall- gehalt pro 100 cm ³	0,00202 g	0,00808 g	—	—

Abhängigkeit der Polarisation von der Wellenlänge 110° gegen den einfallenden Strahl.

Farbe des Lichtes	Ag I	
	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
Rot	15,7	22,8
Gelborange	41,9	43,8
Gelbgrün	63,0	—
Grün	74,0	62,3
Blau	72,8	47,7
Violett	63,9	—
Weiß	51,8	48,4
Metallgehalt in 100 cm ³	0,00808 g	0,00404 g

Abhängigkeit der Polarisation von der Konzentration 110° gegen den einfallenden Strahl.

Metallgehalt pro 100 cm ³ in g	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
0,00078	40,2
0,00202	40,4
0,00281	41,5
0,00404	43,7
0,00808	49,1

Gold.

Abhängigkeit der Polarisation vom Winkel gegen den einfallenden Strahl

Winkel	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
60°	—	—	33,4
70	—	—	34,2
80	—	—	39,9
90	50,0	—	41,5
100	51,8	—	—
110	55,8	54,5	50,7
115	60,2	55,6	—
120	60,3	56,1	53,7
125	57,9	—	—
130	57,4	50,3	51,9
140	52,2	—	—
Metallgehalt pro 100 cm ²	}	0,0081 g	—
		—	—

Abhängigkeit der Polarisation von der Wellenlänge gegen den einfallenden Strahl

Farbe des Lichtes	Unter 90°	120°	120°
	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
Rot	48,2	45,1	52,2
Orange gelb	41,2	63,6	63,6
Grün	39,4	82,9	79,9
Grenze zwischen Blau u. Violett	}	71,7	76,2
Weiß		55,9	58,8
Sorte	Au I	Au II	Au III

Abhängigkeit der Polarisation von der Konzentration.

120° gegen den einfallenden Strahl.

Metallgehalt pro 100 cm ²	$100 \sin (\omega_2 - \omega_1)$
0,0007	49,7
0,00226	50,4
0,00395	55,1
0,0079	56,1

Platin.

Abhängigkeit der Polarisation			
vom Winkel		von der Wellenlänge	
Winkel gegen den einfallenden Strahl	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$	Farbe des Lichtes	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$
90°	57,4	Rot	46,6
110	61,4	Orange	52,2
115	62,4	Grün	76,4
120	58,5	Blau	75,2
130	56,5	Violett	70,8
Metallgehalt pro 100 cm ³	} 0,00508 g	Weiß	62,4

Abhängigkeit der Polarisation vom Winkel gegen den einfallenden Strahl.

Winkel gegen den einfallenden Strahl	Kupfer	Eisen	Grob- suspendiertes Quecksilber
	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$	$100 \sin(\omega_2 - \omega_1)$
90°	31,7	70,1	54,5
100	—	68,8	50,0
110	34,2	68,2	47,5
120	39,1	60,2	—
130	30,1	—	—

Sämtliche Metallkolloide polarisieren das grüne Licht wesentlich stärker wie das rote und blaue. Bloß ein kolloidales Gold, das auch im zweiten Teile der Untersuchung eine Ausnahmestellung einnimmt, zeigt unter 90° gegen den einfallenden Strahl gemessen eine vom Roten gegen das Violette abfallende Größe der Polarisation.

Wie aus den vorstehenden Tabellen oder der Fig. 1 zu entnehmen ist, stimmen die Winkel der maximalen Polarisation mit den von der Theorie geforderten 120° teils ganz überein, teils liegen sie im Intervalle von 110—120°. Man wird also daraus schließen können, daß bei diesen Suspensionen die Voraussetzungen der Theorie erfüllt sein müssen. Es werden also die kleinen Metallteilchen selbst für so rasche Wechselströme, wie sie die Lichtwellen darstellen, Leiter der Elektrizität sein.

Andererseits werden die Durchmesser der Teilchen klein sein gegen die Wellenlänge des Lichtes. Grob zerstäubtes Hg und kolloidales Eisenhydroxyd entsprechen den Voraussetzungen nicht. Ihre Sonderstellung erscheint dadurch gerechtfertigt. Zum Schlusse ist es wichtig noch auf eine Beobachtung hinzuweisen, die einerseits das negative Resultat der Versuche

Abhängigkeit der Polarisation vom Winkel gegen den einfallenden Strahl.

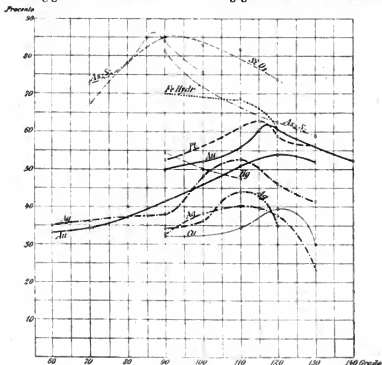


Fig. 1.

Prof. Threlfalls und J. J. Thomsons erklärt, andererseits in das Wesen der kolloidalen Suspensionen Einblick gewährt.

Die hier zahlenmäßig festgelegten Messungen sind durchaus an Metallkolloiden, die jedem verunreinigenden Einflusse entzogen waren, vorgenommen worden. Läßt man ein solches Kolloid selbst nur einige Stunden im Glastroge unter dem verunreinigenden Einflusse der Luft stehen, so verschiebt sich die

Richtung der stärksten Polarisation um einige Grade gegen kleinere Winkel. Erst bei Suspensionen, die größere Teilchen enthalten, verschwindet die Reinheit der Erscheinung ganz im Einklange mit der Theorie. Es konnte wiederholt bei demselben Kolloide das Wandern des Maximums der Polarisation zu kleineren Winkeln ganz parallel mit dem Zusammenballen und daher Vergrößern der eingebetteten Teilchen beobachtet werden, eine Erscheinung, die bei den folgenden Untersuchungen der Absorption ihr Analogon findet. Erst letztere gibt direkt Aufschluß über die Größe der Teilchen und gestattet so die Grenzen der Gültigkeit der Theorie genauer zu fixieren.

II. Teil: Absorption.

Trübe Medien.

Die Tatsache, daß trübe Medien blaues Licht in höherem Maße reflektieren als rotes, ist schon sehr lange bekannt und z. B. zur Erklärung der blauen Farbe des Himmels herangezogen worden. Lord Rayleigh erkannte, daß für den Fall, daß die eingebetteten Partikeln klein sind gegen die Wellenlängen des einfallenden Lichtes, die gewöhnlichen Gesetze der Reflexion und Brechung ihre Gültigkeit verlieren. Er faßte die das Licht zerstreuen Teilchen als Störungszentra der einfallenden Wellenbewegung auf und leitete für die Intensität des einfallenden und durchgelassenen Lichtes die Beziehung

$$J = J_0 e^{-k\lambda^{-4}d}$$

ab. J_0 bedeutet die Intensität des einfallenden, J des durchgelassenen Lichtes von der Wellenlänge λ , d die Dicke der absorbierenden Schichte, k eine Konstante. Es wird also auch nach den Resultaten der Theorie vom Blau und Violett ein bedeutend größerer Anteil diffus reflektiert als vom roten Licht und so erklärt sich die blaue Farbe dieser Medien. Voraussetzung dieser Theorie ist die Kleinheit der Teilchen gegen die Wellenlängen des Lichtes. Die Richtigkeit der Theorie für ein solches trübes Medium ist mehrfach experimentell bestätigt.¹⁾

1) Abney u. Festing, Proc. Roy. Soc. Lond. 40. p. 378. 1886; A. Lampa, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 100. IIa. p. 730. 1891; A. Hurion, Compt. rend. 112. p. 1431. 1891.

Kolloidale Suspensionen.

Bei den Kolloiden haben wir es mit in durchsichtigen Medien suspendierten Teilchen zu tun, die, wie es sich bereits aus dem ersten Teil dieser Untersuchung ergab, klein sind gegen die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes. Während aber bei trüben Medien das diffus reflektierte Licht je nach der Reinheit der Suspension blau mit Abstufungen zu weiß ist, haben die Kolloide eine ausgesprochene Färbung z. B. beim kolloidalen Au je nach Herstellung und Qualität rubinrot, rot-violett in allen Abstufungen bis zu schwarz, selbst indigoblau; beim Ag rot- oder grünbraun bis tiefbraun; bei Pt, Ni, Co, Fe braun in allen Nuancen. Diese auffallende Erscheinung veranlaßte die Absorptionsspektren zunächst mit dem Glanschen Spektrophotometer zu untersuchen. Als Lichtquelle diente ein Auerbrenner, dessen Strahlen durch Linsen parallel gemacht wurden. Fremdes Licht wurde vom Glastroge und den Augen sorgfältig ferne gehalten. Das sichtbare Spektrum wurde so in 13 Bezirke geteilt, daß bei der Nicoleinstellung auf Gleichheit der Nuancenunterschied im Spektrum nicht störte. Die Schichtdicke im Troge betrug 11,3 mm.

Nachfolgende Tabelle enthält die Prozente des in jedem Spektralbezirke durchgelassenen Lichtes, die Intensität des einfallenden gleich 100 gesetzt. Es sind dies Mittelwerte von 6 bis 10 Einstellungen (vgl. Tabelle p. 505).

Im folgenden Diagramm (Fig. 2) ist zu den entsprechenden Wellenlängen als Abszissen das Verhältnis der Intensität des einfallenden zum durchgelassenen Lichte aufgetragen. Es tritt so die selektive Absorption deutlicher hervor. Sämtliche Kolloide sind für die langwelligen Strahlen durchlässiger. Ein ähnliches Verhalten zeigen die trüben Medien.¹⁾ Das Licht größerer Wellenlänge geht durch sie ungestört hindurch, die kurzwelligen Strahlen werden diffus reflektiert. Doch zeigt das rote kolloidale Au, das in vier Konzentrationen gemessen wurde, bei hinreichendem Metallgehalte ein Absorptions-

1) A. Lampa, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien IIa. 100. p 730. 1891.

Prozente des durchgelassenen Lichtes und Metallgehalt

Spektalbezirk Wellenlängen	Kolloidgold rot	9 Teile Kolloidgold + 1 Teil Wasser		2 Teile Kolloidgold + 1 Teil Wasser		1 Teil Kolloidgold + 1 Teil Wasser		Kolloid- platin	Kolloid- silber	Kolloid- nickel	Kolloid- kobalt	Kolloidgold schwarz- blau
0,677 — 0,642 μ	17,2	19,80	20,50	32,68	19,41	33,44	37,59	45,04	14,45			
0,642 — 0,621	9,95	11,91	16,27	25,00	18,59	19,61	41,05	48,10	14,24			
0,621 — 0,604	7,59	8,23	12,22	21,31	17,24	16,40	42,75	48,2	18,81			
0,604 — 0,589	5,16	5,75	10,20	19,22	16,26	14,25	43,60	47,0	18,81			
0,589 — 0,575	3,74	4,99	8,55	15,88	15,50	12,50	43,70	45,67	13,12			
0,575 — 0,5515	2,13	3,23	7,00	12,59	14,45	10,96	42,50	42,0	12,85			
0,5515 — 0,524	1,46	2,89	6,13	10,68	13,72	9,71	40,00	37,46	12,84			
0,524 — 0,512	1,42	2,29	5,59	10,34	12,22	9,25	36,0	30,21	11,97			
0,512 — 0,499	1,46	2,68	5,75	10,40	10,69	7,19	33,11	28,81	12,22			
0,499 — 0,4875	1,75	3,31	6,42	12,94	10,34	5,75	32,36	21,41	14,39			
0,4875 — 0,469	2,51	4,13	7,46	15,39	9,96	4,39	28,01	16,00	17,36			
0,469 — 0,446	2,98	4,39	8,55	18,73	9,03	2,18	27,10	12,40	16,30			
0,446 — 0,420	3,11	4,53	9,12	19,23	8,91	0,29	23,58	6,54	10,71			
Metallgehalt in Gramm 100 cm ³ Kolloid	0,011	0,0099	0,0073	0,0055	0,0118	0,0053	0,0025	0,0018	0,004			

band $\lambda = 520 \mu\mu$, kolloidales Ag ein solches im äußersten Violett, dessen Maximum im sichtbaren Teile des Spektrums nicht erreicht ist.

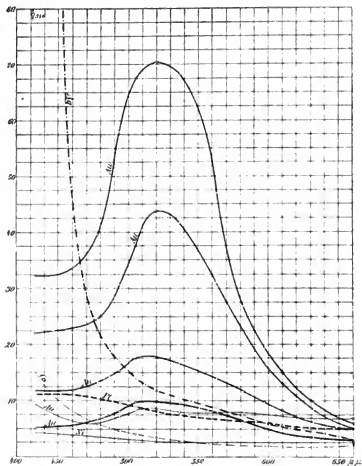


Fig. 2.

Die Messungen wurden daher mit Hilfe eines Rowland'schen Beugungsgitters durch Sichtbarmachung des ultravioletten Teiles auf einem Fluoreszenzschirm fortgesetzt. Hrn. Dr. E. Haschek bin ich für seine freundliche Hilfe bei nachfolgenden Messungen zu besonderem Danke verpflichtet.

Art des Kolloides. Farbe im durch- fallenden Lichte	Absorption im sichtbaren und ultra- violetten Spektrum	Anmerkung
Ag I braun	Beginn bei $\lambda = 503 \mu\mu$ Maximum $\lambda = 380 \mu\mu$ Wieder ganz durchlässig bei $\lambda = 335 \mu\mu$	Mit zunehmendem Alter des Kolloides Ag stärkeres Hervortreten des grünlichen Stiches. Gleichzeitiges Wandern der maximalen Absorption gegen größere Wellenlängen.
Ag braun mit Stich ins Grüne	Beginn bei $\lambda = 585 \mu\mu$ Totale Absorption . . . $\lambda = 479 \mu\mu$ Durchlässig bei $\lambda = 340 \mu\mu$ Wiederbeginn einer ganz schwachen Absorption bei $\lambda = 290 \mu\mu$	
Ag hellbraun	Beginn bei $\lambda = 541 \mu\mu$ Langsam ansteigend. Maximum nicht konstatierbar.	
Pt in Alkohol braun	Beginn bei $\lambda = 505 \mu\mu$ Maximum bei $\lambda = 480 \mu\mu$ Im Ultravioletten schwache Absorp- tion.	2 Monate haltbar.
Au rot mit Stich ins Violette	Beginn bei $\lambda = 580 \mu\mu$ Maximum bei $\lambda = 520 \mu\mu$ Stärker durchlässig bei $\lambda = 450 \mu\mu$ Im Ultravioletten schwache Absorp- tion.	Seit 8 Monaten in seiner Farbe haltbar.
Au I dunkelrot	Flaches Maximum bei . $\lambda = 490 \mu\mu$	Wurde 3 Tage nach der Herstellung schwarz. Zerstäubt bei stärkerem KOH-Zusatz.
Au rot	Beginn bei $\lambda = 560 \mu\mu$ Totale Absorption bei . $\lambda = 520 \mu\mu$ Im Ultravioletten schwache Absorp- tion.	Schöne rote Farbe.
Au violett	Es endet eine aus dem Ultraroten kommende Absorption bei . . . $\lambda = 650 \mu\mu$ Beginn einer Absorption bei $\lambda = 498 \mu\mu$ Totale Absorption bei . $\lambda = 520 \mu\mu$ Im Ultravioletten ganz schwache Ab- sorption.	Haltbar. Bei violettem Au, die aus dem roten in diese Farbe übergangen, pflegt nach einigen Tagen eine bei $\lambda = 650 \mu\mu$ endigende Absorption aufzutreten.

Art des Kolloides. Farbe im durchfallenden Lichte	Absorption im sichtbaren und ultravioletten Spektrum	Anmerkung
Au III schwarzviolett	Beginn bei $\lambda = 524 \mu\mu$ Endigende Absorption bei $\lambda = 460 \mu\mu$ Absorbiert schwächer wie die übrigen Au im Ultraviolett.	Haltbar.
Au licht-rubiurot	Beginn bei $\lambda = 540 \mu\mu$ Maximum bei $\lambda = 510 \mu\mu$ Durchlässiger bei $\lambda = 480 \mu\mu$	—
Au ursprünglich rot	Von großen Wellenlängen bis $\lambda = 660 \mu\mu$ Von dort ziemlich gleichmäßig das sichtbare und ultraviolette Spektrum absorbierend.	Das Kolloid ging in 24 Stunden von roter zu schwarzer Farbe über und koagulierte nach einigen Tagen. Wahrscheinlich zu starker Alkalizusatz beim Zerstücken.
Au ursprünglich rot	Analog	
Au ursprünglich rot	Analog	
Arsensulfit orangegelb	Durchlässig bis $\lambda = 465 \mu\mu$ Absorbiert von dort ab das ganze sichtbare und ultraviolette Spektrum.	Haltbar. Stark konzentriert.

Während beim kolloidalen Au bereits im sichtbaren Lichte um $\lambda = 520 \mu\mu$ ein breites Absorptionsband nachweisbar ist, tritt bei braunem Ag ein solches um $\lambda = 380 \mu\mu$ im Ultravioletten, bei grünbraunem Ag ein solches ab $479 \mu\mu$ gegen kleinere Wellenlängen auf. Ab $\lambda = 340 \mu\mu$ sind beide Ag wieder durchlässig. Arsensulfit absorbiert ab $\lambda = 465 \mu\mu$ das sichtbare und ultraviolette Spektrum total.

Die im Dielektrikum eingebetteten Metallteilchen werden von den außen auftreffenden Lichtwellen, je nachdem die Periode der Eigenschwingung der suspendierten Partikeln der Periode des einfallenden Lichtes näher oder ferner liegt, zum stärkeren oder schwächeren Mitschwingen angeregt. Stimmt die Oszillationsperiode der einfallenden Strahlung mit der Eigenschwingung der eingebetteten Teilchen überein, dann wird durch

Resonanz¹⁾ der beiden Schwingungen die Energie der Lichtwelle im Medium im erhöhten Maße geschwächt, die Absorption des Lichtes wird bei dieser Wellenlänge ihr Maximum erreichen.

Berechnung der Teilchengröße.

Diese bei den Kolloiden auftretende optische Resonanz ermöglicht es, die Größe der suspendierten Partikeln zu bestimmen. Wir werden den Verhältnissen jedenfalls nahe kommen, wenn wir, wie bei der Berechnung der Polarisatiou, den Teilchen Kugelgestalt zuschreiben. Der Gang der elektrischen Schwingung in einer Kugel war mehrfach Gegenstand der Untersuchung.²⁾ Bedeutet τ die Schwingungsdauer, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung in der Luft, so ist die Schwingungsdauer einer Kugel vom Radius a im freien Raume gegeben durch

$$\tau = \frac{4\pi a}{V\sqrt{3}}.$$

Ist die Kugel von einer elektrischen Hülle, deren Dielektrizitätskonstante größer als 1 ist, umgeben, so ergibt sich³⁾, daß die Schwingungsdauer der elektrischen Schwingung des Erregers, sowie die Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung, welche außerhalb der dielektrischen Hülle im umgehenden Lustraume zur Entwicklung kommt, vergrößert wird. Es werden also die im Wasser eingehetteten Teilchen auf eine größere Wellenlänge ansprechen, als auf jene, welche ihrem Radius zukommt, da man die dielektrische Hülle um jede eingebettete Kugel als sehr groß im Vergleich zu ihrem Radius annehmen kann. Ist n der Brechungsexponent von Luft in Wasser, so folgt für die Größe der Kugelradius

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4\pi n} \frac{1}{\tau},$$

1) Ähnliches beobachtet gleichzeitig J. Kossonogow bei auf Glas niedergeschlagenen Metallpartikeln. Physik. Zeitschr. 4. p. 258. 1903.

2) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism p. 437. 1893.

3) Anton Lampa, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 112. IIa. 1903; Elektromagnet. Schwingungen einer Kugel.

wobei λ die Wellenlänge des Absorptionsmaximums, der Stelle stärkster Resonanz, bedeutet. Da

$$\frac{\sqrt{3}}{4\pi n} = 0,103$$

ist, so ergeben sich die in nachfolgender Tabelle verzeichneten Teilchengrößen.¹⁾

Kolloid	Maximum der Absorption	Mittlerer Teilchenradius in cm
Ag braun	$\lambda = 380 \mu\mu$	$38 \cdot 10^{-7}$ cm
Ag braun, mit Stich ins Grüne }	$\lambda = 479-400 \mu\mu$	$40-48 \cdot 10^{-7}$ „
Pt	$\lambda = 480 \mu\mu$	$48 \cdot 10^{-7}$ „
Au	$\lambda = 520 \mu\mu$	$52 \cdot 10^{-7}$ „
Au	$\lambda = 490 \mu\mu$	$49 \cdot 10^{-7}$ „
Au	$\lambda = 510 \mu\mu$	$51 \cdot 10^{-7}$ „

Eine Reihe von Beobachtungen zeigt den innigen Zusammenhang zwischen Teilchengröße und Zustand des Kolloides. Setzt man einem solchen eine Spur einer Säure oder eines Elektrolyten zu, so koaguliert es. Die Teilchen ballen sich zu größeren Konglomeraten zusammen und fallen aus. Ich untersuchte die Absorptionsspektren solcher Kolloide.

Setzt man kolloidalem Au roter Farbe, das bei $\lambda = 520 \mu\mu$ das Maximum der Absorption hatte und im Roten durchließ, eine Spur eines Fällungsmittels zu, so tritt ein Farbumschlag mehr oder minder rasch, dagegen eine vom Ultraroten kommende, bis $\lambda = 650 \mu\mu$ reichende Absorption sofort auf. Kolloidales Ag und Arsensulfit, die die violetten und blauen Farben total absorbierten, die roten aber ungeschwächt durchließen, kehren sofort nach Zusatz eines Fällungsmittels ihr Verhalten um, indem sie die langwelligen Strahlen absorbieren, die kurzwelligen durchlassen. Nimmt man ferner an demselben Metall-

1) H. Siedentopf u. R. Zsigmondy stellen die Bestimmung der Teilchengröße auf einem anderen Wege in Aussicht (Ann. d. Phys. 10. p. 1. 1903; C. A. Lobry de Bruyn, Rec. trav. chim. des Pays-Bas 19. p. 251-258. 1900, schätzte die Teilchengröße einiger Kolloide aus ihrer Fähigkeit, das Licht zu polarisieren.

kolloide die Absorptionsmessungen nach einigen Wochen wieder vor, so kann man ein Wandern des Absorptionsmaximums nach größeren Wellenlängen konstatieren. Alle diese Tatsachen gehen mit der langsameren oder rascheren Veränderung im Kolloide, dem Zusammenballen und Größerwerden der eingebetteten Teilchen parallel und haben im Wandern der Winkel stärkster Polarisierung gegen kleinere Winkel ein auch bloß vom Größerwerden der eingebetteten Teilchen abhängiges, bereits besprochenes Analogon.

Die in der Tabelle verzeichneten mittleren Teilchengrößen schließen das Vorhandensein kleinerer Teilchen keineswegs aus. Das rote kolloidale Au absorbiert schwach gegen kleinere Wellenlängen abnehmend das ultraviolette Spektrum durch Resonanz von Teilchen kleinerer Dimensionen. Aus den Messungen ist zu ersehen, daß das kolloidale Au um so freier von Absorption im ultravioletten Spektrum wird, je schwärzer seine Farbe wird, sodaß das schwarzviolette Au in diesem Spektralbereiche fast ganz durchläßt. Es ist dies aus der Abwesenheit kleiner Teilchen durch die bereits vorgeschrittene Koagulation erklärbar. Dieser Standpunkt gestattet auch die rote Farbe mancher kolloidaler Au zu erklären. Die in demselben eingebetteten Teilchen haben überwiegend Dimensionen, die auf die Periode des blaugrünen Lichtes resonieren und dies stark absorbieren. Das Kolloid erscheint uns daher rot. Das schwarze kolloidale Au absorbiert das sichtbare Spektrum ziemlich gleichmäßig. Es entspricht dies dem Umstande, daß in diesem koagulierenden Kolloide Teilchen der verschiedensten Dimensionen vorhanden sind.

Im ersten Teile dieser Untersuchung wurde dargelegt, daß nach J. J. Thomsons Theorie das von einer Metallkugel, deren Durchmesser klein ist gegen die Wellenlängen des Lichtes, diffus zerstreute Licht das Maximum der Polarisierung unter 120° gegen den einfallenden Strahl hat, wofern die auf p. 491 zitierten Voraussetzungen erfüllt sind. Es sind durch diese für die Teilchengröße ganz enge Grenzen fixiert. Die aus der optischen Resonanz ermittelten Teilchengrößen gestatten nun, sich zu überzeugen, daß bei den Metallkolloiden, die das Polarisationsmaximum nach den Versuchen zwischen 110° und 120° besitzen, die ermittelten Größen tatsächlich in jene engen

Grenzen fallen. Um das Licht diffus zu zerstreuen¹⁾, müssen die Durchmesser der als kleine Kugeln aufgefaßten Teilchen einerseits klein sein im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes, anderenteils verlangt die Theorie, daß die Dicke der Schicht, in der die durch die einfallende Strahlung in dem Teilchen induzierten Ströme merklich sind, bloß einen kleinen Bruchteil des Teilchenradius betrage. In der Tiefe d unterhalb der Kugeloberfläche variiert die Stärke des induzierten Stromes wie e^{-kd} , wobei $k = (2\pi\mu p/\sigma)^{1/2}$, σ den spezifischen elektrischen Widerstand, μ die Permeabilität, $2\pi/p$ die Schwingungsdauer bedeutet. Daher wird der Strom in der Tiefe $1/k$ unterhalb der Oberfläche nur den $1/e^{\text{tes}}$ Teil seines Wertes in der Oberfläche betragen. Es kann so $1/k$ als Maß der Dicke der Oberflächenschichte des eingebetteten Teilchens genommen werden, die von noch merklichen induzierten Strömen durchdrungen wird.

Es muß dann, um die eingangs zitierten Voraussetzungen der Theorie zu erfüllen und so deren Anwendbarkeit zu ermöglichen der Durchmesser $2a$ der Teilchen klein sein gegen die Wellenlänge und groß gegen $1/k$, also die Relation $\lambda > 2a > 1/k$ bestehen.

Nachfolgende Tabelle enthält den experimentell ermittelten Winkel das Polarisationsmaximums gegen den einfallenden Strahl, den aus der Absorption im Spektrum ermittelten Teilchendurchmesser, ferner die Größe $1/k$. Der Berechnung wurden die D -Linie für die Wellenlänge, sowie die angeführten Werte des spezifischen elektrischen Widerstandes zu Grunde gelegt.

Art des Kolloides	Winkel des Polarisationsmaximums gegen den einfallenden Strahl	Wellenlänge in cm	Durchmesser des Teilchens $2a$ in cm	$1/k$	σ
Ag	110°	$5,89 \cdot 10^{-5}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	1570
Pt	115	$5,89 \cdot 10^{-5}$	$9,6 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-7}$	10604
Au	120	$5,89 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	2100

Es stehen also diese beiden voneinander ganz unabhängigen Resultate der elektromagnetischen Lichttheorie sowohl unter-

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 38. p. 455. 1894.

einander als auch jedes einzelne mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung.

Zusammenfassung.

Das optische Verhalten suspendierter Teilchen, deren Dimensionen klein sind gegen die Wellenlängen des Lichtes, ist ein durchaus verschiedenes, je nachdem die Teilchen Isolatoren oder Leiter der Elektrizität sind. Wenn nicht polarisiertes Licht auf ein Medium trifft, in welchem gegen die Wellenlängen kleine, isolierende Partikeln suspendiert sind, dann ist das diffus reflektierte Licht teilweise planpolarisiert. Die Theorie Lord Rayleighs erfordert das Maximum der Polarisation in allen diffusen Strahlen, die in einer zum primären Strahl senkrechten Ebene liegen. Es bestätigt sich dies von Tyndall entdeckte Phänomen, z. B. an den trüben Medien oder den kolloidalen Suspensionen. Wie vorhergehende Messungen zeigen, liegt bei kolloidaler Kieselsäure das Maximum der Polarisation unter 90° , bei kolloidalem Arsensulfid unter $87^\circ 30'$ gegen den einfallenden Strahl.

Wenn dagegen Licht durch die Elektrizität leitende Kugeln, deren Dimension klein ist gegen die Wellenlänge des Lichtes, diffus zerstreut wird, dann laufen, wie aus einer theoretischen Untersuchung J. J. Thomsons hervorgeht, die Strahlen stärkster Polarisation längs eines Kegelmantels, dessen Achse durch die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Strahlen gegeben ist, und dessen halber Scheitelwinkel 120° beträgt. Wie vorausgehende Untersuchungen zeigen, bestätigt das Verhalten der nach Bredigs Methode im Lichtbogen zerstäubten Metallkolloide diese Theorie gut. Das diffus reflektierte Licht ist teilweise planpolarisiert, das Polarisationsmaximum liegt bei kolloidalem Gold unter $118\text{--}120^\circ$, bei kolloidalem Silber unter 110° , bei kolloidalem Kupfer unter 120° , bei kolloidalem Platin unter 115° gegen den einfallenden Strahl. Man kann aber auch umgekehrt aus dem Zutreffen der Resultate der Theorie auf Erfüllung der Voraussetzungen schließen. Es scheinen also diese Metallpartikeln selbst für so rasche Wechselströme, wie sie die Lichtwellen darstellen, Leiter der Elektrizität zu sein.

Die Untersuchung der Absorptionsspektren der Metall-

kolloide zeigt bei kolloidalem Golde roter Farbe ein breites Absorptionsband um $\lambda = 520 \mu\mu$, bei kolloidalem Platin um $\lambda = 480 \mu\mu$, bei kolloidalem Silber im Ultravioletten um $\lambda = 380 \mu\mu$.

Die im Dielektrikum eingebetteten Metallpartikeln werden von den außen auftretenden Lichtwellen zum Mitschwingen angeregt. Stimmt die Oszillationsperiode der einfallenden Strahlung mit der Eigenschwingung der eingebetteten Teilchen überein, dann wird durch Resonanz der beiden Schwingungen die Energie der Lichtwelle im Medium in erhöhtem Maße geschwächt; die Absorption des Lichtes wird bei dieser Wellenlänge ihr Maximum erreichen. Diese beobachtete optische Resonanz ermöglicht es, die mittlere Teilchengröße zu bestimmen. Der Radius des als Kugel, in welcher der Gang der elektromagnetischen Schwingung bekannt ist, aufgefaßten Teilchens ergibt sich für kolloidales Gold in der Größe $49-52 \times 10^{-7}$ cm, für Silber 38.10^{-7} cm, für Platin 48.10^{-7} cm.

Diese Größen fallen genau in jene engen Grenzen, welche die Theorie J. J. Thomsons für die Größe jener suspendierten Metallteilchen voraussetzt, damit das Polarisationsmaximum des von ihnen diffus reflektierten Lichtes unter 120° gegen den einfallenden Strahl geneigt sei.

Beide Resultate stehen somit in Übereinstimmung.

Wien, II. Physik. Inst. d. k. k. Universität.

(Eingegangen 12. März 1903.)

3. Über das dem Dopplerschen Prinzipie entsprechende Integral der Gleichungen für die Wellenbewegung; von Emil Kohl.

In einer vorhergehenden Arbeit¹⁾ wurde gezeigt, daß sich unter Voraussetzung einer mit gleichbleibender Geschwindigkeit c geradlinig fortschreitenden, harmonisch schwingenden Quelle die Komponenten der Schwingungen an jeder Stelle des Raumes durch die Differentialquotienten einer Funktion

$$(1) \quad V = -\frac{1}{r \left(1 - \frac{v(\hat{r}c)}{\mathfrak{B}}\right)} \sin \frac{2\pi}{\tau_0} \left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}}\right)$$

darstellen lassen, wobei V der Gleichung

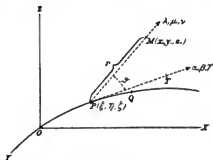
$$(2) \quad \Delta V = \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 V}{dt^2}$$

genügt. Die Bedeutung der Größen r und $v(\hat{r}c)$ ist folgendermaßen festgelegt: Man zähle die Zeit t von jenem Augenblicke an, wo die Quelle gerade den Anfangspunkt des Koordinatensystems überschritten hat; dann gibt es auf der während der Zeit t durchlaufenen Strecke einen gewissen Punkt P von der Eigenschaft, daß eine in ihm hervorgerufene Erregung in derselben Zeit zu einem bestimmten Punkt M des Raumes fortschreitet, welche die Quelle braucht, um von P in ihre gegenwärtige Lage Q zu gelangen. Die Strecke PM werde mit r bezeichnet. Ferner schließt r mit der Bewegungsrichtung der Quelle im Punkte P einen gewissen Winkel ϑ ein, sodaß die Projektion der Geschwindigkeit c auf den Radiusvektor dann durch $c \cos \vartheta$ gegeben ist; diese Größe sei $v(\hat{r}c)$ genannt. \mathfrak{B} bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung in dem betreffenden Mittel.

1) E. Kohl, Ann. d. Phys. 11. p. 96. 1903.

Die Gleichung (1) hat eine einfache Bedeutung: sie sagt zunächst, daß die Ausbreitung der einzelnen, unendlich kurz dauernden Erregungen von den einzelnen Punkten P aus in Kugelwellen mit der gleichförmigen Geschwindigkeit \mathfrak{B} stattfindet, und ferner, daß sich die Amplitude um den Faktor $1/r(1 - v(\hat{r}\hat{c}))$ im Verhältnisse von jener bei ruhender Quelle geändert hat. Die Formel (1) hat die bemerkenswerte Eigentümlichkeit, daß bloß Größen in ihr vorkommen, welche sich auf den Ort P allein beziehen. Es lag der Gedanke nahe, zu untersuchen, ob sie infolge dieser Eigenschaft nicht überhaupt allgemeine Gültigkeit besitzt, eine Frage, welche im folgenden behandelt werden soll.

Der Untersuchungsang geschieht auf demselben Wege, welcher in der vorhergehenden Arbeit eingeschlagen wurde,



indem nämlich gezeigt werden wird, daß der Ausdruck (1) auch in seiner allgemeinen Fassung die Gleichung (2) erfüllt.

Es werde in der nebenstehenden Figur eine durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehende beliebige Raum-

kurve vorausgesetzt, auf der sich eine schwingende Quelle mit der Geschwindigkeit $c_s(t)$ bewegt, welche also als eine ganz beliebige Funktion der Zeit zu betrachten ist. Es wird wie oben einen Punkt P mit den zeitlich veränderlichen Koordinaten ξ, η, ζ geben, von dem aus sich eine Wellenbewegung in derselben Zeit zu dem Punkte M mit den unveränderlichen Koordinaten x_0, y_0, z_0 fortpflanzt, welche die Quelle benötigt, um von P in ihre gegenwärtige Lage Q zu gelangen; die Zeit während der Bewegung der Quelle von O zu Q ist dann t . Die Entfernung PM sei wieder mit r , ihre Richtungswinkel mit λ, μ, ν bezeichnet, während die Richtungswinkel der Tangente im Punkte P durch α, β, γ dargestellt werden sollen; der Winkel zwischen PM und PT heiße wieder ϑ .

Es läßt sich nun leicht die Gleichung für r in der Gestalt

$$(3) \quad r^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2$$

aufschreiben, worin

$$(4) \quad \xi = \int_0^{t - \frac{r}{\mathfrak{B}}} c_\xi(t) dt, \quad \eta = \int_0^{t - \frac{r}{\mathfrak{B}}} c_\eta(t) dt, \quad \zeta = \int_0^{t - \frac{r}{\mathfrak{B}}} c_\zeta(t) dt$$

ist; unter $c_\xi(t)$, $c_\eta(t)$, $c_\zeta(t)$ sind die Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit t verstanden, sodaß man also

$$(5) \quad c_\xi(t) = c_o(t) \cos \alpha, \quad c_\eta(t) = c_o(t) \cos \beta, \quad c_\zeta(t) = c_o(t) \cos \gamma$$

zu setzen hat. Ferner ist

$$(6) \quad \cos \lambda = \frac{x_0 - \xi}{r}, \quad \cos \mu = \frac{y_0 - \eta}{r}, \quad \cos \nu = \frac{z_0 - \zeta}{r}.$$

Für die Größe $t - r/\mathfrak{B}$, welche in der Folge häufig auftreten wird, werde der Kürze wegen ω gesetzt, woraus

$$(7a) \quad \omega = t - \frac{r}{\mathfrak{B}},$$

$$(7b) \quad \frac{d\omega}{dt} = 1 - \frac{dr}{dt},$$

$$(7c) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_0} = -\frac{\partial r}{\partial x_0 \mathfrak{B}}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y_0} = -\frac{\partial r}{\partial y_0 \mathfrak{B}}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z_0} = -\frac{\partial r}{\partial z_0 \mathfrak{B}}.$$

sich ergibt. Weiter soll zur Vereinfachung

$$(8) \quad \frac{c_o(t)}{\mathfrak{B}} = k_o(t), \quad \frac{c_\xi(t)}{\mathfrak{B}} = k_\xi(t), \quad \frac{c_\eta(t)}{\mathfrak{B}} = k_\eta(t), \quad \frac{c_\zeta(t)}{\mathfrak{B}} = k_\zeta(t)$$

gesetzt werden. Für V erhält man so

$$(1') \quad V = \frac{1}{r(1 - k_o(\omega) \cos \vartheta)} \sin \frac{2\pi}{\tau_o} \omega,$$

worin

$$(9) \quad k_o(\omega) \cos \vartheta = \frac{x_0 - \xi}{r} k_\xi(\omega) + \frac{y_0 - \eta}{r} k_\eta(\omega) + \frac{z_0 - \zeta}{r} k_\zeta(\omega)$$

ist. Mittels der Größe ω läßt sich r in der Gestalt

$$(3') \quad r^2 = \left(x_0 - \int_0^\omega c_\xi(t) dt\right)^2 + \left(y_0 - \int_0^\omega c_\eta(t) dt\right)^2 + \left(z_0 - \int_0^\omega c_\zeta(t) dt\right)^2$$

darstellen; desgleichen ergeben sich daraus folgende weitere Beziehungen:

$$(10a) \quad \xi = \int_0^{\omega} c_{\xi}(t) dt, \quad \eta = \int_0^{\omega} c_{\eta}(t) dt, \quad \zeta = \int_0^{\omega} c_{\zeta}(t) dt,$$

$$(10b) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} c_{\xi}(\omega), \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\omega}{dt} c_{\eta}(\omega), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\omega}{dt} c_{\zeta}(\omega),$$

$$(10c) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x_0} = \frac{\partial \omega}{\partial x_0} c_{\xi}(\omega), & \frac{\partial \eta}{\partial x_0} = \frac{\partial \omega}{\partial x_0} c_{\eta}(\omega), & \frac{\partial \zeta}{\partial x_0} = \frac{\partial \omega}{\partial x_0} c_{\zeta}(\omega), \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_0} = \frac{\partial \omega}{\partial y_0} c_{\xi}(\omega), & \frac{\partial \eta}{\partial y_0} = \frac{\partial \omega}{\partial y_0} c_{\eta}(\omega), & \frac{\partial \zeta}{\partial y_0} = \frac{\partial \omega}{\partial y_0} c_{\zeta}(\omega), \\ \frac{\partial \xi}{\partial z_0} = \frac{\partial \omega}{\partial z_0} c_{\xi}(\omega), & \frac{\partial \eta}{\partial z_0} = \frac{\partial \omega}{\partial z_0} c_{\eta}(\omega), & \frac{\partial \zeta}{\partial z_0} = \frac{\partial \omega}{\partial z_0} c_{\zeta}(\omega). \end{cases}$$

Es soll nunmehr eine Gleichung abgeleitet werden, welche den Ausdruck (1') in einer sehr einfachen Form darzustellen gestattet. Differenziert man nämlich (3') nach t , so ergibt sich

$$(11) \quad \frac{dr}{dt} = - \left[\frac{x_0 - \xi}{r} \frac{d\xi}{dt} + \frac{y_0 - \eta}{r} \frac{d\eta}{dt} + \frac{z_0 - \zeta}{r} \frac{d\zeta}{dt} \right],$$

oder nach mehreren Vereinfachungen mit Benutzung der Gleichungen (6), (10a), (10b), (7b), (8) und (9)

$$(11') \quad \frac{dr}{dt} = - \mathfrak{B} \frac{k_0(\omega) \cos \vartheta}{1 - k_0(\omega) \cos \vartheta},$$

und daraus

$$(12) \quad 1 - \frac{\frac{dr}{dt}}{\mathfrak{B}} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{1 - k_0(\omega) \cos \vartheta}.$$

Es ist also

$$(1'') \quad V = \frac{1 - \frac{\frac{dr}{dt}}{\mathfrak{B}}}{r} \sin \frac{2\pi}{i_0} \omega = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{r} \sin \frac{2\pi}{i_0} \omega = U \sin \frac{2\pi}{i_0} \omega,$$

wenn der Kürze wegen

$$(13) \quad U = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{r}$$

gesetzt wird. Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung (2) ein, so erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$(14) \quad \left\{ \left[\Delta U - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 U}{dt^2} \right] - \left(\frac{2\pi}{i_0} \right)^2 U \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right)^2 - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] \right\} \sin \omega \\ + \left(\frac{2\pi}{i_0} \right) \left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial \omega}{\partial x_0} + \frac{\partial U}{\partial y_0} \frac{\partial \omega}{\partial y_0} + \frac{\partial U}{\partial z_0} \frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right) + U \Delta \omega - \frac{2}{\mathfrak{B}^2} \frac{dU}{dt} \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} U \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right\} \cos \omega = 0.$$

Wenn man festsetzt, daß die Glieder mit $\sin \omega$ und $\cos \omega$ für sich verschwinden sollen, so gewinnt man hieraus:

$$(15a) \left\{ \Delta U - \frac{1}{3^2} \frac{d^2 U}{dt^2} - \left(\frac{2\pi}{\tau_0} \right)^2 U \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right)^2 - \frac{1}{3^2} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] = 0, \right.$$

$$(15b) \left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial \omega}{\partial x_0} + \frac{\partial U}{\partial y_0} \frac{\partial \omega}{\partial y_0} + \frac{\partial U}{\partial z_0} \frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right) + U \Delta \omega - \frac{2}{3^2} \frac{dU}{dt} \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{3^2} U \frac{d^2 \omega}{dt^2} = 0. \right.$$

Die Gleichung (15a) zerfällt wieder in zwei besondere, da sowohl der Ausdruck ohne $(2\pi/\tau_0)^2$ wie auch jener mit $(2\pi/\tau_0)^2$ für sich allein verschwinden muß, da sonst die Amplitude von der Schwingungszahl der Erregung abhängig wäre; es muß demnach

$$(16a) \quad \Delta U - \frac{1}{3^2} \frac{d^2 U}{dt^2} = 0,$$

$$(16b) \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right)^2 - \frac{1}{3^2} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 = 0$$

sein.

Es ist jetzt zu untersuchen, ob der Ausdruck (1') diesen drei Gleichungen (16a), (16b) und (15b) genügt.

Man betrachte zu diesem Zwecke zunächst die Gleichung (16b) und bilde aus (3') durch Differentiation nach x_0, y_0, z_0 die Differentialquotienten $\partial r/\partial x_0, \partial r/\partial y_0, \partial r/\partial z_0$. Unter Benutzung der Beziehungen (6), (10c), (7c), (8) und (9) erhält man ohne Schwierigkeit

$$(17) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial r}{\partial x_0} = \frac{\cos \lambda}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}, & \frac{\partial \omega}{\partial x_0} = -\frac{1}{3} \frac{\cos \lambda}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}, \\ \frac{\partial r}{\partial y_0} = \frac{\cos \mu}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}, & \frac{\partial \omega}{\partial y_0} = -\frac{1}{3} \frac{\cos \mu}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}, \\ \frac{\partial r}{\partial z_0} = \frac{\cos \nu}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}, & \frac{\partial \omega}{\partial z_0} = -\frac{1}{3} \frac{\cos \nu}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}. \end{array} \right.$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke und des Ausdruckes (12) in (16b) zeigt, daß die letztere Gleichung tatsächlich erfüllt ist.

Sodann werde die Gleichung (16a) untersucht. Man erhält, wenn man für U seinen Wert aus (13) einsetzt,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \Delta \omega - \frac{2}{r^3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial x_0} + \frac{\partial r}{\partial y_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial y_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right] \\ &\quad + \frac{2}{r^3} \frac{d\omega}{dt} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z_0} \right)^2 \right] - \frac{1}{r^3} \frac{d\omega}{dt} \Delta r, \\ \frac{d^2 U}{dt^2} &= \frac{d^2 \omega}{dt^2} - \frac{2}{r^3} \frac{d^2 \omega}{dt^2} \frac{dr}{dt} + \frac{2}{r^3} \frac{d\omega}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{1}{r^3} \frac{d\omega}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

woraus sich, wenn für die Differentialquotienten von ω gemäß den Gleichungen (7b), (7c) jene von r eingeführt werden, nach einigen leicht zu übersehenden Zusammenziehungen

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta U - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 U}{dt^2} &= - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d}{dt} \frac{\Delta r - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 r}{dt^2}}{r} - \frac{\Delta r - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 r}{dt^2}}{r^3} \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z_0} \right)^2 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}{r} \\ &\quad + \frac{2}{r^3} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z_0} \right)^2 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned} \right.$$

ergibt.

Man berechne ferner, um die Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten zu bestimmen, mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\partial c_r(\omega)}{\partial \cdot} = \frac{\partial c_r(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \cdot}.$$

aus (17)

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_0^2} &= \frac{\frac{\partial \cos \lambda}{\partial x_0}}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta} + \frac{\cos \lambda \frac{\partial k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}{\partial x_0}}{(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y_0^2} &= \frac{\frac{\partial \cos \mu}{\partial y_0}}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta} + \frac{\cos \mu \frac{\partial k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}{\partial y_0}}{(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial z_0^2} &= \frac{\frac{\partial \cos \nu}{\partial z_0}}{1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta} + \frac{\cos \nu \frac{\partial k_\sigma(\omega) \cos \vartheta}{\partial z_0}}{(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2}. \end{aligned} \right.$$

Führt man die Rechnungen mit Berücksichtigung von (6), (7c), (9), (10c) und (17) durch, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_0^2} = & \frac{1}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)} + \frac{2 k_\xi(\omega) \cos \lambda}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} \\ & - \frac{\cos^2 \lambda}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} + \frac{k_\sigma^2(\omega) \cos^2 \lambda}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} \\ & - \frac{k_\sigma(\omega) \cos \vartheta \cos^2 \lambda}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} \frac{\partial k_\xi(\omega)}{\partial \omega} \cos \lambda; \end{aligned}$$

ähnlich gestalten sich die Werte von $\partial^2 r / \partial y_0^2$, $\partial^2 r / \partial z_0^2$.

Hieraus gewinnt man leicht wegen (8) und (9)

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \Delta r = & \frac{2 - 4 k_\sigma(\omega) \cos \vartheta + k_\sigma^2(\omega) \cos^2 \vartheta + k_\sigma^2(\omega)}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} \\ & - \frac{1}{\mathfrak{B}(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} \left(\frac{\partial k_\xi(\omega)}{\partial \omega} \cos \lambda + \frac{\partial k_\eta(\omega)}{\partial \omega} \cos \mu \right. \\ & \left. + \frac{\partial k_z(\omega)}{\partial \omega} \cos \nu \right). \end{aligned} \right.$$

Ferner liefert die Differentiation von (12) nach t unter Benutzung von (7b), (9), (10b) und (12)

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 r}{dt^2} = & \frac{k_\sigma^2(\omega) - k_\sigma^2(\omega) \cos^2 \vartheta}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)^2} \\ & \left(\frac{\partial k_\xi(\omega)}{\partial \omega} \cos \lambda + \frac{\partial k_\eta(\omega)}{\partial \omega} \cos \mu + \frac{\partial k_z(\omega)}{\partial \omega} \cos \nu \right), \end{aligned} \right.$$

daher erhält man

$$(23) \quad \Delta r - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)}.$$

Es mögen nun in Gleichung (19) die beiden nach t differenzierten und die beiden den Faktor $d\omega/dt$ enthaltenden Glieder je für sich vereinigt werden; führt man (23) ein und ersetzt die Quadrate der Differentialquotienten nach x_0 , y_0 , z_0 und t durch die entsprechenden Werte aus (17) und (11'), so folgt als Schlussergebnis unter Beachtung von (11')

$$(24) \quad \Delta U - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{d^2 U}{dt^2} = - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{2}{r^2} \frac{dr}{dt} = 0.$$

Es ist daher auch (16 a) erfüllt.

Schließlich handelt es sich noch um die Gleichung (15b). Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial U}{\partial x_0} \frac{\partial \omega}{\partial x_0} &= \frac{2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial x_0} \frac{\partial \omega}{\partial x_0}}{r} - \frac{2 \frac{d \omega}{dt} \frac{\partial r}{\partial x_0} \frac{\partial \omega}{\partial x_0}}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{2}{3 r^2} \frac{d \omega}{dt} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2; \end{aligned}$$

entsprechend sind

$$2 \frac{\partial U}{\partial y_0} \frac{\partial \omega}{\partial y_0}, \quad 2 \frac{\partial U}{\partial z_0} \frac{\partial \omega}{\partial z_0}$$

zusammengesetzt; ferner ist

$$\begin{aligned} 2 \frac{d U}{dt} \frac{d \omega}{dt} &= \frac{2 \frac{d}{dt} \frac{d \omega}{dt} \frac{d \omega}{dt}}{r} - \frac{2 \frac{d \omega}{dt} \frac{dr}{dt} \frac{d \omega}{dt}}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{d \omega}{dt} \right)^2 - \frac{2}{3 r^2} \frac{d \omega}{dt} \left(1 - \frac{dr}{3} \right) \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Demzufolge kann (15b) auch in der Gestalt

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right)^2 - \left(\frac{d \omega}{dt} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{2}{3 r^2} \frac{d \omega}{dt} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right)^2 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{dt} \right] \\ &- \frac{d \omega}{3 r} \left[\Delta r - \frac{1}{3^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right] \end{aligned} \right.$$

dargestellt werden. Der erste Klammerausdruck verschwindet gemäß (16b), während die beiden anderen wegen (7), (11), (12) und (17)

$$\frac{2}{3 r^2} \frac{1}{1 - k_0(\omega) \cos \vartheta} - \frac{2}{3 r^2} \frac{1}{1 - k_0(\omega) \cos \vartheta} = 0$$

ergeben.

Es ist somit gezeigt, daß die Funktion (1') in der Tat eine dem Dopplerschen Prinzip entsprechende Lösung der Gleichungen für die Wellenbewegung bei jeder beliebigen Be-

wegung der Quelle liefert und nicht bloß auf den Fall eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig stattfindenden Fortschreitens der Quelle beschränkt ist.

Im Anschlusse an diese Entwicklungen soll eine Eigenschaft der Funktionen U und V benutzt werden, um die Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie für ein beliebig bewegtes elektrisches Teilchen zu entwickeln.

Sowohl die Funktion V als auch die Funktion U haben, wie schon erwähnt, die Eigenschaft, daß sie nur von Größen abhängen, welche sich auf die Punkte P und M beziehen. Die Funktion U stellt die Lösung der Gleichung (2) für den Fall $\lim r_0 = \infty$ dar, wo also die Quelle unendlich langsame Schwingungen aussendet, oder, was dasselbe ist, ohne Schwingungen auszuführen, in beliebiger Bewegung begriffen ist; es folgt dies unmittelbar aus der Gleichung (1'), wenn hierin das zweite partikuläre Integral mit \cos gewählt wird. Man kann nun bekanntlich im Falle eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig fortschreitenden elektrischen Teilchens aus der Funktion U eine Lösung der Feldgleichungen erhalten, welche aus den ersten Abgeleiteten von U und der Geschwindigkeit c des elektrischen Teilchens zusammengesetzt ist. Da die ersten Abgeleiteten auch bei gekrümmter Bahn und bei beliebiger Geschwindigkeit nur die jeweilige Tangentenrichtung und die Komponenten dieser Geschwindigkeit enthalten und sich daher für eine unendlich kurze Zeit ebenfalls auf eine geradlinige Bewegung längs des Bogenteilchens des Kurvenpunktes P beziehen, so liegt der Gedanke nahe, ob nicht aus der Funktion U auch im allgemeinen Falle die Feldgleichungen erhalten werden können, da auch deren Abgeleitete nur Größen enthalten, welche sich auf die Punkte P und M beziehen.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten in der Boltzmannschen Darstellung¹⁾ für einen Nichtleiter:

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, II. Teil, p. 17, Gleichung (C), p. 18, Gleichung (D). Leipzig 1893.

$$(26a) \quad \begin{cases} \frac{D}{\mathfrak{B}} \frac{dP}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} - \frac{\partial \gamma}{\partial y_0}, \\ \frac{D}{\mathfrak{B}} \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_0}, \\ \frac{D}{\mathfrak{B}} \frac{dR}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} - \frac{\partial \beta}{\partial x_0}. \end{cases}$$

$$(26b) \quad \begin{cases} \frac{M}{\mathfrak{B}} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y_0} - \frac{\partial Q}{\partial x_0}, \\ \frac{M}{\mathfrak{B}} \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x_0} - \frac{\partial R}{\partial x_0}, \\ \frac{M}{\mathfrak{B}} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x_0} - \frac{\partial P}{\partial y_0}. \end{cases}$$

Wie der Verfasser dieses Aufsatzes gezeigt hat¹⁾, können diese Gleichungen auch aus der Fernwirkungstheorie hergeleitet werden, wobei dann P , Q , R die Komponenten der elektrisierenden Kraft, α , β , γ die Komponenten der magnetischen Kraft bedeuten. D ist die Dielektrizitätskonstante, M die Magnetisierungszahl, \mathfrak{B} die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erregung im Äther. Eine exakte Lösung dieser Gleichungen für den allgemeinen Fall hat Wiechert²⁾ unter Zugrundelegung der Ionentheorie gegeben, wobei die Gleichungen (26a) bei ihm in Hinblick auf die Voraussetzungen dieser Theorie ein Zusatzglied besitzen. Es kann nun gezeigt werden, daß die Wiechertsche Lösung ganz unabhängig von einer besonderen Theorie unmittelbar aus den mathematischen Eigenschaften der Funktion U gewonnen werden kann.

Es soll zu diesem Zwecke von den magnetischen Kraftkomponenten ausgegangen werden. Setzt man ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit c in der Richtung der Z -Achse fortschreitendes elektrisches Teilchen voraus, welches die wahre Elektrizitätsmenge 1 besitzt, so erscheinen bekanntlich diese Komponenten in der Gestalt:

$$\alpha = -\frac{\partial}{\partial y_0}(kU), \quad \beta = \frac{\partial}{\partial x_0}(kU), \quad \gamma = 0.$$

1) E. Kohl, Monatshefte für Mathematik und Physik 11. p. 289 bis 264. 1901; 13. p. 156—184. 1902.

2) E. Wiechert, Archives Néerlandaises (2) 5. p. 549—573. 1900; Ann. d. Phys. 4. p. 667—689. 1901.

Diese Ausdrücke haben eine einfache Bedeutung; sie sind nämlich die Komponenten der magnetischen Kraft, welche ein zur Zeit t im Punkte P befindliches Stromteilchen mit der elektromagnetisch gemessenen Strommenge $c/\mathfrak{B} = k$ auf den Punkt P ausübt, wenn sich seine Wirkungsfunktion gegenüber jener eines ruhenden Teilchens im Verhältnisse $U:1/r$ geändert hat. Überträgt man diese Anschauungen auf den allgemeinen Fall, wo das Teilchen zur Zeit $\bar{\omega}$ eine unendlich kurze geradlinige Bahn $c_\omega dt$ in der Tangentenrichtung beschreibt, so erhält man folgende Ausdrücke für diese Kraftkomponenten:

$$(27) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\eta(\bar{\omega}) \bar{U}) - \frac{\partial}{\partial y_0} (k_\zeta(\bar{\omega}) \bar{U}), \\ \beta = \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\zeta(\bar{\omega}) \bar{U}) - \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\xi(\bar{\omega}) \bar{U}), \\ \gamma = \frac{\partial}{\partial y_0} (k_\xi(\bar{\omega}) \bar{U}) - \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\eta(\bar{\omega}) \bar{U}). \end{cases}$$

Hierbei ist nunmehr

$$\bar{\omega} = t - \frac{r}{\mathfrak{B}_m}, \quad \bar{U} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

zu setzen, worin \mathfrak{B}_m die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erregung in dem betreffenden nichtleitenden Mittel bedeutet.

Setzt man diese Werte in (26a) ein, so erhält man für die Komponenten der elektrisierenden Kraft die Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{D}{\mathfrak{B}} \frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} (k_\xi(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y_0} (k_\eta(\bar{\omega}) \bar{U}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\zeta(\bar{\omega}) \bar{U}) \right] - \Delta (k_\xi(\bar{\omega}) \bar{U}), \\ \frac{D}{\mathfrak{B}} \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial y_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} (k_\xi(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y_0} (k_\eta(\bar{\omega}) \bar{U}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\zeta(\bar{\omega}) \bar{U}) \right] - \Delta (k_\eta(\bar{\omega}) \bar{U}), \\ \frac{D}{\mathfrak{B}} \frac{dR}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} (k_\xi(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y_0} (k_\eta(\bar{\omega}) \bar{U}) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial x_0} (k_\zeta(\bar{\omega}) \bar{U}) \right] - \Delta (k_\zeta(\bar{\omega}) \bar{U}). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind einer weiteren Vereinfachung fähig. Es folgt unter Benutzung von (10a), (10b), (6), (17), (11), (12) und unter Beachtung, daß

$$\frac{\partial k_r(\bar{\omega})}{\partial \cdot} = \frac{\partial k_r(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \cdot}$$

ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{k_{\xi}(\bar{\omega})}{r} \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\frac{d}{dt} \left(x_0 - \int_0^{\bar{\omega}} c_{\xi}(t) dt \right)}{r} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\frac{d}{dt} \left(1 - c_{\xi}(\bar{\omega}) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_0} \right)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\frac{d}{dt} \left(x_0 - \int_0^{\bar{\omega}} c_{\xi}(t) dt \right) \cos \vartheta}{r^3 (1 - k_{\sigma}(\bar{\omega}) \cos \vartheta)} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \frac{k_{\xi}(\bar{\omega}) \cos \lambda}{1 - k_{\sigma}(\bar{\omega}) \cos \vartheta} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\frac{d}{dt} \left(x_0 - \int_0^{\bar{\omega}} c_{\xi}(t) dt \right) \left(x_0 - \int_0^{\bar{\omega}} c_{\xi}(t) dt \right)}{r^3 (1 - k_{\sigma}(\bar{\omega}) \cos \vartheta)}, \end{aligned}$$

und durch Summierung mit Berücksichtigung der Gleichungen (3), (8), (17), (11), (12) und (9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} (k_{\xi}(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y_0} (k_{\eta}(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial z_0} (k_{\zeta}(\bar{\omega}) \bar{U}) \\ = -\frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \frac{k_{\sigma}(\bar{\omega}) \cos \vartheta}{1 - k_{\sigma}(\bar{\omega}) \cos \vartheta} - \frac{1}{3} \frac{\frac{dr}{dt}}{r^3 (1 - k_{\sigma}(\bar{\omega}) \cos \vartheta)} \\ = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{\mathfrak{B}_m} \right) + \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \frac{1 - \frac{dr}{\mathfrak{B}_m}}{r} \right] \\ = -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dr}{dt}}{r} \right) = -\frac{1}{3} \frac{d\bar{U}}{dt}. \end{aligned}$$

Der zweite Klammerausdruck erscheint demnach in der Gestalt:

$$(29) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \cdot} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} (k_{\xi}(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y_0} (k_{\eta}(\bar{\omega}) \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial z_0} (k_{\zeta}(\bar{\omega}) \bar{U}) \right] \right. \\ \left. = -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \cdot} \right.$$

Behufs Vereinfachung der Größe $\Delta(k_z(\bar{\omega}) \bar{U})$ bilde man mit Hilfe der Beziehungen (7a), (7b), (7c) und (10a), (10b), (10c) sowie

$$\frac{\partial^2 k_r(\bar{\omega})}{\partial \cdot^2} = \frac{\partial^2 k_r(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \cdot} \right)^2 - \frac{\partial k_r(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \cdot^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta(k_z(\bar{\omega}) \bar{U}) &= \frac{1}{\mathfrak{B}_m^2} \frac{d^2}{dt^2} (k_z(\bar{\omega}) \bar{U}) \\ &= \frac{\partial^2 k_z(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}^2} \left[\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z_0} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \right)^2 \right] \cdot \bar{U} \\ &\quad + \frac{\partial k_z(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_0} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y_0} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z_0} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\mathfrak{B}_m^2} \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{U} \left(\Delta \bar{\omega} - \frac{1}{\mathfrak{B}_m^2} \frac{d^2 \bar{\omega}}{dt^2} \right) \right] \\ &\quad + k_z(\bar{\omega}) \left[\Delta \bar{U} - \frac{1}{\mathfrak{B}_m^2} \frac{d^2 \bar{U}}{dt^2} \right]. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit den Gleichungen (15b), (16a) und (16b) erkennt man, daß

$$\Delta(k_z(\bar{\omega}) \bar{U}) = \frac{1}{\mathfrak{B}_m^2} \frac{d^2}{dt^2} (k_z(\bar{\omega}) \bar{U})$$

ist, woraus man erhält:

$$(28^*) \quad \begin{cases} P = -\frac{1}{D} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_0} - \frac{\mathfrak{B}}{D \mathfrak{B}_m^2} \frac{d}{dt} (k_z(\bar{\omega}) \bar{U}), \\ Q = -\frac{1}{D} \frac{d\bar{U}}{dt} - \frac{\mathfrak{B}}{D \mathfrak{B}_m^2} \frac{d}{dt} (k_y(\bar{\omega}) \bar{U}), \\ R = -\frac{1}{D} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z_0} - \frac{\mathfrak{B}}{D \mathfrak{B}_m^2} \frac{d}{dt} (k_z(\bar{\omega}) \bar{U}). \end{cases}$$

Führt man diese Werte in (26b) ein, so ergibt sich wegen der Beziehung $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{B}_m^2 = D \cdot M$ die Übereinstimmung beider Systeme (26b) und (27).

Die Gleichungen (27) und (28*) sind gleichartig mit jenen, welche Wiechert in der oben erwähnten Arbeit durch einen anderen Entwicklungsgang abgeleitet hat, wodurch dieses

wichtige Ergebnis Wiecherts auch auf dem hier eingeschlagenen Wege bewiesen erscheint. Es unterliegt keinen Schwierigkeiten, die Gleichungen (27) und (28) in der bekannten Integralform darzustellen, wenn nicht mehr *ein* bewegtes Teilchen allein, sondern eine stetige Folge von solchen, also eine räumlich ausgedehnte Menge bewegter Elektrizität in Betracht kommt.

Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß die Möglichkeit der Ausrechnung der Wirkungsfunktion U für besondere Fälle der Bewegung der Quelle, bez. des elektrischen Teilchens, davon abhängt, ob die Gleichung (3') nach r aufgelöst werden kann, eine Aufgabe, welche allerdings schon bei verhältnismäßig einfachen Bewegungsbedingungen nicht mehr in aller Strenge durchführbar ist.

Wien, im März 1903.

(Eingegangen 18. März 1903.)

4. Zur Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber; von Gottlieb Kučera.

(Auszug aus des Verfassers Habilitationsschrift, Leipzig 1903. 8°. 87 pp.)

(Hierzu Taf. II u. III.)

I. *Einleitung.* Die Kapillaritätstheorie¹⁾ liefert für die Oberflächenspannung α_{12} an der Grenze zweier Flüssigkeiten mit den Oberflächenspannungen α_1 und α_2 die Formel

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2 A_{12},$$

wo A_{12} , welches wir kurz als Adhäsion bezeichnen wollen, als ein Maß der zwischen den beiden Flüssigkeiten stattfindenden Molekularanziehungen aufgefaßt werden kann. Nun existiert aber an der Grenzfläche zweier Flüssigkeiten eine elektrische Doppelschicht, die wir zur Erklärung der dort herrschenden Potentialdifferenz und der Elektrokapillarscheinungen anzunehmen gezwungen sind. Auf diese Doppelschicht und die von ihr bewirkte starke Herabsetzung der Grenzflächenspannung nimmt die gew. Kapillaritätstheorie keine Rücksicht, sodaß aus den bisherigen Messungen dieser Größe keine Schlüsse über die Adhäsion A_{12} gezogen werden können. Nun kann man aber die Grenzfläche von der Doppelschicht befreien, indem man sie mit derjenigen elektromotorischen Kraft polarisiert, welche dem Maximum der Elektrokapillarkurve entspricht²⁾; das bei dieser Polarisation gemessene α_{12} — und nur dieses — entspricht den Voraussetzungen, die bei der Ableitung der bereits angeführten Formel gemacht werden. Der ursprüngliche Zweck der vorliegenden Arbeit war, die Ab-

1) P. Volkmann, Wied. Ann. 16. p. 321. 1882.

2) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 1. p. 925. 1882; A. König, Wied. Ann. 16. p. 28. 1882; W. Nernst, Über Berührungselektrizität, Beilage zu Wied. Ann. 1898; W. Palmaer, Zeitschr. f. phys. Chem. 36. p. 664. 1901; vgl. Habilitationsschrift p. 7—13.

hängigkeit der Adhäsion zwischen Quecksilber und verschiedenen Lösungen von der Konzentration der Lösungen zu prüfen.¹⁾

II. *Methode.* Von den bisher²⁾ zur Aufnahme der Elektrokapillarkurve (die Oberflächenspannung zwischen Quecksilber und einem Elektrolyten dargestellt als Funktion der angelegten elektromotorischen Kraft) benutzten Methoden ist zweifellos nur das Lippmannsche Kapillarelektrometer³⁾ und das Paschensche⁴⁾ U-Rohr einer ausgiebigen Benutzung bei großen Versuchsreihen fähig.

Aber es scheint, daß sich die sehr engen Kapillaren wenig zur Bestimmung der kapillarelektischen Eigenschaften von Lösungen mittels der Steighöhenmethode eignen, da die Untersuchungen von Mathieu⁵⁾ an Kapillaren mit einem Lumen von der Ordnung 10^{-2} mm zeigen, daß sich in solchen kapillaren Räumen, wenn sie sich in einer Salzlösung befinden, eine verdünntere Lösung als die äußere herstellt, auch wenn man von Konzentrationsänderungen, die durch Elektrolyse entstehen und sich nur sehr langsam ausgleichen können, absieht. Von diesem Fehler frei ist die Methode von Paschen, welche aber mit der Lippmannschen an einem gemeinschaftlichen Übelstand leidet — nämlich an der unvollkommenen Benetzbarkeit der Glasröhre mit der Lösung, wodurch der Randwinkel des Quecksilbermeniskus verschiedene Werte annehmen kann; diesem Umstande rechne ich es zu, daß die von den meisten Beobachtern erhaltenen Punkte der Kapillarkurve manchmal erheblich von einem stetigen Kurvenzug abweichen; nur die Resultate von Smith⁶⁾ machen in dieser Beziehung eine Ausnahme. Darum entschied ich mich für eine bisher zu diesem Zwecke nicht verwendete Methode, welche an keinem der beiden obigen Mißstände leidet, nämlich die der Tropfenwägung. Es galt also,

1) Nach den Versuchen von M. Krouchkoff (Journ. de Phys. 13. p. 303. 1884) und von F. v. Lerch (Ann. d. Phys. 9. p. 434. 1902) gelten obige Ausführungen auch für die Grenzflächen zwischen sogenannten Nichtelektrolyten (Äther, Benzol etc.).

2) Vgl. Habilitationsschrift p. 13—16.

3) G. Lippmann, Pogg. Ann. 149. p. 547. 1873; Ann. de Chim. et de Phys. [5] 5. p. 494. 1875.

4) F. Paschen, Wied. Ann. 39. p. 43. 1890; l. c. 41. p. 36. 1890.

5) J. Mathieu, Ann. d. Phys. 9. p. 840. 1902.

6) S. W. J. Smith, Zeitschr. f. phys. Chem. 32. p. 433. 1900.

den Einfluß der Polarisation auf das aus einer Glaskapillare tropfende Quecksilber zu untersuchen. Die Methode der Tropfenwägung hat allerdings den Nachteil, daß sich bisher keine Formel angeben läßt, welche den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Tropfengewicht, Oberflächenspannung, Radius der Ausflußöffnung und event. Zeit exakt darstellen würde. Dieses dynamische Problem ist für die heutige Kapillaritätstheorie vorläufig unlösbar.

Obgleich die das Tropfengewicht bestimmenden Faktoren zahlreich und wenig bekannt sind, so scheint doch die ganze bisherige Erfahrung eins zu bestätigen, daß nämlich das Tropfengewicht, wenn man es bei derselben Kapillare auf eine bestimmte, immer gleiche Tropfzeit bezieht, sehr genau proportional der Oberflächenspannung der benutzten Flüssigkeit ist, wobei diese Methode fähig ist, noch so kleine Änderungen der Oberflächenspannung anzugeben, daß diese mit anderen Methoden sehr schwer oder kaum mehr nachzuweisen wären. Aus der Diskussion der verschiedenen Umstände¹⁾ ergibt sich, daß bei einer nicht benetzenden Flüssigkeit (Quecksilber) und einer Kapillare von sehr kleinem Lumen (0,04 mm) wie sie von mir benutzt wurden die Verhältnisse besonders günstig liegen.

Aber eine Schwierigkeit liegt in unserem Falle vor, über deren Einfluß erst die Resultate Auskunft geben können. Das Tropfen von Quecksilber unter einem Elektrolyten ist nämlich mit einer sehr komplizierten elektrischen Erscheinung verbunden, welche eingehend in einer ausgedehnten Untersuchung von Paschen²⁾ studiert worden ist. Ohne auf die Frage nach der Ursache dieses Phänomens einzugehen, will ich nur kurz angeben, worin es besteht: Tropft Quecksilber in einem Elektrolyten, der mit einer zweiten, ruhenden Quecksilberelektrode versehen ist, und verbinden wir diese sowie die tropfende Quecksilbermasse leitend mit den Klemmen eines Kapillarelektrometers, so „zuckt der Meniskus dieses Elektrometers bei geeignet langsamem Tropfenfall im Tempo mit den fallenden Tropfen auf und ab. Seine Stellung ent-

1) Vgl. Habilitationsschrift p. 17, 18 u. 23.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 41. p. 801. 1890.

spricht in jedem Augenblicke der Potentialdifferenz zwischen dem ruhenden und dem tropfenden Quecksilber (Hg/Ellyt/Tr). Ist ein Tropfen abgefallen, so befindet sich der Meniskus (verbunden mit der tropfenden Masse) am weitesten zurück. Er bewegt sich beim Wachsen des Tropfens erst schnell, dann langsamer vorwärts, um plötzlich wieder zum weitesten Ausschlag zurückzuzucken. In diesem Augenblicke ist der betrachtete Tropfen abgefallen“. Es entsteht also beim Tropfen eine Potentialdifferenz, welche einer kathodischen Polarisierung der tropfenden Masse, wie sie in vorliegender Arbeit hauptsächlich untersucht wurde, entgegengesetzt wirkt. Es könnte demnach, wenn der letzte, sprungweise Anstieg dieser entgegengesetzten elektromotorischen Kraft noch bei leitender Verbindung des Tropfens mit der übrigen Masse stattfinden würde, vorkommen, daß er im Moment des Abreißens die angelegte elektromotorische Kraft verkleinern würde, sodaß die aus dem Tropfengewicht bestimmte Oberflächenspannung bei einer bestimmten Polarisierung eigentlich einer kleineren polarisierenden Kraft angehören würde. Dies würde sich in einer Verschiebung des Maximums der Elektrokapillarkurve nach höheren Polarisierungen hin äußern. Wie wir vorgreifend angeben können, ergaben die Versuche, daß eine ähnliche Verschiebung *nicht* stattfindet, sodaß sich die erwähnten Befürchtungen als grundlos erwiesen.

Bei der Wahl der Methode war übrigens auch der Umstand entscheidend, daß hierbei zum erstenmal die kapillarelektrischen Phänomene an vollständig frischen, sich immer erneuernden Quecksilberoberflächen studiert werden sollten. Dem ist es auch beizumessen, daß sich dabei neue, bisher unbekannte Erscheinungen haben finden lassen. Außerdem hoffte ich auch, daß sich bei diesem denkbar einfachsten Fall von Tropfen einer und derselben Flüssigkeit (Quecksilber) von gleichbleibender Dichte, innerer Reibung etc., aber in ziemlich weiten Grenzen veränderlicher Oberflächenspannung, neue Aufklärungen über die Methode der Tropfenwägung zur Bestimmung von Oberflächenspannungen ergeben könnten.

III. *Messungen und Apparate.* 1. Die Einrichtung zur Entnahme der polarisierenden Kräfte ist aus der Fig. 1 ersichtlich. Als Stromquelle *E* dienten meistens zwei „Hellesentrocken-

elemente“, welche in einigen Fällen durch einen oder mehrere halbentladene tragbare Akkumulatoren ersetzt wurden. Die Klemmenspannung am Potentiometer, zwischen den Punkten a und b oder a_1 und b_1 (da der Widerstand aller Verbindungsdrähte zu vernachlässigen war) wurde vor und nach jeder Messung mittels eines Westonschen „Normalvoltmeters“ bestimmt, dessen Angaben mit Hülfe eines vielzelligen Quadrantenelektrometers von Liebreich und eines von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt beglaubigten Westonnormalelementes kontrolliert waren.

Zur Erzielung des Spannungsabfalles dienten zwei Edelmanssche Rheostaten R_1 und R_2 , bei deren Kalibration sich

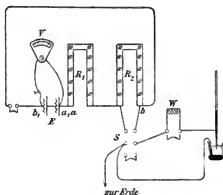


Fig. 1.

nur Korrekturen von der Ordnung 0,01 Proz. ergaben, die vernachlässigt werden konnten. Es wurde bei konstantem Gesamtwiderstand ($R_1 + R_2$) gewöhnlich mit einem Spannungsabfall 0,1 Volt pro 100 bez. 50 Ohm gearbeitet. Von R_2 gingen zwei Drähte zur Wippe S , welche dazu diente das Tropfelektrometer entweder zu polarisieren oder kurz zu schließen. Das („ruhende“) Quecksilber am Boden des Tropfgefäßes, welchem der Strom durch einen in einem Glasrohr eingeschmolzenen Platindraht isoliert durch den Elektrolyten zugeführt wurde, war an der Wippe geerdet; zur tropfenden Masse gelangte der Strom entweder widerstandslos oder in einigen Versuchen durch den Widerstand W .

2. Das benutzte Quecksilber war doppelt destilliertes, „purissimum pro analysi“ von E. Merck, Darmstadt, von wo auch alle übrigen Reagentien in derselben Qualität bezogen wurden. Nach jeder Versuchsreihe wurde das ruhende Quecksilber in bekannter Weise gereinigt, indem es durch eine über 1 m hohe Säule von angesäuerter Merkuronitratlösung etwa sechsmal durchtropfte. Die im ersten Teile der Arbeit benutzten Lösungen waren frisch bereitet, alle anderen bei den definitiven Versuchen angewendeten wurden ca. 14 Tage vor der Benutzung vorbereitet und während dieses Zeitraumes in Flaschen mit eingeschliffenen Glasstöpseln *über reinem Quecksilber* aufbewahrt und öfters geschüttelt. Ihr spezifisches Gewicht wurde mit Hilfe einer guten, durchkalibrierten Mohrschen Wage von Sartorius, Göttingen, sorgfältig bestimmt, sodaß der Fehler sicher unter 0,0003 liegt.

3. Damit die Voraussetzung gelte, daß die ganze polarisierende Kraft an der Kapillarelektrode wirkt, muß diese im Verhältnis zur ruhenden Elektrode sehr klein sein. Deshalb und auf Grund anderer Erwägungen wurde eine recht enge Kapillare gewählt, welche in der von Ostwald¹⁾ angegebenen Weise aus einem frisch bezogenen Thermometerrohr (von 5,3 mm äußerem Durchmesser und ca. 0,2 mm Lumen) ausgezogen wurde; die Spitze wurde an einer geeigneten Stelle *unter* Wasser abgebrochen, mit dem die Kapillare fortan immer benetzt gehalten wurde. Von mehreren in dieser Weise hergestellten Kapillaren wurde eine gewählt, deren Bruchfläche bei einer ziemlich starken Vergrößerung gut eben erschien und welche mit passenden Quecksilberdrucken und Tropfzeiten zu arbeiten gestattete. Die Länge des engen Teiles betrug ca. 20 mm und der Durchmesser der Abtropföffnung ca. 0,04 mm. Die Kapillare kommunizierte mittels eines kurzen Stückes dickwandigen Kautschukschlanches mit einer Glasröhre, die mit einem Dreiweghahn (G, Fig. 2) mit weiter Bohrung und einem eingeschmolzenen Platindraht zur Stromzuführung versehen war. Von dieser führte ein längerer Kautschukschlauch zum Quecksilberreservoir R von ca. 1,8 cm Durchmesser, welches mit einem durchbohrten Korkstopfen mit durchgeführter Glas-

1) W. Ostwald-Luther, Phys.-chem. Messungen p. 339. 1902.

röhre und angesetztem Kautschukschlauch (zum Saugen) geschlossen war. Die ganze Vorrichtung wurde an einem starken Stativ in passender Höhe so befestigt, daß die Klemmen k_1 und k_2 ein für allemal dieselbe Stellung behielten; mit Hilfe der Klemme k_3 konnte das Quecksilberreservoir gehoben und gesenkt werden. Die Druckhöhe des Quecksilbers konnte mit

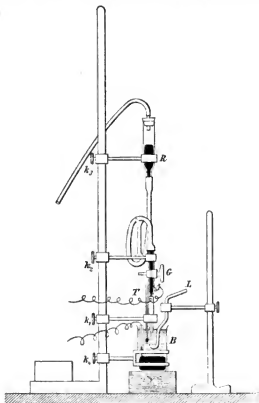


Fig. 2.

einem seitlich aufgestellten Vertikalkathetometer gemessen werden. Es ist zu bemerken, daß die benutzten Kautschukschläuche vor Gebrauch abwechselnd in Kalilauge und Wasser gekocht wurden, bis das Wasser klar blieb. Nachher wurden sie durch einen Luftstrom getrocknet und so lange mit reinem Quecksilber ausgespült, bis das Spülquecksilber rein blieb.

Alle Glasteile, außer der Kapillare, wurden mit heißer Salpeter- und Salzsäure und konzentrierter Kalilauge behandelt, nach Durchleiten von sehr viel Wasser mittels durchstreichender erwärmter Luft getrocknet und unmittelbar darauf zusammengesetzt und gefüllt. Das ruhende Quecksilber und der zu untersuchende Elektrolyt befanden sich in einem Becherglase (*B*), welches bei einigen wenigen ersten Versuchen (mit H_2SO_4) einen Durchmesser von ca. 3,3 cm, bei allen späteren einen solchen von ca. 6 cm, und eine Höhe von 9 cm hatte. Die Temperatur der Lösung wurde an einem kleinen Thermometer (*T*) abgelesen, dessen Gefäß sich unmittelbar neben der Öffnung der Kapillare befand. Bei den Versuchen wurde *B* mit ca. 50—70 cm³ Hg und 150—170 cm³ Lösung gefüllt. Zum Abfangen der Quecksilbertropfen diente ein Glaslöffel (*L*), der in einer Klemme eines kleinen Statives drehbar befestigt war, und im geeigneten Moment unter die Kapillare oder nach der Seite gedreht werden konnte. Der ganze Apparat stand, um Erschütterungen möglichst zu vermeiden, auf einem im Sockelgeschoß des physikalischen Institutes aufgestellten Steinblock. Im Beobachtungsraume schwankte innerhalb einer Versuchsreihe die Temperatur nicht mehr als innerhalb eines Grades, gewöhnlich viel weniger.

4. Der Tropfapparat wurde, wenn nicht gebraucht, immer im elektrischen Kurzschluß, die Kapillare unter Wasser in einem Reservegefäß ähnlich *B* gehalten; der Hahn *G* war geschlossen. Die Lösung wurde in *B* von dem über Quecksilber stehenden Vorrat hineinfltriert, und reines Quecksilber durch einen mit Nadelstichen versehenen Papiertrichter zugeführt. Nun wurde das Reservegefäß des Tropfapparates entfernt, und die Kapillare mit der neu zu untersuchenden Lösung vorgespült, was mit Hilfe des Hahnes *G* und des kurzen unteren Kautschukschlauches in einer sehr ergiebigen und einfachen Weise möglich war. Dann erst wurde das definitive Versuchsgefäß *B* nach Entfernen des untergestellten Holzklotzes unter die Kapillare gebracht, in die richtige Lage gehoben, der Holzklotz wieder untergeschoben und die Befestigungsklemme *k*₄ angezogen. Um nun vollständiges Gleichgewicht der Lösung zu erzielen, ließ ich vor dem Anfang jeder eigentlichen Versuchsreihe das Quecksilber während ca. 1/2 Stunde aus der Kapillare langsam tropfen, zuerst

bei einer starken polarisierenden elektromotorischen Kraft, dann bei elektrischem Kurzschluß. Bei der Messung wurde zuerst das Kathetometer auf den Quecksilbermeniskus im Reservoir *R* eingestellt und abgelesen, dann wurden durch den herbeigedrehten Löffel 60 (oder bei einigen Versuchen 80) Tropfen aufgefangen, indem gleichzeitig immer die Tropfdauer von 60 Tropfen mit Hilfe eines Fünftel-Sekunden angegebenden Stechchronometers mitbestimmt wurde. War eine polarisierende elektromotorische Kraft eingeschaltet gewesen, so wurde sie unmittelbar nach jedem Versuch ausgeschaltet und durch die Wippe (*S*, Fig. 1) Kurzschluß bis zum nächsten Versuch hergestellt. Das Quecksilbertropfte ununterbrochen während der ganzen Zeit einer Versuchsreihe (gewöhnlich 6—8 Stunden). Während eines einzelnen Versuches (wobei weniger als 0,4 g Hg ausflossen) sank das Quecksilberniveau im Reservoir *R* nicht ganz um 0,2 mm, was bei der Höhenbestimmung vernachlässigt werden konnte; vor dem nächsten Versuch wurde es mittels der Klemme *k*₂ wieder in die vorherige Lage (Fadenkreuz des Kathetometers) eingestellt.

5. Gleich nachdem die erwünschte Anzahl der Tropfen im Löffel gesammelt war, wurde dieser in einen kleinen Schmelztiegel aus Porzellan entleert. Der Quecksilbertropfen im Tiegel wurde dann ca. 5 Minuten von einem Leitungswasserstrahl gespült, wodurch er von der Lösung des Tropfapparates befreit wurde; das Spülwasser wurde dann abgegossen und der Rest mittels Filtrierpapier weggesogen. Nachher wurde der Tiegel vor einfallendem Staub geschützt und ca. 16 Stunden stehen gelassen, wobei die letzten Wasserspuren verdampften. Mehrere Versuche ergaben, daß durch diese Behandlung das ursprüngliche Gewicht der abgefangenen Quecksilbertropfen höchstens um 0,001 Proz. verändert wird.

Zur Wägung der getrockneten Quecksilbertropfen stand eine Wage von Sartorius, Göttingen, mit 200 g Maximalbelastung zur Verfügung. Alle Wägungen geschahen bei fast konstanter Belastung von 8 g, in der Nähe des Maximums der Empfindlichkeitskurve, wobei die Empfindlichkeit wenig von der Belastung abhängt. Aber auch zeitlich war sie sehr konstant, indem sie nur zwischen 1,60 und 1,64 sc/mg schwankte. Im allgemeinen kann $\frac{1}{10}$ mg verbürgt werden, was einer Genauigkeit von ca. 0,03 Proz. entspricht. Die benutzten Gewichte

(nur Bruchteile von 1 g), sämtlich aus Platin, wurden durchkalibriert, jedoch kein Fehler, der 0,1 mg erreichen würde, gefunden. Die Reduktion auf den leeren Raum ist in vorliegendem Falle zu vernachlässigen.

Etwas störend wirkte die ziemlich starke Abhängigkeit des Nullpunktes der Wage von der Temperatur; rechnerisch wurde sie in der Weise eliminiert, daß die Wägungen in Sätze von 15 bis 20 geteilt wurden, und in diesen Sätzen, vor und nach welchen der Nullpunkt immer von neuem bestimmt wurde, eine lineare Abhängigkeit der Veränderung des Nullpunktes von der Zeit vorausgesetzt wurde. Diese Änderung während eines Satzes überstieg nur ein einziges Mal den Skalenwert von 0,2 mg.

IV. *Messungen, die Methode betreffend.* 1. Um über die Größe des gefürchteten Einflusses der Erschütterungen wenigstens einige Anhaltspunkte zu haben, wurde folgender Versuch angestellt: Bei einer bestimmten Druckhöhe und bei elektrischem Kurzschluß wurde das Gewicht von 80 Tropfen in verdünnter (ca. 5 proz.) H_2SO_4 festgestellt, bei möglicher Vermeidung jeder Erschütterung. Es war 343,7 mg bei einer Tropfzeit von 221,4 Sek. Auf dem Sandsteinpfeiler, auf welchem sich der Tropfapparat befand, wurde ein kleines Induktorium (sekundäre Spule ca. 15 cm lang) mit gewöhnlichem Platinunterbrecher, der die Erschütterungen verursachen sollte, aufgestellt und in Gang gesetzt; 80 Tropfen wogen nun 341,6 mg, und flossen in 220,4 Sek. aus. Wurde aber das kleine Induktorium auf der die Kapillare tragenden Klemme k_2 (Fig. 2) des Statives befestigt und im Gang gehalten, so war der entsprechende Wert 330,2 mg in 213,6 Sek. Ein anderer Versuch bei einer weit größeren Druckhöhe und schnellerer Tropfenfolge ergab für 60 Tropfen 257,4 mg in 166,0 Sek.; 256,7 mg in 165,6 Sek. und 251,4 mg in 162,2 Sek. Der Einfluß auch außerordentlich schwacher Erschütterungen äußert sich also in einer merklichen Herabsetzung des Tropfengewichtes, und ist, wie leicht vorauszusehen war, um so größer, je langsamer die Tropfen sich bilden, je größer also die Tropfzeit ist. Er betrug beim ersten Versuch 0,6 Proz. und 3,9 Proz., beim zweiten 0,26 Proz. und 2,3 Proz. des Tropfengewichtes. Wie weitere Versuche zeigten, differierten zwei unter denselben

Bedingungen angestellte Versuche außer in sehr seltenen Ausnahmefällen höchstens um 0,1 mg, oder ca. 0,03 Proz., was ja die Genauigkeitsgrenze der Wägungen ist. Bei den Versuchen ist aber eine Erschütterung unvermeidlich, nämlich die durch das Herbeidrehen des Löffels (*L*, Fig. 2) unter die Kapillare entstehende Wasserbewegung, welche die Größe der ersten Tropfen etwas beeinflussen könnte. Das oben Angeführte zeigt, daß dieser Umstand außer in Ausnahmefällen das Resultat kaum trübt, was wohl der großen Dämpfung der Wasserbewegung durch die innere Reihung zu verdanken ist.

2. Da von vornherein keine besonderen Vorsichtsmaßregeln zur Konstanthaltung der Temperatur des Tropfapparates getroffen waren, wurde der Einfluß der Temperatur in der Weise studiert, daß das engere Becherglas *B* (Fig. 2) in einem größeren Gefäß so befestigt wurde, daß man dieses zur Aufnahme eines Wasser- bez. Eisbades benutzen konnte. Nachdem die am Thermometer *T* (Fig. 2) abzulesende Temperatur einen konstant bleibenden Wert angenommen hatte, wurden bei vier verschiedenen (bei allen Temperaturen gleichen) Druckhöhen je 80 Tropfen aufgefangen, wobei für 70 Tropfen die Zeit bestimmt wurde. Als Elektrolyt diente eine frisch bereitete ca. 19 Proz. H_2SO_4 (spez. Gew. 1,1390 bei 20,1°). Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt und in der Fig. 3 graphisch veranschaulicht.

Tabelle 1.

Frische H_2SO_4 vom spezifischen Gewicht 1,1390 bei 20,1°.

	Temperatur 19,0°		Temperatur 0,3°		Temperatur 19,0°	
	Zeit (70 Tr.) Gew. (80 Tr.)		Zeit Sek. Gew. mg		Zeit Gew.	
	Sek.	mg				
Kurz- geschlossen	96,6	283,4	103,2	283,4	98,8	283,1
	114,8	284,8	123,0	285,1	116,6	284,7
	137,2	286,3	147,6	286,6	138,8	286,0
	152,4	286,9	164,2	287,1	154,8	286,7

Wie aus der Fig. 3 ersichtlich, ist der Temperaturkoeffizient überaus klein. Die Senkung der Kurve für 19,0° C. ist sicher dem Einfluß des sich bildenden Quecksilbersalzes zuzuschreiben.

Da die Temperaturschwankungen bei den weiteren Messungen immer unter 1° liegen, braucht keine Korrektion wegen dieses Umstandes angebracht zu werden. Die Figur zeigt auch sehr deutlich, wie stark die innere Reibung in der Kapillare die Ausflußzeit fast derselben Menge bei derselben Druckhöhe beeinflusst; die Punkte der Kurve bei $0,3^\circ$ sind stark nach den höheren Zeiten hin verschoben.

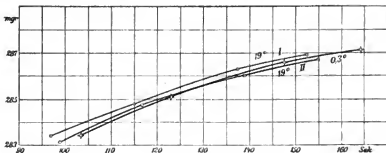


Fig. 3.

Nachträglich fand ich in der Literatur eine Angabe, welche sich auf den kleinen Temperaturkoeffizienten der Oberflächenspannung zwischen Hg und 5 proz. H_2SO_4 bezieht.¹⁾ Für weitere Aufklärung über diese bisher nicht studierte Frage ist ein Apparat vorgesehen, der die Konstanthaltung verschiedener, entlegenerer Temperaturen gestattet.

3. Nach Ausführung der besprochenen Voruntersuchungen wurde zu Messungen geschritten, die den Einfluß der elektrischen Polarisierung und der Tropfzeit auf die Tropfengröße dartun sollten. In der Tab. 2 und 3 sind die Resultate zweier vollständigen Beobachtungsserien zusammengestellt, und auf der Tafel II links oben graphisch veranschaulicht.

In den Tabellen geben vertikale Spalten die bei einer bestimmten Polarisierung zu verschiedenen Druckhöhen, horizontale Spalten die bei einem bestimmten Druck zu verschiedenen Polarisierungen zugehörigen Werte an. Das Vorzeichen bei der polarisierenden elektromotorischen Kraft ist dasjenige der kleinen tropfenden Elektrode. Unter Druckhöhe (p) ist die

1) M. Cantor, Wied. Ann. 47. p. 410. 1892.

Höhe der Quecksilbersäule vom Ende der Kapillare bis zum höchsten Punkt des Meniskus im Reservoir vermindert um den auf Quecksilber umgerechneten hydrostatischen Gegendruck des Elektrolyten (vom Kapillarenende bis zum Niveau) angeführt. Von den vier (bez. zwei) Zahlen, die zu einer Druckhöhe und Polarisation gehören, gibt die erste die Ausflußzeit (T_{60}) für 60 Tropfen in Sekunden, die zweite das Gewicht (G_{60}) von 80 Tropfen in Milligramm an; die dritte und die vierte, von welchen weiter unten Gebrauch gemacht wird, geben das Produkt $p \cdot T_{60}$ bez. das Verhältnis G_{60}/T_{60} an. Die beiden letzten Zahlen wurden mit Hülfe der Proellschen Rechentafeln berechnet. Es muß bemerkt werden, daß die Beobachtungen zeitlich den horizontalen Kolumnen folgten, sodaß zunächst bei einer Druckhöhe alle Polarisationen durchgemessen wurden, um dann zu anderen Druckhöhen in der gleichen Weise überzugehen. Die kathodischen und die anodischen Polarisationen (Tab. 2) wurden gesondert geprüft.

Aus der graphischen Darstellung ist ersichtlich, daß bei den kathodischen Polarisationen die Tropfengröße mit der Tropfzeit zuerst schneller, später langsam und zwar von einer gewissen Zeit an *linear wächst*. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich für das Gewicht von 80 Tropfen in diesem Bereiche die in der Tab. 4 zusammengestellten Gleichungen.

Wie daraus ersichtlich, läßt die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung nichts zu wünschen übrig; die mittleren Fehler betragen Bruchteile von pro mille. Dagegen herrscht bei den anodischen Polarisationen eine große Unregelmäßigkeit, von welcher später das Nötige angeführt wird.

Nach dem Vorgange von Forch müssen wir, um den Oberflächenspannungen proportionale Zahlen zu erhalten, alle Gewichte auf eine und dieselbe Tropfzeit beziehen. Theoretisch¹⁾ wäre eine möglichst große zu wählen; praktisch ist dies schon deshalb unausführbar, weil bei einer gewissen Druckhöhe das Ausfließen aufhört, und das Quecksilber sich in die Kapillare zurückzieht, da der Druck der Quecksilbersäule von der

1) J. B. Hannay, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 20. p. 437. 1895.

Tabelle 2.
 Frische H_2SO_4 vom spezifischen Gewicht 1,0310 bei $20,5^\circ$.
 Temperatur $18,0-18,9^\circ$.

Druck- höhe in cm	Polarisierende elektromotorische Kraft in Volt											
	0	-0,300	-0,600	-0,900	-1,200	-1,500	-1,800	+0,300	+0,600	+0,900	+1,200	+1,500
66,6	49,2	63,2	70,3	71,0	69,4	63,4	53,0	—	—	—	—	—
	277,0	355,0	392,6	395,4	386,2	354,0	289,6	—	—	—	—	—
	3275	4205	4670	4725	4615	4215	3525	—	—	—	—	—
	5,64	5,60	5,60	5,575	5,57	5,59	5,465	—	—	—	—	—
56,7	60,2	76,2	82,8	84,8	82,4	75,0	56,2	—	—	—	—	—
	285,1	360,6	394,2	403,4	389,2	357,4	269,0	—	—	—	—	—
	3413	4315	4690	4865	4665	4250	3185	—	—	—	—	—
	4,735	4,74	4,73	4,70	4,725	4,76	4,785	—	—	—	—	—
46,9	74,4	93,4	102,8	105,4	100,8	92,6	67,4	68,4	67,2	66,2	64,8	65,0
	291,0	361,9	398,2	407,2	390,6	359,9	261,5	265,6	256,2	258,0	258,0	251,6
	3485	4377	4815	4960	4720	4340	3160	—	—	—	—	—
	3,915	3,873	3,877	3,865	3,875	3,887	3,880	—	—	—	—	—
39,8	89,0	111,0	122,4	125,4	119,8	109,8	81,6	81,2	79,7	79,2	79,8	77,5
	293,1	364,6	400,5	409,5	391,7	361,5	269,2	267,5	260,8	260,0	257,8	254,8
	3540	4415	4870	4995	4765	4365	3245	—	—	—	—	—
	3,293	3,285	3,275	3,265	3,270	3,290	3,330	—	—	—	—	—

39,7	106,6	135,4	146,6	150,4	143,4	132,2	99,8	97,2	94,8	94,8	94,4	93,0
	294,6	386,0	402,4	410,7	393,8	363,0	278,3	265,6	259,6	258,4	260,0	256,8
	3590	4500	4935	5060	4835	4450	3365	—	—	—	—	—
	2,765	2,745	2,747	2,735	2,745	2,748	2,778	—	—	—	—	—
30,5	119,2	150,6	165,4	170,4	162,0	149,6	112,7	109,6	105,2	107,2	104,8	102,0
	295,3	367,4	404,5	412,4	394,9	363,8	281,2	271,0	260,8	262,8	262,8	251,6
	3633	4590	5045	5195	4935	4555	3435	—	—	—	—	—
	2,475	2,442	2,445	2,432	2,440	2,438	2,492	—	—	—	—	—
27,5	133,6	167,4	Der Ausfluß									
	296,7	367,8	hört auf									
	3670	4600										
	2,225	2,198										
25,6	144,0	Der Ausfluß										
	297,4	hört auf										
	3680											
	2,065											
23,1	160,2											
	298,4											
	3695											
	1,865											

Tabelle 3.

HCl vom spezifischen Gewicht 1,0051 bei 19,7°
Temperatur 18,8—19,0°.

Druck- höhe in cm	Polarisierende elektromotorische Kraft in Volt						
	0	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000	-1,200
67,0 {	75,3	85,2	89,2	90,1	88,8	84,0	79,2
	843,0	883,3	402,5	405,9	399,6	380,4	356,2
55,9 {	91,4	103,4	109,2	109,2	106,4	102,4	95,4
	345,9	387,6	406,7	408,6	400,8	388,3	358,7
46,5 {	111,2	124,4	181,4	131,3	128,4	122,4	114,4
	347,5	387,7	407,8	410,7	401,0	384,0	359,3
39,6 {	181,4	147,8	155,8	156,3	152,4	145,8	137,2
	848,8	889,8	409,2	412,0	402,1	386,1	362,5
33,8 {	157,4	176,8	185,0	186,2	182,4	174,6	166,2
	349,9	391,2	410,6	413,0	403,9	387,7	366,2
29,5 {	178,4	200,2	—	—	—	—	—
	850,5	892,2	—	—	—	—	—

Tabelle 4.

Polarisierende E.M.K. in Volt	Gewicht von 80 Tropfen G_{80} in mg	Mittlerer Fehler in mg	Mittlerer Fehler in Proz.
H_2SO_4 vom spezifischen Gewicht 1,0310 bei 20,5°.			
0	$292,40 + 0,0763 (T_{80} - 80)$	$\pm 0,05$	0,017
-0,300	$364,68 + 0,0575 (T_{80} - 110)$	0,12	0,033
-0,600	$897,90 + 0,1000 (T_{80} - 100)$	0,11	0,023
-0,900	$406,77 + 0,0801 (T_{80} - 100)$	0,19	0,048
-1,200	$390,54 + 0,0708 (T_{80} - 100)$	0,09	0,023
-1,500	$359,95 + 0,0676 (T_{80} - 90)$	0,11	0,031
HCl vom spezifischen Gewicht 1,0051 bei 19,7°.			
0	$347,55 + 0,0446 (T_{80} - 110)$	0,11	0,032
-0,200	$387,45 + 0,0476 (T_{80} - 100)$	0,04	0,010
-0,400	$406,7 + 0,0514 (T_{80} - 110)$	0,06	0,015
-0,600	$410,4 + 0,0521 (T_{80} - 130)$	0,12	0,029
-0,800	$899,9 + 0,0474 (T_{80} - 100)$	0,12	0,030
-1,000	$383,15 + 0,0606 (T_{80} - 100)$	0,16	0,041

Kapillarkraft im Gleichgewicht gehalten wird. Wie wir aus der Tab. 2 entnehmen können, geschieht dies bei einer desto größeren Druckhöhe, je größer die Oberflächenspannung ist. Aus einem später zu berührenden Grunde entschied ich mich für eine Tropfzeit von 120 Sek. für 60 Tropfen, also 2 Sek. für einen Tropfen. Um aber die Zahlen bei verschiedenen Elektrolyten vergleichen zu können, müssen wir herücksichtigen, daß die Oberflächenspannung proportional ist dem wahren Gewicht der Tropfen unter der Flüssigkeit, also dem Gewicht in der Luft — Auftrieb in der Flüssigkeit. Es ist demnach

$$C \cdot \alpha = G \cdot \left(1 - \frac{\sigma_t}{\rho_t}\right),$$

wo σ_t die Dichte der Lösung, ρ_t die des Quecksilbers bei der Beobachtungstemperatur t ist. Zur Vereinfachung der Rechnung setzte ich später immer für G das Gewicht von 60 Tropfen bei einer Tropfzeit von 120 Sek. ein (G_{60}), und erhielt so die relativen Werte für Oberflächenspannungen in dieser willkürlichen Einheit. Viel Zeit und Mühe verwandte ich darauf, festzustellen, ob irgend welche Gesetzmäßigkeiten zwischen den Zuwachskoeffizienten der Tropfengewichte bei wachsender Zeit aufzufinden wären. Der Gang der Versuche war immer derjenige der Tab. 2 und 3, wobei die Koeffizienten mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden. Die Resultate dieser Untersuchung sind in der Tab. 5 zusammengestellt, worin aber die Tropfengewichte G_{60} nach der angegebenen Formel schon so umgerechnet sind, daß sie die relativen Oberflächenspannungen ($C \cdot \alpha$) darstellen. Die Koeffizienten A entsprechen dem Zuwachs, wenn die Tropfzeit von 60 Tropfen um 1 Sek., also die von einem Tropfen um $1/60$ Sek. wächst. Der prozentische mittlere Fehler F bei der Geradendurchlegung ist mit angegeben, sowie auch bei jeder Reihe die mittlere Versuchstemperatur t . Ihre Schwankungsamplitude blieb meist weit unter 1°C .

Von vornherein ist zu bemerken, daß für die Koeffizienten A nicht sehr genaue Werte zu erwarten sind, da die Differenzen der Tropfengewichte sehr klein sind, sodaß ein Fehler von 10 und sogar von 20 Proz. möglich ist. Aber auch bei Beachtung dieses Umstandes ist es sehr schwer, bei den Werten für

Tabelle 5.

	I.			II.			III.			IV.			V.			VI.		
H_2SO_4	$\sigma_{20,1^\circ} = 0,9990$ $t = 19,1^\circ$	$\sigma_{20,5^\circ} = 1,0810$ $t = 18,5^\circ$	$\sigma_{20,1^\circ} = 1,0615$ $t = 19,3^\circ$	$\sigma_{20,1^\circ} = 1,1383$ $t = 18,9^\circ$	$\sigma_{20,4^\circ} = 1,2910$ $t = 20,4^\circ$	$\sigma_{20,2^\circ} = 1,6202$ $t = 20,1^\circ$												
$C. \alpha$	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	
0 Volt	210,4	0,0420	0,28	204,6	0,0528	0,17	203,9	0,0481	0,57	200,3	0,0367	0,36	191,3	0,0453	0,32	162,0	0,0617	0,45
-0,300	258,2	388	0,16	253,1	398	0,33	250,2	456	0,44	247,4	396	0,33	236,3	451	0,23	210,1	577	0,38
-0,600	280,8	491	0,35	277,0	693	0,28	275,1	516	0,33	271,9	739	0,43	264,7	428	0,31	238,9	660	0,24
-0,900	283,0	548	0,48	282,9	554	0,49	282,9	516	0,44	282,2	797	0,21	277,0	579	0,37	260,0	541	0,40
-1,200	277,2	378	0,43	271,5	487	0,28	272,7	792	0,46	273,8	747	0,30	274,8	651	0,29	—	—	—
-1,500	257,1	370	0,32	250,8	468	0,31	250,9	700	0,41	253,6	662	0,30	—	—	—	—	—	—

	I.			II.			III.			IV.		
HCl	$\sigma_{16,5^\circ} = 0,9995$ $t = 16,1^\circ$	$\sigma_{19,7^\circ} = 1,0051$ $t = 18,9^\circ$	$\sigma_{19,1^\circ} = 1,0485$ $t = 18,7^\circ$	$\sigma_{18,0^\circ} = 1,1294$ $t = 17,8^\circ$								
$C. \alpha$	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	C. α	A	$F^\circ/_{100}$	
0 Volt	247,6	0,0318	0,39	241,6	0,0309	0,32	234,5	0,0346	0,26	228,8	0,0422	0,21
-0,200	273,2	345	0,33	269,7	331	0,10	261,6	464	0,24	254,6	489	0,33
-0,400	285,3	356	0,20	282,7	356	0,15	276,3	306	0,22	268,6	438	0,26
-0,600	286,4	392	0,15	284,6	362	0,29	280,5	339	0,07	275,0	466	0,32
-0,800	283,8	376	0,20	278,5	329	0,30	274,7	323	0,58	270,4	381	0,15
-1,000	275,6	414	0,51	266,9	420	0,41	259,0	423	0,40	—	—	—
-1,200	262,1	435	0,21	—	—	—	—	—	—	—	—	—

H₂SO₄ irgend welche Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Im allgemeinen scheinen sie bei kleinen Polarisierungen und Oberflächenspannungen kleiner zu sein als bei größeren. Die Konzentrationen II, III, und IV, die zu den ersten Versuchen in dieser Richtung gehören, wurden mit dem kleinen Becherglas gemacht und zeigen auch die größten Schwankungen. Dies und weiter der Umstand, daß in allen Messungen früherer Beobachter¹⁾ (allerdings bei adhärerenden Flüssigkeiten) negative Koeffizienten gefunden waren, warf die Frage auf, ob nicht bei meinen Messungen Umstände elektrochemischer Natur mitspielen. Deshalb untersuchte ich bei elektrischem Kurzschluß die Oberflächenspannung Hg/Wasser und Hg/Alkohol. Die Resultate sind in der Tab. 6 zusammengestellt und in der Fig. 4 im großen Maßstabe graphisch wiedergegeben.

Tabelle 6.

Wasser								Äthylalkohol	
I		II		III		IV		$\sigma_{18,5^\circ} = 0,7953$	
T_{60}	G_{60}	T_{60}	G_{60}	T_{60}	G_{60}	T_{60}	G_{60}	T_{60}	G_{60}
77,8	290,3	76,4	290,7	69,4	288,8	73,6	291,0	103,4	284,7
93,4	291,2	94,8	292,3	82,0	290,4	91,4	292,2	123,4	285,4
112,6	291,5	115,0	293,0	100,2	291,7	113,0	292,5	148,4	285,2
129,0	291,5	134,6	293,1	120,0	292,3	135,0	292,4	71,4	281,7
149,4	291,3	171,8	293,1	141,2	292,7	163,4	292,1	100,0	284,4
168,0	291,0	74,0	290,6	171,4	292,6	185,0	291,8	128,6	285,4
106,6	291,5	117,6	293,0	191,6	292,6	—	—	—	—
75,4	290,2	—	—	—	—	—	—	—	—

Die Beobachtungen sind absichtlich bei verschiedenartig wachsenden und fallenden Tropfzeiten gemacht worden, um zu sehen, ob auch dann sich die Punkte gut in die Kurve einfügen. Kurve I wurde für destilliertes Wasser gewonnen, das frisch eingefüllt und sofort gemessen wurde; Kurve II gilt für dasselbe Wasser, nachdem es in den Tropfapparat eingefüllt,

1) L. Frankenheim, E. Hagen, F. Guthrie, C. Forch.

16 Stunden über Quecksilber in freier Luft gestanden hatte. Dann wurde das Quecksilber 3 Stunden lang ununterbrochen tropfen gelassen und im Anschluß daran die Kurve III aufgenommen. Sodann goß ich dieses erste Wasser weg und füllte frisches in den Apparat ein; dieses ergab gleich darauf die Kurve IV. Äthylalkohol wurde auch sofort nach dem Einfüllen gemessen.

Die Figur zeigt die auffallende Tatsache, daß sowohl frisches Wasser, als auch Äthylalkohol bei einer gewissen Tropfzeit, und zwar ungefähr bei 120 Sek. für 60 Tropfen ein

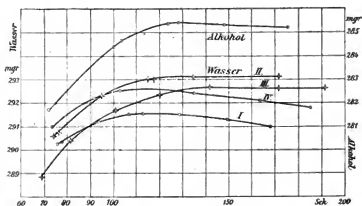


Fig. 4.

Maximum des Tropfengewichtes zeigen. Wasser, welches längere Zeit über Quecksilber gestanden hat, zeigt dies nicht, wenigstens nicht in dem untersuchten Gebiet. Dadurch drängt sich die Meinung auf, daß dies dem gelösten Quecksilber¹⁾ zuzuschreiben sei. Die Ursache der Vertikalverschiebung der Kurven kann von der Veränderung der unter Wasser stehenden Quecksilberfläche herrühren, wodurch ihre Potentialdifferenz gegen Wasser sich geändert hat; wir werden weiter unten sehen, wie empfindlich gegen eine solche die Oberflächen-

1) Vgl. W. Ostwald, Grundlinien der anorganischen Chemie p. 667, Anmerkung. Leipzig 1900.

spannung von Wasser ist. Bei der schlechten Leitfähigkeit von Wasser kann sich eine so entstandene elektromotorische Kraft nur langsam ausgleichen, da das Wasser in der Ruhestellung über 1 mm hoch in der Kapillare stand, was einen Widerstand von mehreren Millionen Ohm repräsentiert. Nach dem dreistündigen Tropfen ging auch die Differenz etwas zurück, was auf die nun besser ermöglichte Ausgleichung dieser elektromotorischen Kraft zurückzuführen ist.

Bei einem Elektrolyten, bei dem immer Quecksilbersalz in größerer Menge als bei Wasser in Lösung geht ¹⁾, tritt auch bei höheren Tropfzeiten kein Maximum des Tropfengewichtes ein. Dies zeigt eine Beobachtung bei KCl, die durch Einschaltung eines sehr großen Reibungswiderstandes ermöglicht wurde.

Tropfzeit für 60 Tr.	Tropfengewicht		Differenz
	bcob.	ber.	
150,1 Sek.	265,7 mg	265,7 mg	0 mg
198,4	265,9	265,95	- 0,05
206,8	265,9	265,99	- 0,09
287,2	266,5	266,41	+ 0,09
313,4	266,6	266,55	+ 0,05
440,2	267,2	267,2	0

Hierbei entsprechen die unter „berechnet“ angeführten Werte einer durch den ersten und letzten Punkt durchgelegten Geraden; die Differenz übersteigt in keinem Fall den möglichen Fehler.

Um die Vermutung, daß die großen Differenzen zwischen den Werten des Koeffizienten A bei der Schwefelsäure durch Entstehung von Quecksilbersalz bei den größeren Polarisationen zu erklären wären, experimentell noch mehr zu stützen, führte ich einen Versuch mit ca. 8 proz. Salpetersäure aus, wobei sich das Quecksilbersalz in einem viel stärkerem Maße bilden mußte.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 39. p. 321. 1889; 41. p. 1. 1890.

Tabelle 7.
 HNO_3 . $\sigma_{18^\circ} = 1,0423$.

Polar. E.M.K. in Volt	I		II		III		A aus I und III	Δ_{II} mg
	T_{60}	G_{60}	T_{60}	G_{60}	T_{60}	G_{60}		
0	77,6	194,8	89,2	191,3	101,2	188,0	-0,2880	-0,1
-0,1	87,8	218,8	101,8	217,0	116,2	215,1	-0,1300	± 0
-0,2	95,0	235,0	110,8	234,0	125,8	232,9	-0,0683	+0,1
-0,3	100,0	248,7	116,8	248,1	134,4	247,2	-0,0436	+0,1
-0,4	105,4	260,1	123,4	259,7	140,8	258,8	-0,0363	+0,2
-0,5	109,4	269,8	127,6	269,5	146,6	268,8	-0,0269	+0,2
-0,6	112,8	277,5	132,8	277,5	152,6	277,1	-0,0100	+0,2
-0,7	115,0	283,6	135,6	284,0	156,6	283,9	+0,0072	+0,2
-0,8	116,8	288,3	139,0	288,7	159,2	289,3	+0,0236	-0,1
-0,9	119,0	291,4	140,0	292,3	162,0	293,0	+0,0372	+0,1
-1,0	118,4	292,2	141,2	293,7	163,2	294,8	+0,0580	+0,2
-1,1	118,4	291,2	140,0	292,7	163,0	293,9	+0,0605	+0,2
-1,2	117,2	288,3	139,0	290,0	161,4	291,4	+0,0701	+0,2
-1,3	116,2	284,6	137,8	286,0	160,6	287,5	+0,0655	± 0
-1,4	113,2	279,0	134,4	281,0	156,6	282,7	+0,0852	+0,2
-1,5	111,6	274,0	132,8	275,8	153,2	276,9	+0,0700	+0,3
-1,6	110,0	269,9	129,6	271,2	150,4	272,2	+0,0570	+0,2
-1,8	108,4	264,6	127,6	265,8	145,6	266,6	+0,0538	+0,2
-2,0	105,0	257,4	124,8	258,9	143,4	259,8	+0,0625	+0,3
-2,2	101,4	247,4	118,8	250,3	139,0	253,4	+0,1600	+0,1
-2,4	97,0	237,6	115,8	239,8	133,8	242,7	+0,1390	-0,4
-2,6								

Sehr unregelmäßiges Tropfen

Die Koeffizienten A sind aus den Zahlen der I. und III. Kolumne berechnet, Δ_{II} gibt die Differenz zwischen den in der Kolumne II beobachteten und aus T_{60} und A berechneten Werten. Es wurden zuerst alle Zahlen der Kolumne I, dann der Reihenfolge nach die von II und III beobachtet. Die Tabelle bestätigt vollständig die oben ausgesprochene Vermutung. Die Koeffizienten A sind bei kleinen Polarisierungen jetzt sogar stark negativ geworden. Dies rührt davon her, daß bei den großen Polarisierungen Quecksilbersalz gebildet wird, welches die Oberflächenspannung stark herabdrückt. Bei höheren Polarisierungen werden sie größer, fallen nachher etwas ab, um bei elektromotorischen Kräften, welche dem Auftreten

der Elektrolyse sehr nahe liegen, wieder stark zu steigen. Betrachten wir das Verhalten von HCl-Lösungen I und II in Tab. 5, so sehen wir eine vollständige Analogie, ungeachtet dessen, daß die Koeffizientenbestimmung große Fehler nicht ausschließt. Allerdings sind in diesem Falle die Grenzen, innerhalb welcher A schwankt, viel kleinere. Bei den H_2SO_4 -Lösungen ist dies Verhalten am reinsten ausgeprägt in den Reihen III und IV, die mit dem kleinen Gefäß gewonnen wurden. Daß es hauptsächlich die vorausgegangene hohe Polarisation ist, welche die Werte von A bei 0 Volt so herunderdrückt, das zeigt eine weitere Beobachtung, die im Anschluß an die Tab. 7 bei der Salpetersäure gemacht wurde, nämlich zwei weitere Bestimmungen des Tropfengewichtes bei 0 Volt, aber jetzt *ohne* voransgehende Polarisation.

III		IV		V		A	A_{IV}
T_{00}	G_{00}	T_{00}	G_{00}	T_{00}	G_{00}		
101,2	188,0	125,6	188,3	191,2	188,5	+0,0125	± 0

Der Koeffizient A ist jetzt positiv, das Tropfengewicht steigt mit der Tropfzeit.

Die unregelmäßigen Schwankungen bei den H_2SO_4 -Lösungen und den HCl-Lösungen III und IV erklären sich dadurch, daß die Lösung zwischen den einzelnen Versuchen nicht umgerührt wurde, wodurch es geschah, daß das an der „ruhenden“ Anode entstehende Quecksilbersalz langsam und unregelmäßig nur durch Diffusion und andere von Zufälligkeiten (Hineintauchen und Herausnehmen des Löffels etc.) abhängige Umstände zur tropfenden Masse gelangte. Bei den späteren Beobachtungsreihen wurde zwischen je zwei Versuchen mit einem Glasstab die Lösung und das „ruhende“ Quecksilber gut umgerührt.

Die Versuche zeigen, daß es nötig ist, Elektrolyte zu benutzen, die sich im Gleichgewicht mit Quecksilber befinden. Deshalb wurden bei späteren Messungen (wo nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist) nur Lösungen benutzt, die längere Zeit (ca. 14 Tage) über reinem Quecksilber standen und öfters durchgeschüttelt wurden. Dann ist der Koeffizient A , wie die HCl-Lösungen, die sich schnell mit dem schwerlöslichen Hg_2Cl_2 sättigen, zeigen, innerhalb einer Versuchsreihe fast konstant. Dasselbe zeigten Messungen mit KCl-Lösungen. Die extremen Werte unterscheiden sich nur um etwa 0,01; wenn

man also einen Koeffizienten für die ganze Reihe benutzt, und die Tropfzeiten für 60 Tropfen so wählt, daß sie sich nicht mehr als um 10 Sek. von dem Normalwert 120 unterscheiden, so kann man durch die Reduktion im Tropfengewicht höchstens einen Fehler von 0,1 mg begehen, was ja auch die Grenze der Wägungsgenauigkeit ist.

Aus allen diesen Erwägungen ergab sich eine Beobachtungsmethode, welche bei den weiteren Messungen durchweg angewandt wurde. Nachdem der Elektrolyt in den Tropfapparat eingefüllt war, ließ ich einige Zeit (15 Min.) Quecksilber bei einer polarisierenden elektromotorischen Kraft tropfen, die nahe bei derjenigen der sichtbar auftretenden Elektrolyse lag. Dann tropfte das Quecksilber etwa $\frac{1}{4}$ Stunde lang bei Kurzschluß. Beim Versuch selbst wurde die Druckhöhe so gewählt, daß bei den Maximalwerten der Oberflächenspannung die Tropfzeiten nicht weit von 120 Sek. lagen. Der Koeffizient A für die betreffende Versuchsreihe wurde bei elektrischem Kurzschluß bestimmt. Bei der Berechnung wurde zuerst das Tropfengewicht auf 120 Sek. reduziert (der reduzierte Wert ist \bar{G}_{60}), und dann das wahre Gewicht durch Ermittlung von

$$\bar{G}_{60} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = C \cdot \alpha$$

festgestellt. Die beiden Korrektionsglieder, wurden genügend genau mittels eines logarithmischen Rechenschiebers berechnet. Das wahre Gewicht ist, wie oben angeführt, proportional der Oberflächenspannung. Ein Beispiel der Berechnung liefert die Tab. 8. Das auf 120 Sek. korrigierte Gewicht ist hier aus zwei verschiedenen Versuchsreihen berechnet. Von diesen beiden Zahlen wurde das Mittel genommen, und die letzte Rubrik A gibt die Abweichungen der beiden Bestimmungen von diesem Mittelwert an. Diese Abweichung übersteigt nur bei den höchsten Polarisierungen, wo die Beobachtung an sich ungenau wird, die Grenze der Wägungsgenauigkeit, obgleich die Tropfzeiten beim zweiten Versuch 120 Sek. ganz erheblich übersteigen.

Es erübrigen noch einige Bemerkungen über die anodischen und sehr großen kathodischen Polarisierungen. Wie am besten die graphische Darstellung der Tab. 2 auf Taf. II zeigt, bewirken schon kleine (+ 0,3 Volt) anodische Polarisierungen große Unregelmäßigkeiten bei den Tropfengrößen. Wenn man die sich

Tabelle 8.

HNO₃, $\sigma_{17^0} = 1,0003$, Versuchstemperatur 17,0°.

Polar. E.M.K. in Volt	I			II			Mittel aus I und II \bar{G}_{80}	$\bar{G}_{80} \cdot \frac{\sigma_t}{\bar{q}_t}$	$\bar{G}_{80} \left(1 - \frac{\sigma_t}{\bar{q}_t}\right)$	Δ mg
	T_{80}	G_{80}	Korr. auf 120 Sek.	$G_{80} + \text{Korr.}$ $= \bar{G}_{80}$	T_{80}	G_{80}	Korr. auf 120 Sek.	\bar{G}_{80}		
0	96,4	225,2	+1,1	226,3	116,0	226,1	+0,2	226,2	209,6	0,0
0,200	109,4	256,8	+0,5	257,3	125,6	257,4	+0,2 ₃	257,1 ₃	238,2	+0,07 ₃
0,400	118,4	278,4	+0,1	278,5	136,6	279,1	-0,7 ₃	278,3 ₃	257,8	+0,07 ₃
0,600	125,0	292,9	-0,2 ₃	292,6 ₃	145,2	293,6	-1,1 ₃	292,4 ₃	270,9	+0,1
0,700	127,6	296,2	-0,3 ₃	295,8 ₃	146,8	297,1	-1,2 ₃	295,8 ₃	274,0	± 0
0,800	127,8	296,9	-0,3 ₃	296,5 ₃	147,4	297,7	-1,2 ₃	296,4 ₃	274,6	+0,05
0,900	127,2	296,7	-0,3 ₃	296,3 ₃	146,6	297,6	-1,2	296,4	274,5	+0,02 ₃
1,000	127,0	295,1	-0,3	294,8	146,8	298,0	-1,2 ₃	294,7 ₃	273,0	+0,02 ₃
1,100	125,8	292,6	-0,2 ₃	292,3 ₃	146,0	293,3	-1,2	292,1	270,7	+0,07 ₃
1,200	124,2	288,9	-0,2	288,7	134,2	290,0	-1,0 ₃	288,9 ₃	267,4	-0,12 ₃
1,400	119,8	277,6	± 0	277,6	138,6	278,7	-0,8 ₃	277,8 ₃	257,2	-0,12 ₃
1,600	112,6	261,9	+0,35	262,25	129,2	263,0	-0,4	262,6	243,0	-0,17 ₃
1,800	104,8	242,5	+0,7	243,2	120,4	243,7	± 0	243,7	225,4 ₃	-0,25
2,000	99,8	233,9	+0,95	234,8 ₃	115,6	235,9	+0,2	236,1	218,1	-0,62 ₃

bildenden Tropfen mit einer Lupe betrachtet, sieht man, daß ihre Oberfläche nicht glänzend bleibt, sondern sich mit einer grauen matten Schicht von Quecksilberoxyd überzieht. Bei höheren anodischen Polarisationen ist die Oxydbildung so stark, daß die Tropfen nicht mehr ihre kugelförmige Gestalt behalten, sondern ganz unregelmäßige, längliche oder birnenförmige Gestalt und großes Volumen annehmen. Im Löffel gesammelt fließen sie nicht zusammen. Es ist klar, daß dabei an keine Messung mehr zu denken ist. Ganz anders wirken hohe kathodische Polarisationen. Schon bei etwas kleineren elektromotorischen Kräften, als zur sichtbaren Elektrolyse nötig sind, wird das Tropfen unregelmäßig. Nach einigen scheinbar regelmäßigen Tropfen kommt einer oder zwei viel kleinere in einem sichtlich kleineren Zeitintervall, und dieses Spiel wiederholt sich. Wenn sichtbare Elektrolyse eingetreten ist, so fallen in schneller Aufeinanderfolge anscheinend ganz regelmäßige, sehr kleine Tropfen, von welchen jeder ein kleines Wasserstoffbläschen mitträgt. Dies kann nur so erklärt werden, daß das entwickelte Gas die Tropföffnung teilweise ausfüllt. Sofort, wenn die ersten Unregelmäßigkeiten auftraten, wurde die Messung unterbrochen. Wenn das Ergebnis eines solchen Versuches noch angegeben ist, so ist es mit einem Sternchen * bezeichnet.

Zum Schluß sei eine Wiederholung des Paschenschen Versuches mit einer sauren Merkuronitratlösung erwähnt, wobei sich keine Polarisation, also keine Veränderung des Tropfengewichtes mit der angelegten elektromotorischen Kraft zeigen soll.

Tabelle 9.

HgNO_3 . $\sigma_{16,0^\circ} = 1,054$. $t = 16,0^\circ \pm 0,1^\circ$.

Polar. E.M.K. in Volt	T_{60}	G_{60}	Δ	T_{60}	G_{60}	Δ
0	77,6	186,8	+0,05	95,8	187,9	0
-0,2	77,8	186,7	+0,15	95,2	187,9	0
-0,4	77,8	186,8	+0,05	95,8	187,9	0
-0,6	77,8	186,9	-0,05	96,8	187,8	+0,1
-1,0	79,0	186,9	-0,05	95,8	187,9	0
-2,0	78,2	187,0	-0,15	96,0	188,0	-0,1
Mittel	—	186,85	—	—	187,90	—

Δ sind die Abweichungen vom Mittelwert. Der mittlere Fehler des Resultates ergibt sich daraus zu 0,084 und 0,063 mg und liegt also unter Wägungsgenauigkeit.

4. Würde der Ausfluß des Quecksilbers aus der Kapillare nur durch die innere Reibung geregelt werden, so müßte bei derselben Druckhöhe und Temperatur bei allen Polarisierungen in gleicher Zeit gleich viel Quecksilber ausfließen, mit anderen Worten, es müßte die „Strömung“ konstant bleiben. In der Tab. 2 sind nun überall an vierter Stelle die Werte G_{80}/T_{60}

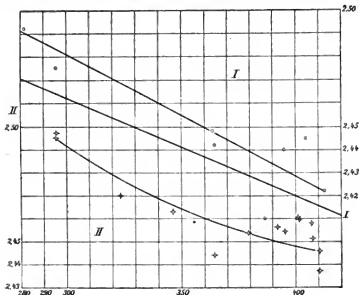


Fig. 5.

eingetragen, welche der „Strömung“ proportional sind. Wie wir aber sehen, sind sie bei derselben Druckhöhe keineswegs konstant, sondern scheinen bei höheren Tropfgewichten, also bei größeren Oberflächenspannungen kleiner zu sein. In der Fig. 5, I sind Strömungen bei der Druckhöhe 30,5 cm in ihrer Abhängigkeit von dem Tropfgewicht eingezeichnet. Ebenso bestätigt das oben Gesagte Fig. 5, II, wo die bei einem anderen Versuch mit ca. 7 proz. H_2SO_4 gewonnenen Zahlenwerte eingetragen sind, wobei mehrere Polarisierungen beobachtet wurden.

Wenngleich die Versuche aus später zu erläuternden Gründen in dieser Beziehung keine genauen Resultate zu geben im stande waren, so können wir doch auf Grund einer Überschlagsrechnung etwas Einsicht in die mitspielenden Umstände erlangen.

Der von der Oberflächenspannung herrührende Druck, welcher gegen den von der Quecksilbersäule ausgeübten wirkt, ist nicht zu vernachlässigen. In dem durch die Tab. 2 dargestellten Versuch entspricht die reduzierte Druckhöhe von 30,5 cm einem Druck von ca. $30,5 \cdot 13,6 = 415 \text{ g/cm}^2$. Jeder Quecksilbertropfen wiegt bei Kurzschluß ca. 0,00369 g, woraus sich sein Radius r , vollkommene Kugelgestalt vorausgesetzt, zu ca. 0,040 cm berechnet. Nehmen wir als den Wert der Oberflächenspannung α ca. 32 mg/mm = 0,32 g/cm, so beträgt der kapillare Gegendruck

$$\frac{2\alpha}{r} = 2 \cdot \frac{0,32}{0,04} = 16 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2},$$

und hat also eine gegenüber 415 g/cm² nicht zu vernachlässigende Größe. Dabei haben wir aber nur den Endzustand betrachtet; in den einzelnen Augenblicken der Bildungszeit des Tropfens wird dieser kapillare Gegendruck einen viel größeren Wert besitzen, da dabei hauptsächlich in den ersten anfänglichen Momenten der Krümmungsradius viel kleiner ist. Bei mit - 0,900 Volt polarisiertem Quecksilber ist die Oberflächenspannung im Verhältnis 412,4/295,3 gewachsen, sodaß sie nun ca. 0,46 g/cm beträgt. Der Tropfen wiegt im Momente des Abfallens 5,16 mg, woraus sich sein Radius als 0,0448 cm ergibt; die kapillare Druckverminderung hat also im besagten Augenblicke etwa den Wert

$$\frac{2 \cdot 0,46}{0,045} = 20,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}.$$

Sie ist demnach größer als bei Kurzschluß. Aber auch während der ganzen Bildungszeit des Tropfens ist in Augenblicken, wo das polarisierte und nichtpolarisierte Quecksilber denselben Krümmungsradius besitzen, der Gegendruck im ersten Falle etwa im Verhältnis $\frac{4}{3}$ größer, sodaß leicht einzusehen ist, daß die Momentanwerte der Strömung, welche der augenblicklich herrschenden Druckhöhe proportional sind, im ersten Falle

kleiner ausfallen als im zweiten. Dasselbe gilt dann auch von den Integralwerten der Strömung, die sich über die Bildungszeit eines Tropfens erstrecken.

Bei einer geplanten experimentellen Prüfung dieser Erwägungen muß auf eine möglichst genaue Zeitbestimmung größerer Nachdruck gelegt werden, als dies in der vorliegenden Arbeit geschehen konnte. Außerdem ist es angezeigt, mit etwas breiteren Kapillaren und entsprechend kleineren Druckhöhen zu arbeiten, da in einer sehr engen Kapillare durch das geringste Stäubchen leicht Störungen vorkommen, die den Reibungswiderstand, wenn auch nur für kurze Zeiten, in einer nicht meßbaren Weise ändern, wodurch dann das Charakteristische der Erscheinung verwischt, und die Bestimmung der Abhängigkeit der Strömung von der Oberflächenspannung illusorisch wird.

Wie die graphische Darstellung auf der Taf. II links oben zeigt, liegen die Punkte für eine bestimmte Druckhöhe nahe in einer Geraden, welche aber nicht durch den Nullpunkt geht, da ja infolge des kapillaren Gegendruckes die Beziehung $G_{90}/T_{90} = \text{konst.}$ nicht gilt.

5. Tragen wir in einem Diagramm die Tropfzeiten als Funktionen der Druckhöhen auf, so bekommen wir hyperbelartige Kurven. Jedoch ist das Produkt Druckhöhe \times Tropfzeit (Tab. 2, Zahlen an dritter Stelle) keineswegs konstant, sondern bei größeren Tropfzeiten (und Oberflächenspannungen) größer. Dies rührt nach den Erörterungen des vorigen Abschnittes vom kapillaren Gegendruck her.

Modifizieren wir die bekannte Formel für die innere Reibung auf Grund folgender Annahme: Die während einer Tropfzeit ausgeflossene Quecksilbermasse, also das Tropfengewicht G_a bei einer bestimmten Oberflächenspannung α ist proportional der Tropfzeit und der Druckhöhe p vermindert um einen Faktor π_a , welcher eine Funktion der Oberflächenspannung und der Tropfzeit sein kann (der kapillare Gegendruck). Den Proportionalitätsfaktor nennen wir L ; seine Größe wird durch die Dimensionen des Apparates (Länge und Durchmesser der Kapillare) und durch den Koeffizienten der inneren Reibung von Quecksilber bestimmt. Dann wäre

$$G_a = L \cdot (p - \pi_a) \cdot T.$$

Daraus folgt

$$(Tp)_\alpha = \frac{G_\alpha}{L} + \pi_\alpha \cdot T$$

und weiter

$$\frac{\partial (Tp)_\alpha}{\partial T} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial G_\alpha}{\partial T} + \frac{\partial (T \cdot \pi_\alpha)}{\partial T} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial G_\alpha}{\partial T} + \pi_\alpha + T \cdot \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial T}.$$

Der Index α soll überall bedeuten, daß die betreffende Größe bei konstanter Oberflächenspannung zu messen ist.

Die Formel läßt sich leicht interpretieren: Der Zusammenhang zwischen der Ausflußzeit und dem Druck, wie er bei der Bestimmung der inneren Reibung zu Tage tritt, befolgt das Gesetz der gleichseitigen Hyperbel, d. h. $p \cdot T = \text{konst.}$ Messen wir nun aber die Ausflußzeiten von Tropfen einer und derselben Flüssigkeit ($\alpha = \text{konst.}$) bei verschiedenen Druckhöhen, so wird das Produkt $p \cdot T$ durch zwei Ursachen geändert, erstens dadurch, daß die Tropfengröße bei verschiedenen Zeiten verschiedene Werte hat, zweitens dadurch, daß die Tropfen durch den kapillaren Gegendruck quasi die Druckhöhe vermindern. Dieser zweite Einfluß wird desto kleiner, mit je relativ bedeutenderen Druckhöhen wir arbeiten.

Die einzigen Zahlenangaben über den Einfluß der Druckhöhe auf die Tropfzeit finden sich meines Wissens in einer Arbeit von Rosset¹⁾ über die Tropfengewichtsmethode, dessen Zahlen vollständig meine Schlüsse bestätigen.²⁾

Aus der Tab. 2 ersehen wir, daß das Produkt Druckhöhe \times Tropfzeit mit der letzteren wächst. Um aber etwas über die Größe $\partial(\pi_\alpha T)/\partial T$ erfahren zu können, müssen wir uns durch einen sehr einfachen Kunstgriff von dem Gliede $1/L \cdot \partial G_\alpha/\partial T$ befreien. Dies geschieht dadurch, daß wir die Tropfzeiten auf ein bestimmtes beliebig gewähltes Tropfgewicht reduzieren. Fließt bei p' und T' die Quecksilbermenge G'_α aus, so würde bei demselben Druck in der Zeit $\bar{T} = T' \cdot G_\alpha/G'_\alpha$ die Menge G_α ausfließen. Beziehen wir uns bei allen Druckhöhen auf dasselbe Q_α , so können wir schreiben

$$L \cdot (p - \pi_\alpha) \cdot \bar{T} = G_\alpha = \text{konst.},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial (\bar{T} p)_\alpha}{\partial T} = \frac{\partial (\pi_\alpha \cdot \bar{T})}{\partial T}.$$

1) G. Rosset, Bull. Soc. Chim. Paris 23. p. 245. 1900.

2) Vgl. Habilitationsschrift. p. 53 u. 54.

Bilden wir nun die reduzierten Tropfzeiten \bar{T} und die Produkte $p \bar{T}$ bei der obengenannten Messungsreihe, indem wir alles auf das Gewicht 293,1 mg reduzieren, so bekommen wir bei

$T =$	49,2	60,2	74,4	89,0	106,6	119,2	133,6	144,0	160,2	Sek.
$p \bar{T} =$	3467	3510	3516	4542	3573	3610	3628	3633	3635	

In der Fig. 6, I sind diese Zahlen graphisch dargestellt. Dasselbst sind unter II auch andere Werte eingetragen, welche

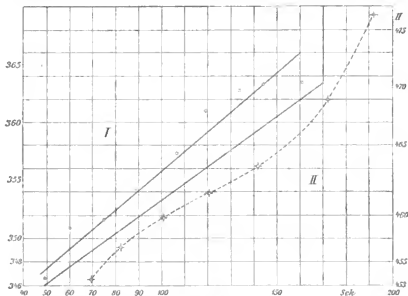


Fig. 6.

bei dem III. Versuch mit Wasser gewonnen wurden (Vgl. Tab. 6 III), wobei die Druckhöhe sehr sorgfältig auf 0,1 mm genau gemessen wurde.

Wenn π_a von der Tropfzeit unabhängig wäre, müßten die Punkte $p \bar{T}$ eine Gerade ausfüllen, was aber keineswegs der Fall zu sein scheint. Nur eine kleine Übersichtsrechnung wollen wir noch durchführen; setzen wir zu dem Zwecke π_a von \bar{T} unabhängig voraus, und berechnen es aus der dann geltenden Beziehung

$$\frac{\partial (p \bar{T})}{\partial \bar{T}} = \pi_a,$$

indem wir die in Fig. 6, I durchgelegte Gerade der Berechnung zu Grunde legen. Dann wäre

$$\pi_a = \frac{3633 - 3516}{144,0 - 74,4} = 1,67 \text{ cm},$$

was einem Druck von $1,67 \cdot 13,55 = 22,6 \text{ g/cm}^2$ entspricht. Da π_a nichts anderes vorstellt, als den zeitlichen Mittelwert des kapillaren Gegendruckes, so sehen wir in der gewonnenen Zahl eine Bestätigung unserer im vorübergehenden Abschnitte IV, 4 besprochenen Ausführungen.

Der erste und der letzte Punkt der Kurve II ergeben ähnlich behandelt $\pi_a = 1,86 \text{ cm}$ äquivalent mit dem Druck $25,2 \text{ g/cm}^2$, was wieder in Übereinstimmung steht mit dem frühen Gesagten, da es sich hier um eine ca. im Verhältnis $\frac{1}{3}$ größere Oberflächenspannung handelt.

6. Senken wir das Quecksilberreservoir, während das Quecksilber tropft, sehr vorsichtig und mit möglichster Vermeidung jeglicher Erschütterung so weit, bis das Tropfen aufhört, so sehen wir, daß das Quecksilber in der Kapillare nicht bis zu ihrer Öffnung, sondern etwa 1 mm höher entsteht. Wir müssen dann, um das Tropfen wieder einzuleiten, das Reservoir um mehr als 14 mm heben. Diese Erscheinung kann nur in der Weise erklärt werden, daß nach dem Abreißen des Tropfens ein „Tropfenmeniskus“ zurückbleibt, der einen Krümmungsradius hat, welcher größer ist, als der Radius der Ausflußöffnung. Aus der oben erwähnten Niveaudifferenz kann man die Verhältnisse der beiden Radien berechnen, womit eine Methode zur Bestimmung der Meniskusgrößen unter verschiedenen Umständen gegeben ist.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

(Eingegangen 21. März 1903.)

**5. Das Absorptionsvermögen einiger Gläser im photographisch wirksamsten Teile des Spektrums;
von A. Pflüger.**

Für die Konstruktion photographischer Fernrohrobjektive ist die Kenntnis des Absorptionsvermögens der benutzten Glasarten von höchster Wichtigkeit. Will man nämlich die Lichtstärke des Objectives durch Vergrößerung seines Durchmessers möglichst groß machen, so entsteht die Frage, wie weit dieser Gewinn durch die Absorption der mit größerem Durchmesser auch dickeren Glasmasse der Linse wieder kompensiert wird. Da über diesen Punkt nur wenige¹⁾, und nicht genaue Messungen vorliegen, habe ich mir die Aufgabe gestellt, das Absorptionsvermögen einiger wichtiger Glassorten, die mir die Firma Schott & Genossen freundlichst zur Verfügung stellte, möglichst sorgfältig zu bestimmen.

Als Strahlungsmesser diente die Thermosäule. Die Versuchsanordnung ist die folgende. Im Brennpunkt einer achromatischen Linse L_1 befindet sich die Lichtquelle J . Das aus der Linse L_1 austretende parallele Strahlenbündel wird durch eine zweite ebensolche Linse L_2 zu einem scharfen Bilde der Lichtquelle auf dem Spalt s eines Spektrometers vereinigt (vgl. Fig. 1). Im Okular des letzteren ist eine Rubenssche Thermosäule angebracht. Der Teilkreis des Apparates ist in der üblichen Weise auf Wellenlängen geeicht. Die verschiedenen Spektralpartien werden durch Drehung des Fernrohres mit der Thermosäule zur Deckung gebracht, wobei das Prisma automatisch im Minimum der Ab-

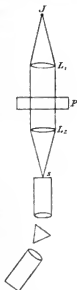


Fig. 1.

1) Vgl. besonders H. C. Vogel, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin II. p. 1219. 1896.

lenkung erhalten wird, und ein vor der Thermosäule befindlicher, $\frac{1}{2}$ mm breiter Spalt die betreffende Partie des Spektrums ausblendet. Eine Reihe von Blenden im Kollimator- und Fernrohre mindert den Einfluß der diffusen Strahlung herab. Die Messung des Thermostromes erfolgt vermittelt eines du Bois-Rubensschen Panzergalvanometers.

Das zu untersuchende Glas wird in Form einer, mehrere Zentimeter dicken Platte P in den parallelen Strahlengang zwischen die Linsen gebracht, und zwar senkrecht zur Richtung der Strahlen. Hauptbedingung ist bei dieser Anordnung, daß die Platte genügend planparallel geschliffen ist, um den Strahlengang nicht merklich zu stören. Wir messen nun die Intensität der Strahlung innerhalb eines bestimmten Spektralgebietes einmal ohne, ein zweites Mal mit eingeschalteter, also absorbierend wirkender Platte. Die erstere Größe heiße J_0 , die zweite J_a .

Wir müssen dann weiter den Betrag der an den Oberflächen der Platte reflektierten Intensität kennen. Für senkrechten Auffall des Lichtes und für den Brechungsindex ν des Glases berechnet sich für *eine* Fläche der Betrag der reflektierten Intensität R aus der bekannten Formel:

$$R = \left(\frac{\nu - 1}{\nu + 1} \right)^2.$$

Es tritt also in die Glasplatte ein die Intensität:

$$J_0(1 - R).$$

Auf dem Wege durch die Platte unterliegt nun die Strahlung der Absorption. Bezeichnen wir mit A das prozentische Absorptionsvermögen, mit d die Dicke der Platte in Zentimetern, so gelangt an die Hinterfläche die Intensität:

$$J_0(1 - R)(1 - A)^d.$$

An der Hinterfläche wird wiederum ein Teil reflektiert, sodaß die aus dem Glase austretende, zu messende Intensität gegeben ist durch den Ausdruck:

$$J_a = J_0(1 - R)^2(1 - A)^d,$$

woraus A berechnet werden kann. Den Einfluß der weiteren Reflexionen, bei mehrfachem Hin- und Hergang des Lichtes durch die Platte, lassen wir außer acht, da er den Versuchsfehlern gegenüber zu geringfügig ist.

Zu der Versuchsanordnung ist folgendes zu bemerken. Als Lichtquelle diene für die Messungen im sichtbaren Spektrum ein großer Nernstscher Glühkörper für ein Ampère Stromstärke. Der Glühfaden desselben ist ca. 1 mm dick; sein Bild ist also erheblich breiter als das des Kollimatorspaltes, der im höchsten Falle auf 0,5 mm erweitert wurde. Bei der großen Lichtstärke der, weiter unten noch zu beschreibenden, Spektralanordnung, und der hohen Empfindlichkeit des Galvanometers reichte die Intensität der Strahlung vollkommen aus, um noch bei $\lambda = 415 \mu\mu$ mit 0,1 mm Breite des Kollimatorspaltes 30 Skt. Ausschlag zu erhalten. Bei der Wellenlänge $\lambda = 388 \mu\mu$ muß indessen der Spalt auf etwa 0,5 mm verbreitert werden, wenn man einen ebensolchen Ausschlag erhalten will. Dadurch wird aber das Spektrum unrein, und es können bei solchen Glassorten, deren Absorptionsvermögen in dieser Region schnell abfällt, erhebliche Messungsfehler entstehen. Denn bei der geringen Dispersion des verwendeten Quarzprismas treffen dann sehr verschiedene, verschieden stark absorbierte Strahlen auf die Thermosäule. Von diesen überwiegen die langwelligeren, an sich schon intensiveren, aber auch schwächer absorbierten den Einfluß der kurzwelligeren so sehr, daß der Wellenlängenschwerpunkt zu weit nach längeren Wellen verschoben wird.

Infolgedessen wurde der Nernstbrenner bis zur Wellenlänge 388 nur für solche Glassorten verwandt, deren Absorption in dieser Spektralregion relativ gering ist, und wenig mit der Wellenlänge variiert. Im übrigen diene als Lichtquelle eine Siemenssche Kontaktbogenlampe mit festem Brennpunkt. Der Lichtbogen zeigt bei der Wellenlänge 388 eine sehr starke, bei 357 eine schwächere Bande, deren Wärmewirkung sehr beträchtlich¹⁾ ist. Bei meiner Anordnung genügt für

1) H. Kayser u. C. Runge, Wied. Ann. 38. p. 90. 1889; B. W. Snow, Wied. Ann. 47. p. 227. 1892; E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

$\lambda = 388 \mu\mu$ eine Spaltbreite von $\frac{1}{100}$ mm, um einen Ausschlag von 50 Skt. zu erzielen. Bei $\lambda = 357 \mu\mu$ muß indessen der Spalt auf 0,5 mm verbreitert werden. Aus den eben erwähnten Gründen sind daher, insbesondere für die stärker absorbierenden Glassorten, die gemessenen Absorptionsvermögen bei $\lambda = 357 \mu\mu$ etwas zu klein. Da die photographische Wirkung dieser Region schon gering, und das Absorptionsvermögen der meisten Gläser hier sehr groß ist, kommt diese Region praktisch nicht so sehr in Betracht, und ich habe daher auf eine Bestimmung von ähnlicher Exaktheit wie für die übrigen Wellenlängen verzichtet. Ich hätte dazu die Glaslinsen des Apparates vermeiden, und sie durch achromatische Quarz-Flußspatlinsen oder große Hohlspiegel ersetzen müssen, die mir nicht zur Verfügung standen.

Die Bogenlampe hat gegenüber dem Nernstbrenner den großen Nachteil, daß ihre Strahlung inkonstant ist. Indessen lassen sich unter Beachtung geeigneter Vorsichtsmaßregeln, wie ich schon früher gefunden habe ¹⁾, ganz brauchbare Resultate erzielen. Als Elektroden zeichnen sich A-Kohlen von Gebr. Siemens, Charlottenburg, durch besondere Ruhe des Lichtes aus. ²⁾ Die Kontaktlampe hat ein Uhrwerk, das je nach der Stärke des Stromes, etwa jede Minute den Abstand der Kohlen reguliert, und diesen Zeitpunkt durch ein gut hörbares Schnurren der Zahnräder anzeigt. Beobachtet man den Galvanometerausschlag, so zeigt sich, daß ungefähr während der ersten Hälfte der Pause zwischen zwei Regulierungen die Intensität konstant bleibt, oder nur wenig nach einer Richtung sich verändert. Diese Zeit genügt, um drei Ablesungen — die erste und dritte ohne, die zweite mit eingeschalteter Platte — zu machen. Aus 1 und 3 wird dann das Mittel genommen; sie differieren gewöhnlich nur um wenige Prozent.

Zum Abblenden der Strahlen diente für die Messungen vom Grün bis zum Ultraviolett eine rote Glasscheibe ³⁾, für das Rot und Gelb ein Metallschirm. Das rote Glas läßt den Einfluß der sehr intensiven roten, diffusen Strahlung auch

1) A. Pflüger, Wied. Ann. 65, p. 190. 1898.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8, p. 1. 1902.

3) l. c.

nach der Ablenkung der zu messenden Strahlen bestehen. Der Nullpunkt bezieht sich also auf diesen stationären Zustand, und die aus dem Einfluß der diffusen Strahlung entstehenden Fehler werden erheblich verringert. Die ultrarote Strahlung wird durch ein planparalleles, mehrere Zentimeter dickes Wassergefäß unschädlich gemacht.

Wie schon erwähnt, bestehen die vier Linsen der Anordnung aus Glas. Es sind Steinheilsche Objekte von 6 cm Durchmesser und 28 cm Brennweite, also von sehr großer Lichtstärke. Ein großes Flintglasprisma, welches diese Linsen auszunützen gestattet hätte, erwies sich im Ultraviolett als zu stark absorbierend. Ich ersetzte es daher durch Quarz. Hr. Hans Hauswaldt in Magdeburg stellte mir zwei vorzügliche gleichseitige Cornusche Prismen zur Verfügung, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche. Ein drittes, von gleichem Winkel, aber nicht gleicher Güte, befand sich in der Sammlung des Instituts. Die drei Prismen wurden auf dem Tischchen des Spektrometers übereinander angehaut, und so justiert, daß sie die Strahlung um denselben Winkel ablenkten. Dies ließ sich mit genügender Genauigkeit, innerhalb der Grenzen der übrigen Versuchsfehler, machen, und es gelang so, etwa $\frac{2}{3}$ des Linsenquerschnittes auszunützen.

Im Panzergalvanometer wurde das leichtere Magnetgehänge benutzt. Die gewöhnlich benutzte Empfindlichkeit betrug (bei 2,30 m Skalenabstand, 2,7 Ohm Spulenwiderstand) 1 Skt. pro $1 \cdot 10^{-10}$ Amp.

Leider machte sich bei den Messungen die schlechte Beschaffenheit des physikalischen Instituts in sehr unangenehmer Weise bemerkbar. Das Galvanometer hing zwar an einer Juliusschen Aufhängung, und war zum Schutz gegen Luftzug in ein bis zur Decke des Zimmer reichendes Gehäuse eingebaut. Es gelang auf diese Weise aber nicht, die Erschütterungen so herabzumindern, daß man $\frac{1}{10}$ mm hätte ablesen können. $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{3}$ mm war das Höchsterreichbare, immerhin eine in Anbetracht der großen Ausschläge ausreichende Genauigkeit. Am schlimmsten erwiesen sich die Störungen durch windiges Wetter. Die Solidität des Baues ist so mangelhaft, daß die Skala bei mittlerem Winde um 2—3, bei einigermaßen heftigen Windstößen um 10 Skt., verursacht durch Schwan-

kungen der Mauern, ausschlägt. Da der verflossene Winter reich an Stürmen war, mußten darum die Beobachtungen mitunter wochenlang ausgesetzt werden.

Die Zuleitung von der Thermosäule zum Galvanometer bestand aus einer weichen, doppelten, gedrehten Schnur, wie sie zn Klingelleitungen verwandt werden. Sie war in Glasröhren verlegt, und durch dicke Watteverpackung geschützt. Ein Stromschlüssel, vollständig aus Kupfer gearbeitet, war eingeschaltet, und ebenfalls dicht eingehüllt. Bei dieser Anordnung habe ich niemals unter Störungen durch Thomsonströme zu leiden gehabt, trotz des geringen Widerstandes der ganzen Leitung, nämlich etwa 7 Ohm (2,7 Ohm der Spulen, 3,8 Ohm der Thermosäule, 0,5 Ohm der Drahtleitung). Solche Störungen traten sofort ein, wenn die Enden der Drahtleitung in Quecksilbernäpfe, aufgestellt auf dem Traghrett des Galvanometers, frei endigten. Der Schutz, den die letztere Anordnung gegen die Übertragung von Bodenerschütterungen durch die Zuleitung bietet, wird durch die Störungen an den offenen Quecksilber-Kupferkontakten völlig kompensiert. Übrigens habe ich solche Übertragungen von Bodenerschütterungen durch die weiche Schnur kaum bemerkt. Wenigstens verschwanden sie vollständig gegen die Erschütterungen, die von den Mauern des Gebäudes durch die Drähte der Anhängung auf das System übertragen wurden. Diese konnten bei Vorbeifahrt eines Lastwagens, oder Eisenbahnzuges sehr erheblich werden.

Wie schon bemerkt, setzt die Methode genügende Planparallelität der Glasplatten voraus, da sonst beim Einschieben der Platte in den Strahlengang durch prismatische Ablenkung eine geringe Verschiebung des Bildes erfolgt, und dadurch andere Partien der Lichtquelle mit dem Spalt zur Deckung kommen. Vorsichtshalber wurden die Messungen im sichtbaren Spektrum durch Messungen mittels des Lummer-Brodhunschen Photometers kontrolliert. Bei dieser Art der Messung kommt es ja auf Planparallelität der Platten nicht so sehr an, solange man nicht ein Bild der Lichtquelle auf den Spalt entwirft. Es zeigte sich innerhalb der Versuchsfehler genügende Übereinstimmung. Die photometrische Methode, die ja nahe liegt, habe ich bei dieser Arbeit im sichtbaren Spektrum nicht angewandt, da sie sehr viel anstrengender,

subjektiven Störungen ausgesetzt, und nicht viel genauer ist. Ich ziehe die hier beschriebene Messungsart unter allen Umständen vor.

Selbstverständlich wurden auch die Messungen mit Nernstbrenner und Bogenlampe dadurch verglichen, daß die letzte Messung des Nernstbrenners im äußersten Violett mittels der Bogenlampe wiederholt wurde. Auch hier zeigte sich genügende Übereinstimmung.

Zur Beurteilung der Genauigkeit gebe ich in Tab. 1 eine Messungsreihe von mittlerer Güte wieder.

Tabelle 1.

Galvanometerausschläge J_e und J_d für Glas O. 3192.

Die mit einem * versehenen Werte sind mit der Bogenlampe, die übrigen mit dem Nernstbrenner gewonnen.

Wellenlänge in $\mu\mu$	Spaltbreite in mm	J_e				Mittel	J_d				Mittel	$\frac{J_d}{J_e}$
357*	0,50	22	21	22		21,7	7	7	7		7	0,82
388*	0,02	66,5	68	68,7		66,7	46	48	47		47	0,705
388	0,50	27,5	28	28		27,8	20,3	19,8	20,5		20,2	0,725
415	0,20	55	54	55		54,4	42,2	44	42,5		43	0,79
			53,8					48				
442	0,20	106	104	106		105,3	86,5	86,7	86,7		86,7	0,82
			105,3					87				
500	0,05	91	90	91,7	91,5	91	76,5	77	76,3	77	76,7	0,84
640	0,01	89	89	89		89	76,5	76,7	76,3		76,5	0,86

Wie man sieht, betragen bei Verwendung des Nernstbrenners die Fehler der einzelnen Beobachtung bei größeren Ausschlägen etwa 1 Proz. Dieser Fehler ist hauptsächlich auf das Konto der Erschütterungen zu setzen. Bei vollkommen ruhiger Lage des Galvanometers wird er sich erheblich vermindern lassen. Die Methode ist also großer Genauigkeit fähig.

Tab. 2 gibt die Resultate der Messungen. Das Reflexionsvermögen wurde nur für eine mittlere Wellenlänge, nämlich $\lambda = 434$, berechnet und eingesetzt. Die Zahlen für $\lambda = 640$, wo wegen der geringen Absorption das Reflexionsvermögen

eine große Rolle spielt, sind darum nicht als exakt zu bezeichnen. Sie sollen nur einen ungefähren Anhalt geben.

Tabelle 2.

Das Absorptionsvermögen A verschiedener Glassorten.

Die Zahlen bedeuten die pro 1 cm Glasdicke absorbierte Strahlung in Prozenten.

Wellenlänge in $\mu\mu$	357	388	415	442	500	640
1. Borosilikatkron O. 2831 (144)	4,7	2,5	1,2	—	0,7	0,5
2. Kalksilikatcron O. 3309 (60)	3,4	2,5	1,8	1,4	0,5	0,3
3. Schwerstes Barytkron O. 3192 (1209)	35	9,8	5,2	3,4	2,5	1,6
4. Fernrohrflint O. 8083 (2001)	49	30	12	3,6	0,7	0,7
5. Baryt-Leichtflint O. 2717 (602)	9	6	2,7	—	1,6	—
6. Baryt-Leichtflint O. 3131 (578)	18	8,6	2,5	2,1	0,9	0,5
7. Gew. Silikatflint O. 3234 (103)	28	9,6	4,1	—	0,0	0,0
8. Schweres Silikatflint O. 3096 (102)	41	28	6,9	—	0,9	0,5

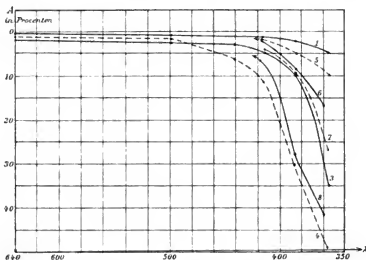


Fig. 2.

Das Absorptionsvermögen einiger Glassorten. Die Nummern der Kurven entsprechen denen der Tab. 2.

Die Zahlen der Tabelle und die beistehende Kurventafel (Fig. 2) bedürfen wohl keiner Erläuterung. Sie zeigen die bekannte Tatsache, daß die Krongläser weniger absorbieren wie die Flintgläser, und daß bei letzteren die Absorption bei größeren Wellenlängen plötzlich einsetzt. Für die schwersten Gläser 4 und 8 ist aus den oben angegebenen Gründen das Absorptionsvermögen zu gering gefunden. In dem Knick der Kurven bei 388 macht sich dies deutlich bemerkbar.

Bonn, Physik. Inst. d. Univ., 20. März 1903.

(Eingegangen 24. März 1903.)

6. *Über die elektrische Durchbohrung eines festen Dielektrikums;*

von J. Kiessling und B. Walter.¹⁾

Die Untersuchung der Hartgummirohre, welche für den Bau von Induktionsapparaten verwendet werden sollen, wird in dem elektrotechnischen Laboratorium der Kautschukwerke von Dr. Heurich Traun & Söhne, hierselbst, in der Weise ausgeführt, daß man von dem einen Ende des Rohres her einen Metallring in dasselbe einführt, während ein zweiter derartiger Ring sich außen auf dem Rohre konzentrisch mit dem ersten verschiebt. Die beiden Ringe sind mit je einem Pole eines größeren Induktionsapparates verbunden, dessen Spannung (Funkeplänge) nach der Dicke des zu prüfenden Rohres abgestuft wird.

Um nun bei diesen Versuchen auch die *Enden* der Rohre prüfen zu können, was wegen des bekannten Herumschlagens der Funken um den freien Rand des Zylinders nicht ohne weiteres möglich ist, wurde das betreffende Ende in ein Ölbad getaucht. Hierbei machte man jedoch häufig die merkwürdige Beobachtung, daß das untersuchte Rohr *genau in der Oberfläche* der Flüssigkeit durchschlagen wurde, obgleich alle übrigen Teile desselben die betreffende Spannung ohne jeden Schaden ausgehalten hatten. Von dieser Erscheinung, die uns von der Fabrik zur eventuellen Aufklärung freundlichst mitgeteilt wurde, nahmen die folgenden Untersuchungen ihren Ausgang.

Zunächst schien es uns nun klar zu sein, daß das beschriebene Phänomen nur eine Modifikation der schon von v. Waltenhofen entdeckten, ebenso merkwürdigen *elek-*

1) Von den in dieser Abhandlung beschriebenen Versuchen wurde ein Teil von beiden Verfassern gemeinschaftlich, ein anderer Teil dagegen von Walter allein angestellt, da Kiessling leider durch Krankheit sowie auch durch seinen Fortgang von Hamburg an der weiteren Beteiligung verhindert war.

trischen Durchbohrung des Glases sei ¹⁾, einer Erscheinung, die später nmr noch von Mach und Doubrava ²⁾ sowie auch von v. Waltenhofen selbst ³⁾ untersucht worden ist, die aber, wie wir später zeigen werden, von diesen Beobachtern noch keine genügende Erklärung gefunden hat.

Was indessen zunächst die Erscheinung selbst angeht, so besteht dieselbe im wesentlichen darin, daß eine dünne Glasplatte, auf welche man einen Ring oder auch nur einen Tropfen von Stearin, Wachs, Siegelack oder dergleichen aufgetropft hat, von einer elektrischen Entladung viel leichter durchschlagen wird als ohne diese Maßregel; und zwar liegt die Durchschlagsstelle stets am Rande des aufgetropften Dielektrikums — vorausgesetzt, daß das letztere in seiner ganzen Ausdehnung gut auf dem Glase haftet.

Mach und Doubrava arbeiteten nur mit aufgetropften Ringen und setzten die Elektroden heiderseits stets innerhalb des Ringwalles auf. In diesem Falle lag dann die Durchschlagsstelle stets am inneren Rande dieses Walles, eine Tatsache, deren Erklärung sie durch den folgenden Satz gehen zu können glaubten: „Der Stearinring bildet für die Entladung ein Hindernis und die Stearinluftfläche isoliert besser als die Glasluftfläche“.

Dem ersteren Teile dieser Ansicht, nach welchem wir es also hier mit einem „Stauungsphänomen“ zu tun haben sollen, hat sich auch v. Waltenhofen angeschlossen, während er in Bezug auf den zweiten Punkt eine abweichende Ansicht vertrat. Denn während Mach und Doubrava nach dem zweiten Teile des oben zitierten Satzes dabei lediglich an eine Stauung der Elektrizität selbst gedacht haben, da sie ja von einer ungleichen Leitfähigkeit der beiden in Frage kommenden Oberflächen reden, spricht es v. Waltenhofen in der zweiten seiner oben angeführten Abhandlungen klar aus, daß er mehr an eine, am Rande des Tropfens stattfindende Stauung der durch die Elektrizität in Bewegung gesetzten Luftteilchen denkt,

1) A. v. Waltenhofen, Dinger's polytechn. Journ. 179. p. 435. 1866.

2) E. Mach u. S. Doubrava, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 78. (II) p. 729. 1878; Wied. Ann. 8. p. 462. 1879.

3) A. v. Waltenhofen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 79. (II) p. 386. 1879; Wied. Ann. 8. p. 466. 1879.

eine Auffassung, die also auf eine fast rein *mechanische* Stauung hinauslaufen würde.

Demgegenüber möchten wir nun schon hier betonen, daß nach unseren Versuchen bei diesen Vorgängen *eine Stauung überhaupt nicht in Frage kommt*.

Was indessen zunächst die von Mach und Doubrava angezogene *ungleiche Leitfähigkeit* der Glas- und der Stearinoberfläche anbetrifft, so läßt sich allerdings nicht verkennen, daß die Elektrizität sich besonders auf der Oberfläche von nicht erhitzten *Glasplatten* mit großer Leichtigkeit ausbreitet. Daß aber dieser Umstand für die hier zu erklärende Erscheinung nur eine sekundäre, nicht aber eine maßgebende Rolle spielt, ergibt sich einfach daraus, daß der Versuch mit dem Stearintropfen auch dann gelingt, wenn man den letzteren auf einer Platte aus *Stearin selbst* anbringt, und daß sich derselbe ferner auch mit Platten aus Hartgummi, Wachs oder dergleichen wiederholen läßt, wobei man dann den Tropfen entweder ebenfalls aus Stearin oder auch aus irgend einem anderen nicht leitenden Materiale, also z. B. auch aus dem der Platte selbst nehmen kann. In allen Fällen wird die Platte *mit* dem Tropfen wesentlich leichter, d. h. mit wesentlich geringerer Funkenlänge durchschlagen als *ohne* denselben, und ferner liegt auch die Durchschlagsstelle im ersteren Falle stets am Rande des Tropfens.

Was aber sodann weiter auch die Unrichtigkeit der oben erwähnten Stannungstheorien angeht, so ergab sich uns dieselbe schon bei unseren anfänglichen, zunächst nur qualitativen und orientierenden Versuchen, die zumeist mit alten photographischen Glasplatten unter Verwendung von Stearintropfen der verschiedenartigsten Form angestellt wurden, sehr einfach daraus, daß die Durchschlagsstellen am Rande dieser Tropfen durchaus nicht immer auf derjenigen Seite dieses Randes lagen, welche der in der Nähe des Tropfens aufgesetzten Elektrode zugekehrt gewesen war, sondern vielmehr häufig sogar der letzteren diametral gegenüber. Ja, später wird sogar gezeigt werden, daß sich diese Erscheinung bis zu einem gewissen Grade sogar *willkürlich* hervorrufen läßt.

Den Fingerzeig zur richtigen Erklärung des oben beschriebenen merkwürdigen Einflusses der Randteile des auf-

getropften Materiales lieferte uns die bei diesen Versuchen gleichfalls gemachte Beobachtung, daß bei ungleichmäßigem Rande des Tropfens die Durchschlagsstelle in der Regel in einer der *einspringenden Ecken* desselben gelegen war. Dies führte nämlich dazu, mit einem scharfen Messer einen Schnitt quer durch den ganzen Tropfen zu machen. Stellte man dann die Elektroden beiderseits irgendwo der Oberfläche des Tropfens gegenüber, so lag die Durchschlagsstelle fast ausnahmslos in jenem Schnitte; und ferner sah man bei Platten, die so dick waren, daß sie bei Anwendung einer etwas größeren Funkenlänge der Durchschlagung Stand hielten, daß die *Entladungen des auf der Seite des Schnittes befindlichen Poles sich nicht mehr wie sonst nach allen Seiten hin auf der Platte verbreiteten, sondern fast ganz in diesen Schnitt hineingingen, und daß dieser letztere infolgedessen fast so stark leuchtete wie die Kapillare einer Geisslerschen Röhre.*

Besonders auffallend wird die Erscheinung, wenn die Elektroden beiderseits dem Einschnitte genau gegenübergestellt werden — und am stärksten, wenn hierbei die eine sich nahe dem einen und die andere nahe dem anderen Ende des Schnittes befindet. Dabei ist es jedoch nicht notwendig, daß dieser letztere, wie oben angegeben, *geradlinig* gemacht wird, sondern man kann ihm auch einen beliebig krummlinigen, ja sogar gezackten Verlauf geben. Immer leuchtet derselbe — und zwar zumal bei der letztgenannten Stellung der Elektroden — seiner ganzen Länge nach in einem intensiven Lichte, das bei schwächeren Entladungen eine rötliche, bei stärkeren dagegen — beim Stearin — eine blaugrüne Farbe hat, wobei allerdings im letzteren Falle der Stoff des Tropfens von maßgebender Bedeutung zu sein scheint.

In schwächerem Maße lassen sich übrigens alle diese Erscheinungen auch schon *am Rande eines einfachen Tropfens* beobachten, zumal wenn man wieder die Platte so dick nimmt, daß sie auch bei Anwendung stärkerer Entladungen nicht durchschlagen wird. Die letzteren sind nämlich dann — wie man am besten im Halbdunkeln sieht — von der in der Nähe des Tropfens aufgesetzten Elektrode aus fast gänzlich *auf den Tropfen* zu gerichtet, um sich am Rande desselben, wenn die Elektrode der anderen Seite mit der erstgenannten in einer

zum Tropfen symmetrischen Ebene liegt, diesem Rande nach beiden Seiten hin in nahezu gleichmäßiger Stärke anzuschmiegen und hier ähnliche, wenn auch nicht so starke helle Linien zu erzeugen, wie sie oben für die in einem solchen Tropfen angebrachten Schnitte beschrieben worden sind. Führt man ferner die auf der freien Seite der Platte befindliche Elektrode aus der genannten Symmetrieebene heraus, so lenkt man damit auch einen größeren Teil der von dem anderen Pole ausgehenden Entladungen auf den entsprechenden Teil des Tropfensandes hinüber, so daß schließlich, wenn man einen langgestreckten Tropfen anwendet und die Pole beiderseits zwei ziemlich weit voneinander entfernten Punkten desselben Längsrandes gegenüberstellt, die Entladungen fast gänzlich in *einer* Richtung am Rande des Tropfens entlang gleiten. Dabei schmiegen sich ferner in allen diesen Fällen die den Tropfensrand begleitenden Entladungen allen Unregelmäßigkeiten des letzteren mit fast vollständiger Treue an, so daß schon der Anblick dieser Erscheinungen die sichere Überzeugung gibt, daß der Rand des Tropfens nicht etwa eine *Stauung*, sondern im Gegenteil eine *Anziehung* auf die Elektrizität bez. auf die von ihr in Erregung und Bewegung gesetzten Luftteilchen ausüben muß.

Ganz abgesehen von jeder Theorie können wir demnach als Resultat der bisher beschriebenen Versuche den Satz aufstellen, daß *die auf einer festen dielektrischen Platte — bei freier Oberfläche derselben — sich allen Seiten hin ausbreitende Elektrizität durch Anbringung eines festen dielektrischen Tropfens fast gänzlich auf eine Linie, nämlich die Randlinie des letzteren, vereinigt wird, und daß daher auch die unter der letzteren liegenden Punkte der Platte der elektrischen Durchbohrung viel mehr ausgesetzt sind als alle übrigen.*

Denn daß tatsächlich die Ausbreitung der Elektrizität auf der Platte durch den Tropfen in ganz erheblichem Maße verringert wird, beweist man einfach dadurch, daß man den letzteren auf einer größeren Platte nicht allzuweit vom Rande derselben entfernt anbringt. Man findet dann sehr leicht eine bestimmte Schlagweite der Entladungen des Induktors, bei welcher die letzteren, wenn die Elektroden in der Nähe des Tropfens aufgesetzt werden, *nicht mehr* um den Rand der

Platte herumschlagen, während dies sofort geschieht, wenn man die Platte derartig verschiebt, daß der Tropfen aus dem Bereiche der Elektroden entfernt ist, diese letzteren aber dabei doch noch dieselbe Entfernung vom Rande der Platte behalten wie früher.

Da nun aber ferner eine jede derartige elektrische Entladung durch die gewöhnliche Luft, wie der eine von uns schon an den verschiedenartigsten Beispielen (Induktionsfunken und Blitzen) nachgewiesen hat¹⁾, stets aus mehreren, auf demselben Wege stoßweise aufeinander folgenden und von Stoß zu Stoß immer länger werdenden Büschelentladungen besteht, die zugleich diesem Wege von Stoß zu Stoß eine immer größere elektrische Leitfähigkeit geben, so muß daher bei den jetzt in Rede stehenden Entladungen der Rand des Tropfens — und noch mehr natürlich ein im Tropfen selbst angebrachter Schnitt, der ja gewissermaßen als die Vereinigung zweier solcher Ränder anzusehen ist —, sehr schnell eine erheblich größere Leitfähigkeit erlangen als die ganze übrige Nachbarschaft, so daß wir uns demnach jene Linien bei diesen Versuchen geradezu als *leitende Linien* oder noch prägnanter als *Leitungsdrähte* vorstellen können. Von diesem Gesichtspunkte aus werden uns dann nämlich sofort einige weitere Beobachtungen klar, die man bei diesen Durchschlagsversuchen machen kann, und die uns im ersten Augenblick sehr auffällig erschienen.

Bei Anwendung eines Tropfens mit Schnitt zeigt sich nämlich, wenn die Elektroden E_1 und E_2 (Fig. 1) beiderseits *verschiedenen* Punkten der Schnittlinie gegenüber gestellt werden, daß die Durchschlagsstelle in der Regel in der Nähe derjenigen Elektrode liegt, welche sich auf der *freien* Seite der Platte befindet, also in der Fig. 1 in der Nähe von E_2 ; und zwar ist dieses Resultat — im Gegensatz zu dem des bekannten Lullinschen Versuches — ganz unabhängig von der Polarität der beiden Elektroden. Die Erklärung ergibt sich nun auf Grund der

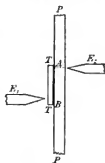


Fig. 1.

1) B. Walter, Wied. Ann. 66. p. 636. 1898 u. 68. p. 776. 1898; Ann. d. Phys. 10. p. 393. 1903.

obigen Überlegungen sehr leicht; denn da hiernach der Schnitt in dem Tropfen TT , dessen tiefste auf der Oberfläche der Platte liegende Furche in der Fig. 1 durch die stärkere Linie AB dargestellt ist, als ein leitender Draht angesehen werden kann, so wird demnach diese Linie, wo auch die Elektrode E_1 sich befinden mag, überall nahezu das gleiche Potential haben, so daß mithin durch die Platte hindurch das stärkste Potentialgefälle von demjenigen Punkte von AB ausgehen wird, welcher der Elektrode E_2 am nächsten liegt, und hier befindet sich also auch der wahrscheinlichste Ort für die Durchschlagsstelle. Diese Überlegungen sind aber offenbar vollständig unabhängig von der Polarität der beiden Elektroden; und tatsächlich hat denn auch diese nicht bloß bei dem hier in Rede stehenden Versuche, sondern auch bei den übrigen in dieser Abhandlung bereits beschriebenen und noch zu beschreibenden Beobachtungen meist nur eine ganz nebensächliche Bedeutung. Es rühren nämlich etwaige damit zusammenhängende Unterschiede in der Regel nur von der bekannten ungleichen Ausbreitungsart der beiden Elektrizitäten in der gewöhnlichen Luft her.

Der oben dargelegte Gedankengang führte dann des weiteren auch noch zu der bereits früher angedeuteten *willkürlichen* Hervorrufung der zuerst nur zufällig beobachteten Erscheinung, daß die Durchschlagsstelle am Rande eines einfachen Tropfens manchmal auch der in der Nähe des letzteren aufgesetzten Elektrode diametral gegenüber lag. Dieses Phänomen, welches ja wegen der dadurch gegebenen, überzeugenden Widerlegung der Stauungstheorien von ganz besonderem Interesse ist, tritt nämlich fast regelmäßig auf, wenn man die Elektroden, wie in der Fig. 2 angegeben, aufsetzt; und zwar liegt auch

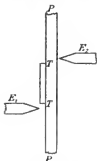


Fig. 2.

in diesem Falle die Erklärung wieder darin, daß der ganze Rand des Tropfens nahezu dasselbe Potential hat wie die irgendwo in seiner Nähe aufgesetzte Elektrode E_1 , und daß daher der Ort der Durchschlagsstelle auch hier in den meisten Fällen durch den Ort der Elektrode E_2 bestimmt wird.

Der oben gelieferte Nachweis, daß es sich bei allen diesen Durchschlagsversuchen um eine Konzentration der elektrischen Entladung auf eine einzige Linie handelt, legte dann weiter die Vermutung nahe, daß diese Konzentration sich noch weiter vermehren lassen würde, wenn man die betreffende Linie *verkürzte* — und zwar am stärksten, wenn man dieselbe direkt bis auf einen *Punkt* zusammenschrumpfen ließ. So wurde denn jetzt statt eines Schnittes *ein feiner Nadelstich* in dem Tropfen angebracht. Die Wirkung war überraschend.

Eine Hartgummiplatte von 50/50 cm Größe und 4,2 mm Dicke beispielsweise, die bei freier Oberfläche selbst mit den 50 cm langen Funken eines Induktors nicht durchschlagen werden konnte, und zu deren Durchbohrung bei Anwendung eines einfachen Stearintropfens immer noch eine Schlagweite von 20–30 cm nötig war — bei glatter Randlinie mehr, bei solcher mit einspringenden Ecken weniger —, diese Platte wurde bei Verwendung eines Tropfens mit Nadelstich *in wenigen Sekunden regelmäßig mit 10 cm Funkenlänge* durchbohrt. Dabei wurde die Elektrode der Tropfenseite nicht etwa in den Nadelstich hineingeführt, sondern war stets 1–3 mm von der Oberfläche desselben entfernt. In derselben Weise ließen sich auch Glasplatten bis zu 10 mm Dicke mit Leichtigkeit durchschlagen, wobei die Funkenlänge für diese hier vorläufig als Grenze angegebene Dicke je nach der Sorte des Glases zwischen 15 und 20 cm lag, während für dünnere Platten dieser Art natürlich auch schon entsprechend kleinere Schlagweiten ausreichend waren. Gerade in diesem letzteren Falle ist die Wirkung eines solchen Tropfens mit Nadelstich besonders auffallend, zumal wenn man zu den Versuchen eine größere Platte dieser Art, z. B. eine alte photographische Platte von 30/40 oder 40/50 cm Größe und einer Dicke von 1–2 mm, anwendet. Setzt man dann die Elektroden zunächst beiderseits auf die Mitte der noch nicht betropften Platte und läßt auf dieselbe die nicht allzu schnell aufeinander folgenden Funken eines größeren Induktors schlagen, so wird die Platte, solange sie kalt ist, meistens Funken bis zu 40 cm Länge ohne Schaden aushalten, die dann schließlich knallend um die Ränder derselben herumschlagen. Bringt man aber dann irgendwo auf der Platte einen Stearintropfen von etwa 3 cm Durchmesser und

2 mm Höhe an und durchsticht die Mitte desselben bis auf die Oberfläche der Platte mit einer feinen Nähnadel, so genügen, wenn man die Elektroden beiderseits diesem Stich gegenüberstellt, Fünkchen von 3—5 cm Länge, um die Platte daselbst mit unfehlbarer Sicherheit — und zwar zumeist sofort beim Einschalten des Instrumentes — zu durchbohren. Dabei kann der Tropfen bei diesen 1—2 mm dicken Platten fast unmittelbar am Rande derselben angebracht werden, da bei einem solchen durchstochenen Tropfen fast die ganze Elektrizität der Entladungen des Induktors in den Stich des Tropfens hineingeht und daher auch ein Herumschlagen der Funken um den Rand der Platte hier noch weniger zu befürchten ist als bei Anwendung eines Tropfens ohne Stich. Gerade bei der Anstellung des oben beschriebenen Versuches mit einer solchen großen Platte ist es daher zweckmäßig, die Durchschlagsversuche stets nur in der Nähe des Randes derselben vorzunehmen, da sich dann dieselbe Platte sehr oft zur Anstellung dieses Experimentes benutzen läßt.

Im übrigen kann man sich von dem Vorhandensein einer Konzentration der Elektrizität in die Stichöffnung hinein auch hier wieder dadurch überzeugen, daß man eine dickere Platte anwendet und dann die Funkenlänge der Entladungen etwas kleiner nimmt als zur Durchschlagung der ersteren nötig ist. Im Dunkeln sieht man dann einesteils, daß die Entladungen von derjenigen Elektrode aus, welche sich auf der Seite des Tropfens befindet, in Form einer feinen rötlichen Linie auf den Stich losgehen, um darauf fast ganz in demselben zu verschwinden; und anderenteils kann man auch, wenn die Platte aus Glas besteht, von der Rückseite her den Grund der Stichöffnung deutlich als einen hell leuchtenden Punkt beobachten. Derselbe wird indessen bei Anwendung des leicht schmelzenden Stearins sehr bald durch eine größere Zahl kleinerer Pünktchen ersetzt, die rings um ihn herum im Kreise liegen und sich allmählich immer weiter von ihm entfernen. Hört man dann mit dem Versuche auf und betrachtet die Platte von der Rückseite her bei Tageslicht, so sieht man in der Grenzfläche zwischen Stearin und Glas von dem Grunde der Stichöffnung aus mehrere baumartig verästelte Gänge ausgehen, in denen das ursprünglich weiße Material des Tropfens stark

gelb geworden und also nicht bloß geschmolzen, sondern auch chemisch zersetzt worden ist.

Aus allem diesen geht demnach hervor, daß eine verhältnismäßig starke elektrische Strömung in die Stichöffnung hinein stattgefunden haben muß, wie ja übrigens auch durch die Durchschlagswirkung selbst am besten bewiesen wird. Die Stichöffnung des Tropfens kann daher in derselben Weise, wie dies früher für den in einem solchen Tropfen angebrachten Schnitt ausgeführt worden ist, als ein *Leitungsdraht* angesehen werden, welcher an der betreffenden Stelle auf die Oberfläche des Glases aufgesetzt und dessen Spitze durch das Dielektrikum des umgebenden Tropfens nach allen Seiten hin isoliert ist. Im Grunde genommen stellt daher die hier beschriebene elektrische Durchschlagsmethode nichts anderes dar als eine vereinfachte Modifikation der bekannten Methoden von Rhumkorff und Holtz; und wenn sie natürlich auch — wegen der weniger guten Isolierung der in Frage kommenden Spitze — nicht ganz so wirkungsvoll sein kann wie diese, so ist demgegenüber doch wieder die Vereinfachung des Verfahrens eine so außerordentlich große, daß man auf jene Maßnahmen in Zukunft jedenfalls nur dann zurückgreifen dürfte, wenn sie eben unbedingt notwendig sind. Darum scheint es hier am Platze, zunächst eine vergleichende Übersicht der Leistungsfähigkeit beider Methoden zu geben. Holtz, der bekanntlich einen 20—30 cm langen massiven Glaszylinder von 5—10 cm Durchmesser anwendet, welcher längs seiner ganzen Achse mit einer engen Durchbohrung für die Aufnahme des Zuführungsdrahtes versehen ist, und dessen eine Basis *genau plan* geschliffen sein muß, um mit einer harzartigen Masse auf das sorgfältigste auf die zu durchschlagende Glasplatte aufgekittet zu werden, gibt als die größte Glasdicke, welche er nach dieser Methode durchbohrt hat, $1\frac{1}{2}$ Zoll, d. h. ungefähr 3,5 cm und für die dazu notwendige elektrische Spannung eine Funkenlänge von 12 Zoll oder rund 30 cm in Luft an.¹⁾ Demgegenüber haben wir nun nach unserer Methode bisher Glasplatten bis zu 1,7 und Hartgummiplatten bis zu 1,6 cm Dicke durchschlagen; und zwar war dazu bei diesen äußersten Dicken im ersteren Falle

1) W. Holtz, Pogg. Ann. 130. p. 121. 1867.

eine Funkenlänge von 25 cm und im letzteren eine solche von 35 cm nötig.

Als ein anderer Nachteil unserer Methode, der Holtz-schen gegenüber, muß ferner noch der angeführt werden, daß dabei die zu durchschlagende Platte um so größer sein muß, je dicker sie ist, da sonst die Funken, deren Ausbreitung auf der Platte durch den Tropfen natürlich nicht vollständig verhindert wird, um den Rand derselben herumschlagen, so daß dann eine Durchbohrung natürlich nicht mehr zu stande kommen kann. Immerhin sind aber doch die für diese Versuche notwendigen Plattengrößen wegen der angeführten kondensierenden Wirkung des Tropfens recht mäßige, was z. B. daraus hervorgeht, daß bei der oben erwähnten von uns vielfach durchschlagenen Glasplatte von 1,7 cm Dicke mehrere Durchschlagsstellen weniger als 8 cm vom Rande entfernt lagen, und daß auch die von uns durchbohrte 1,6 cm dicke Hartgummiplatte nur 26/27 cm groß war. Überdies kommt noch hinzu, daß sich eine solche dicke Platte, zumal wenn dieselbe aus Glas besteht, sehr viele Male für einen solchen elektrischen Durchbohrungsversuch benutzen läßt, was z. B. daraus erhellt, daß es gelang, durch die oben erwähnte 1,7 cm dicke Glasplatte innerhalb einer Fläche von weniger als $\frac{1}{4}$ qcm (!) nach dieser Methode *drei* verschiedene Kanäle zu bohren. Die Ursache dieser im ersten Augenblick höchst auffallenden Möglichkeit wird weiter unten aufgeklärt werden.

Zuvor sei indessen noch erwähnt, daß bei Glasplatten, die mehr als 10 mm dick sind, die oben erwähnten leicht schmelzbaren und auch in der Anwendung sehr bequemen Stoffe, wie Stearin, Wachs und dergleichen für einen Durchbohrungsversuch nach unserer Methode nicht mehr ausreichen, sondern daß man in solchen Fällen eines Stoffes bedarf, welcher nicht bloß einen höheren Schmelzpunkt hat, sondern auch noch fester auf der zu durchschlagenden Platte haftet, um die oben beschriebene Ausbreitung der Elektrizität in der Grenzschicht zwischen Tropfen und Platte nach Möglichkeit zu verhindern. Andererseits ist es aber wieder sehr wünschenswert, daß die Tropfensubstanz bei Zimmertemperatur noch so weich ist, daß sie sich nach dem Aufschmelzen im abgekühlten Zustande noch leicht mit einer Nadel durchstechen läßt, eine Bedingung, welcher

z. B. der sonst ganz brauchbare Siegelack nicht genügt, so daß man in diesem Falle eine *heiße* Nadel anwenden muß. Wohl aber erfüllt die drei obigen Bedingungen eine Auflösung von 1 Teil Kolophonium in 14 Teilen heißen venetianischen Terpentin, eine Masse, die sich für diese Zwecke übrigens auch noch deswegen empfiehlt, weil sie vollkommen durchsichtig ist, und man daher mit ihr bei Glasplatten den Durchbohrungskanal von beiden Seiten her genau beobachten kann. Andererseits ist allerdings die Masse auch bei Zimmertemperatur noch so klebrig, daß sie überall, wohin man sie legt, festhaftet, so daß man sie daher am besten ein für allemal in dem Porzellantiegel, in welchem man sie eingeschmolzen hat, läßt, um sie von dort aus in heißem Zustande längs eines an die Ausgußöffnung gehaltenen heißen Glasstabes direkt auf die zu durchschlagende Platte zu gießen.

Will man ganz sicher gehen, so ist es ratsam, die Masse nach dem Auftropfen mit einer von oben her genäherten kleinen Bunsenflamme noch einmal vollständig zu verflüssigen, einestheils um die erstere in allen ihren Teilen innig mit der zu durchschlagenden Oberfläche zu verschmelzen und also auch etwaige an letzterer anhaftende Luftblasen in die Höhe zu befördern, und anderenteils auch, um den Rand des Tropfens nach allen Seiten hin möglichst gleichmäßig und flach abfallend zu machen, da sonst ein großer Teil der Entladungen, wie wir wissen, auf diese Randlinie abgelenkt wird.

Des weiteren wollen wir hier noch erwähnen, daß auch wir bei unseren sämtlichen Versuchen dieser Art die bereits von Holtz u. a. gemachte Beobachtung bestätigen konnten, daß die Durchschlagsfähigkeit einer elektrischen Entladung, soweit es die Elektrizität selbst angeht, in erster Linie jedenfalls von der *Spannung*, nicht aber von der Quantität der letzteren abhängt, so daß sich also z. B. die Anwendung von Leydener Flaschen zu diesem Zwecke nur dann empfiehlt, wenn man dadurch eben — wie bei der Influenzmaschine — die Schlagweite des Apparates vergrößern kann.

Bei Benutzung eines Induktoriums dagegen, das sich für diese Versuche ganz besonders eignet, ist die Anwendung jenes Zubehöres nicht zu empfehlen, da es bekanntlich die sekundäre Funkenlänge des Instrumentes in der Regel ganz er-

heblich herabsetzt und daher auch, um die zur Durchschlagung nötige Schlagweite zu erreichen, eine wesentliche stärkere Belastung des ganzen Apparates verlangt. Allerdings ist dann natürlich auch, wenn die Durchschlagung gelingt, die zerstörende Wirkung der letzteren eine entsprechende größere.

Gehen wir aber sodann zu der Erklärung der bereits oben erwähnten eigentümlichen Tatsache, daß es mit Hilfe der hier beschriebenen einfachen Methode möglich ist, Glasplatten von 10—20 mm Dicke an mehreren Stellen dicht nebeneinander zu durchschlagen, so hängen mit derselben auch noch mehrere andere bemerkenswerte Beobachtungen zusammen, die sich bei diesen Versuchen häufig machen ließen, und die im ersten Augenhlick vollkommen unverständlich waren. Die hauptsächlichste derselben bestand darin, daß nach einem solchen Durchbohrungsversuch von dem Grunde der Stichöffnung des Tropfens aus häufig nicht bloß *eine*, sondern sogar *zwei* vollständig getrennte Kanäle durch die Platte hindurchgingen, deren andere Enden auf der freien Seite derselben in der Regel 3—5 mm, manchmal aber auch bis zu 10 mm weit voneinander entfernt waren. Andererseits liefen aber auch in einem Falle diese beiden von demselben Punkte ausgehenden und auch scheinbar gleichzeitig entstandenen Kanäle in nur etwa 1 mm Abstand voneinander durch die ganze Dicke des Glases (17 mm) hindurch, wobei das letztere gleichzeitig einen sich zwischen den beiden Kanälen hinziehenden Sprung zeigte, der sich auch jenseits auf beiden Seiten derselben noch einige Millimeter weit in das Glas hinein fortsetzte. Die beiden Kanäle waren dabei jedoch nicht genau miteinander parallel, und lagen auch nicht genau in derselben Ebene.

Die Durchbohrung selbst wurde bei diesen Versuchen in der Regel mit einem 50 cm Induktor bewerkstelligt, dessen Funkenlänge durch Einschalten von Widerstand bez. Veränderung der primären Selbstinduktion der Dicke der zu durchschlagenden Platte entsprechend erniedrigt und durch eine besondere Funkenstrecke gemessen wurde. Als Unterbrecher endlich wurde meistens ein Quecksilberstiftunterbrecher benutzt und zwar hauptsächlich, um genau die Zahl der Unterbrechungen zu kennen, die speziell bei den oben beschriebenen Versuchen auf 20 in der Sekunde eingestellt war.

Anfangs schien uns nun die einzig mögliche Erklärung der hier in Rede stehenden doppelten Durchbohrung des Glases die zu sein, daß es sich hier um ein *genau gleichzeitiges* Vordringen zweier verschiedener Äste einer und derselben Entladung handele, da es nicht denkbar erschien, daß die Elektrizität, nachdem sie sich soeben einen Weg durch eine so dicke Platte erbohrt hatte, denselben nachträglich verlassen würde, um sich noch einen anderen, von derselben Stelle ausgehenden zu bilden. Als es jedoch im Laufe der Versuche gelang, eine solche, nach der angegebenen Methode durchschlagene Platte durch neuerliches Aufschmelzen des Tropfenmaterials noch mehrfach und zwar schließlich in immer größerer Nähe der alten Kanäle — wenn dieselben nicht von allzu starken Rissen begleitet waren — zu durchbohren, ja als bei derartigen Versuchen ein neuer Kanal selbst dann entstand, wenn die Elektrode der nicht betropften Seite direkt auf das freie Ende eines nur einige Millimeter davon entfernten alten aufgesetzt wurde, da war der Schluß, *daß ein derartiger durch Glas gebohrter Kanal sich nachträglich von selbst wieder zu verschließen vermag*, nicht mehr von der Hand zu weisen; und derselbe mußte dann natürlich auch für die Erklärung der bereits oben erwähnten Möglichkeit, bei einem einzigen solchen Durchbohrungsversuche mit schnell aufeinander folgenden Entladungen von derselben Stelle der Platte aus *zwei* verschiedene Kanäle durch dieselbe hindurchzuschlagen, herangezogen werden. Denn dann war ja auch in diesem Falle mit der Möglichkeit zu rechnen, daß diese beiden Kanäle bei den zahlreich aufeinander folgenden Entladungen des Induktors *nacheinander* entstanden waren.

Zur Entscheidung dieser Frage wurde nun zunächst die Tourenzahl des Unterbrechers so weit erniedrigt, daß man bequem den Verlauf jeder einzelnen Entladung übersehen konnte; und hierbei zeigte sich nun fast jedesmal, wenn man den Apparat — auch nachdem die Platte bereits durchschlagen war — ruhig weiter arbeiten ließ, daß gleich nach dieser Durchbohrung die Entladungen tatsächlich *bald durch den bereits erbohrten Kanal hindurchgingen, bald aber auch nicht, d. h. also in diesem Falle sich genau so auf der Oberfläche des Tropfens verbreiteten als ob die Durchbohrung überhaupt noch nicht vorhanden war.*

Schon hierdurch war offenbar nicht bloß der Beweis geliefert, daß das Glas tatsächlich die Fähigkeit besitzt, einen derartigen, durch eine einzelne nicht zu starke Entladung eines Induktors durch dasselbe hindurch gebohrten Kanal *von selbst* wieder zu verschließen, sondern es war dadurch ferner auch die Möglichkeit nahe gelegt, die Platte hierbei von derselben Stelle aus nacheinander mehrere Male nach verschiedenen Richtungen hin zu durchschlagen.

Durch mehrfache Wiederholung des Versuches wurde denn auch alsbald die Richtigkeit dieses letzteren Schlusses erwiesen; denn es gelang nun tatsächlich auch bei einem einzigen fortlaufenden Versuche mit diesen ganz langsam aufeinander folgenden Entladungen, von dem Grunde derselben Stichöffnung aus zwei verschiedene Kanäle durch die Platte zu bohren — und zwar ließ sich jetzt die zeitliche Aufeinanderfolge der beiden Durchbohrungen direkt durch die Beobachtung feststellen. In der Mehrzahl der Versuche wurde hierbei allerdings der alte Kanal, nachdem er sich, wie oben beschrieben, zeitweilig von selbst wieder verschlossen hatte, doch aufs neue wieder aufgebrochen, bis er schließlich so weit aufriß, daß er überhaupt nicht mehr zuging. Etwas häufiger trat indessen die gewünschte doppelte Durchbohrung ein, wenn man den Strom des Induktors, nachdem der erste Kanal mit einem jener langsamen Einzelfunken gebohrt war, unterbrach, dann den Unterbrecher auf hohe Tourenzahl — 20—30 pro Sekunde — einstellte und jetzt aufs neue einschaltete. Ja, bei einem dieser Versuche entstanden bei dieser zweiten Einschaltung des Induktors statt des gewünschten *einen* neuen Kanales sogar deren *zwei*, so daß also schließlich hierbei im ganzen *drei* Durchbohrungen entstanden waren, die von demselben Punkte der einen Oberfläche der 17 mm dicken Platte aus nach verschiedenen Richtungen hin durch dieselbe hindurch gingen.

Es dürfte wohl keinem Zweifel unterliegen, daß diese automatische Verschließung eines solchen durch das Glas hindurch gebohrten Kanales lediglich auf eine mechanische Spannung des Materiales zurückzuführen ist; und hiermit steht es denn auch im Einklang, daß sich z. B. bei Hartgummiplatten trotz sehr zahlreicher Versuche niemals eine solche doppelte

Durchbohrung gezeigt hat, und daß dabei auch ebensowenig jene automatische Verschließung eines einmal entstandenen Kanales festgestellt werden konnte. Der letztere erweiterte sich vielmehr bei den daraufhin angestellten Versuchen mit langsamen Einzelfunken von Schlag zu Schlag immer mehr — und zwar hier augenscheinlich durch ein weiteres *Ausbrennen*, während beim Glase, wie wir oben gesehen haben, diese Erweiterung stets durch ein weiteres *Aufspringen* zu stande kam.

Von den sonstigen bei dieser Gelegenheit noch angestellten Versuchen möge nur noch der erwähnt werden, daß die Durchschlagung einer dielektrischen Platte nach dieser Methode auch dann stattfindet, wenn der Nadelstich direkt in der Platte selbst — also ohne Tropfen — angebracht wird; und zwar haben wir zu diesen Versuchen sowohl Platten aus Weichgummi wie auch eigens dazu präparierte aus Hartgummi angewandt, wobei uns die oben genannte Fabrik in der bereitwilligsten Weise unterstützte. Bei dem letzteren Material wurde nämlich für diesen Versuch auf eine unversehrte 11,8 mm dicke und 40/40 cm große Platte eine ebenso große 1,7 mm dicke aufvulkanisiert, durch welche vorher in ihrer Mitte ein Loch gestochen war, dessen Durchmesser sich bei dem Aufvulkanisieren auf 2 mm erweitert hatte. Die Größe dieses Loches ist wohl daran Schuld, daß zur Durchbohrung der darunter liegenden 11,8 mm dicken Hartgummischicht von dieser Stelle aus nahezu 40 cm Funkenlänge nötig waren; denn als man, nach Verschluß dieser Öffnung in 6—7 cm Abstand davon Tropfen der oben beschriebenen Harzmischung auf die Platte brachte, ließ sich die letztere nach Anbringung des feinen Nadelstiches in den Tropfen — trotz ihrer nur 1,7 mm größeren Dicke — jetzt in mehreren Versuchen regelmäßig mit 30 cm Funkenlänge durchbohren.

Wurden dagegen auf eine solche vorher mehrfach durchstochene Hartgummiplatte von 1 mm Dicke und 40/40 cm Größe beiderseits zwei unversehrte Platten von derselben Dicke und Größe aufvulkanisiert, so gelang es nicht, diese insgesamt nur 3 mm dicke und dabei im Innern sogar noch durchlöchernte Platte mit 30 cm langen Funken zu durchschlagen, auch wenn die Elektroden beiderseits den inneren Stichöffnungen genau gegenüber gestellt wurden. Auch Glasplatten, in denen sich Luftblasen

befanden, wurden deswegen nicht leichter durchschlagen als homogene von derselben Dicke; ja als bei der mehrfach erwähnten 17 mm dicken Platte die Stichöffnung im Harztropfen möglichst genau über einer größeren, in der Platte befindlichen Luftblase angebracht wurde, ging der von dort aus gebohrte Kanal in weitem Bogen um die Blase herum, so daß also z. B. die in den Kreisen der Fabrikanten von Induktionsapparaten herrschende Furcht vor derartigen, in dem Isolationsmaterialie ihrer Apparate eingeschlossenen Luftblasen gänzlich unbegründet ist. Dieselben sind vielmehr nur dann gefährlich, wenn sie zu frei an der Oberfläche liegenden Vertiefungen führen können.

Hiermit aber kommen wir nun schließlich noch auf die theoretische und praktische *Bedeutung* der in dieser Abhandlung beschriebenen Versuche und zwar soll die letztere, obgleich sie die bei weitem überwiegende zu sein scheint, hier doch nur ganz kurz angedeutet werden. Dieselbe besteht nämlich nach unserem Dafürhalten vor allem in folgenden fünf Punkten:

1. ist mit der beschriebenen elektrischen Durchhohrungsmethode ein einfacher und wirksamer Demonstrationsversuch gegeben;

2. hat man dadurch ein einfaches Mittel, um eine Glasplatte oder dergleichen an ganz bestimmter Stelle zu durchhohren;

3. ergibt sich aus diesen Versuchen für die Fabrikanten von Isolationsmaterialien die Nutzanwendung, daß sie jede Bearbeitung der letzteren, durch welche oberflächliche Risse oder gar Stiche entstehen können, auf das peinlichste zu vermeiden haben, da hierdurch die Durchschlagsgefahr dieser Stoffe in einer bisher ungeahnten Weise gesteigert wird;

4. gilt dieselbe Warnung auch für die *Benutzer* derartiger Materialien, also vor allem auch für die Fabrikanten von Induktionsapparaten, und zwar haben diese ihrerseits außer der unter 3. gegebenen Warnung vor allem auch darauf zu sehen, daß sie auf die Hartgummirohre, welche die primäre und die sekundäre Spule jener Instrumente voneinander isolieren, nicht ein Material auftragen, welches Risse und Sprünge bekommen kann, da auch hierdurch ein an sich fehlerfreies Rohr sehr leicht durchschlagen werden kann. Es ist wohl sicher, daß die schon so häufig vorgekommene Durchschlagung jener Rohre, die

bei der großen Dicke derselben vollkommen rätselhaft erschien, auf die Nichtbeachtung eines Teiles dieser Vorschriften zurückzuführen ist;

5. läßt sich aus diesen Versuchen ein einfaches und doch ziemlich exaktes Verfahren ableiten, *wonach man die Durchschlagsfestigkeit verschiedener Isolationsmaterialien zahlenmäßig miteinander vergleichen kann.* Der eine von uns (Walter), der dieses Verfahren ausgebildet hat, wird dasselbe an anderer Stelle veröffentlichen. Hier sei von den Messungsergebnissen desselben nur so viel erwähnt, daß von vielen untersuchten Glassorten eine stark *bleihaltige* die kleinste Durchschlagsfestigkeit zeigte und daß ferner die des reinen Hartgummis erheblich größer war als die des Glases. Andererseits wechselte aber auch die Durchschlagsfestigkeit des ersteren für verschiedene bisher untersuchte Proben dieses Materiales noch ganz erheblich — und zwar bis zu 100 Proz. —, so daß sich also hierdurch auch besonders für die Fabrikation hoch isolierender Substanzen eine Reihe vollständig neuer Gesichtspunkte eröffnen dürften. Tatsächlich war ja auch eine zuverlässige Methode, die Isolationsfestigkeit derartiger Stoffe zahlenmäßig anzugeben, bisher nicht vorhanden.

Was aber endlich die *theoretische* Bedeutung der in dieser Abhandlung beschriebenen Versuche angeht, so mag in dieser Hinsicht zunächst noch einmal darauf hingewiesen werden, daß durch dieselben jedenfalls so viel mit Sicherheit festgestellt ist, daß wir es hier mit einer bisher noch nicht bekannten *Konzentration der elektrischen Entladung auf ganz bestimmte Linien* zu tun haben; und es fragt sich also nun, wodurch diese Konzentration veranlaßt sein mag. Die wahrscheinlichste Hypothese scheint uns hier nun die zu sein, daß *die sich bei den Vorentladungen einer solchen Entladung bildenden Ionen in den in Betracht kommenden Linien nicht so schnell nach allen Richtungen hin entweichen können wie anderswo*, und zwar dürfte speziell für die Randlinie des Tropfens hierbei auch noch der Umstand hinzukommen, daß auch der Tropfen selbst sich bei diesen Entladungen sehr stark ladet und daher einen Teil der Ionen festhält. Diese starke Ladung des Tropfens wird nämlich einesteils dadurch bewiesen, daß derselbe, wenn er aus einem festen Stoffe besteht, gleich nach dem Versuche bei An-

näherung des Fingers oder dergleichen in der Regel ein starkes Knistern hören läßt, und daß ferner ein auf einer horizontalen Platte angebrachter Tropfen einer dielektrischen *Flüssigkeit* bei diesen Versuchen von der in seiner Nähe aufgesetzten Elektrode aus ziemlich heftig fortgeschleudert wird, wobei zugleich quer zu dem durch die Elektrode gehenden Durchmesser des Tropfens eine mit der Entfernung von ersterer parabelartig anwachsende Verbreiterung der Flüssigkeit stattfindet. Diese letztere Erscheinung endlich dürfte ihrerseits wieder so zu verstehen sein, daß die hierbei in Bewegung gesetzten Flüssigkeitsteilchen nicht bloß von der auf die Platte aufgesetzten Elektrode aus, sondern zugleich auch von seiten ihrer sämtlichen Nachbarteilchen eine elektrische Abstoßung erfahren.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, April 1903.

(Eingegangen 8. April 1903.)

7. Bemerkung über die elektromagnetischen Rotationsapparate; von E. Dorn.

Obwohl über die elektromagnetischen Rotationsapparate eine ziemlich umfangreiche Literatur vorhanden ist, begegnet man doch mitunter unhaltbaren Auffassungen über das Zustandekommen der Wirkung.

Im folgenden will ich — unter Voraussetzung der Faraday'schen Kraftlinientheorie — an einigen Beispielen eine Betrachtungsweise durchführen, die besonders einfach und übersichtlich erkennen läßt, zwischen welchen Teilen des Systems die zur fortdauernden Rotation führenden ponderomotorischen Kräfte auftreten.

Der Grundgedanke ist der, daß man sich die sämtlichen *Magnete* und *stromführenden Teile zu Rotationskörpern* ausgebildet denkt, deren Symmetrieachse die Drehungsachse ist.

Einzelne Apparate haben von vornherein diese Gestalt, z. B. ein Instrument aus den älteren Beständen des hiesigen Instituts, welches kurz als ein Voltaelement bezeichnet werden kann, dessen zylindrische Platten um einen Schenkel eines Magnetes rotieren können. Der Zinkzylinder trägt oben einen Bügel mit abwärts gerichteter Spitze in der Mitte; diese wird in eine kleine Vertiefung der Oberfläche des Magnetschenkels gesetzt. Die Kupferplatte bildet einen Hohlzylinder mit Boden; oben ist wieder ein Bügel mit Spitze nach unten angebracht, welche in einen auf dem Bügel der Zinkplatte sitzenden Quecksilbernäpf taucht. Mit Hilfe eines Häkchens auf der Oberseite des Bügels kann der Kupferzylinder an einem Faden aufgehängt und so drehbar gemacht werden.

Verwendet man nur wenig Säure, so ist der innere Kupferzylinder stromlos, der äußere wird von dem Strom aufwärts, der Zinkzylinder abwärts durchflossen.

In einem durch den oberen Teil des Apparates gelegten Horizontalschnitt verlaufen die Kraftlinien des Stromes als Kreise im Uhrzeigersinn lediglich zwischen dem Zink- und dem äußeren Kupferzylinder, denn im Innern eines (hinreichend

langen) parallel der Achse durchströmten Kreiszylinders verschwindet die magnetische Kraft; außerhalb des Kupferzylinders heben sich die Wirkungen des im Kupfer empor- und im Zink absteigenden Stromes auf.

Ist der andere Magnetschenkel weit entfernt (oder der Magnet stabförmig), so gehen die Kraftlinien radial, z. B. wenn der Nordpol benutzt wird, nach außen, und durch Zusammenwirken mit den Stromkraftlinien entsteht das *eigentümliche*, Fig. 1 dargestellte, *zwischen den Zylindern spiralförmige Magnetfeld*.

Nimmt man mit Faraday eine Spannung längs der Kraftlinien und einen Druck senkrecht zu denselben an, so erkennt

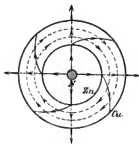


Fig. 1.

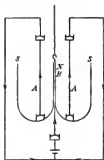


Fig. 2.

man, daß (und zwar infolge *beider* Wirkungen) der Zinkzylinder mit dem Uhrzeiger, der Kupferzylinder gegen denselben rotiert.

Die ponderomotorischen Kräfte wirken hiernach *zwischen den beiden Zylindern*, der Magnet erleidet keine ponderomotorische Wirkung.

In anderen Fällen bedarf es nur einer geringfügigen Abänderung, um den Apparat in ein System von Rotationskörpern zu verwandeln.

So braucht man bei der von W. König¹⁾ beschriebenen Vorrichtung nur die Zahl der Magnete zu vervielfältigen und die äußere Zuleitung durch einen Zylinder zu ersetzen, um das im Schnitt schematisch Fig. 2 dargestellte Bild zu erhalten, in welchem die Magnete und der Teil A drehbar sind.

Das Magnetfeld in einer etwa durch B gelegten Horizontal-

1) W. König, Wied. Ann. **60**, p. 519. 1897.

ebene besitzt die aus Fig. 3 ersichtliche Gestalt; man erkennt wieder die spiralförmigen Kraftlinien zwischen dem zylindrischen Außenschenkel des Magnetes und dem inneren Stromzylinder. Diese Teile sind es nun in der Tat, welche eine entgegengesetzt gerichtete Rotationsbewegung ausführen¹⁾, zwischen ihnen wirken die ponderomotorischen Kräfte.

Um nun auch die übrigen Apparate auf die Form von coaxialen Rotationskörpern zu bringen, denke man sich zunächst sämtliche Leitertheile unter Festhaltung ihrer Endpunkte so gebogen, daß sie sich aus Stücken \perp und \parallel zur Drehachse zusammensetzen²⁾, und dann die ganze Vorrichtung um die Rotationsachse gedreht.

Man übersieht leicht, daß man durch die Substitution der so erhaltenen Rotationskörper in jedem Augenblick den Mittel-

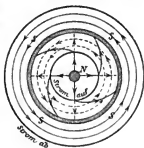


Fig. 3.

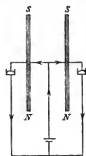


Fig. 4.

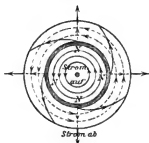


Fig. 5.

wert der Drehungsmomente zur Wirkung bringt, welche bei der ursprünglichen Form bei einem Umlauf auftreten.

Hiernach läßt sich die in Wiedemanns Lehre von der Elektrizität, letzte Auflage, Bd. III, p. 187 abgebildete Vorrichtung behandeln, welche man öfter als Beleg für die Rotation eines Magnetpoles um einen geradlinigen Strom angeführt findet. Fig. 4 stellt wieder einen Schnitt durch die Rotations-

1) Die spärlichen, nach außen tretenden Kraftlinien ließen sich auch leicht berücksichtigen.

2) Hierdurch werden die Drehungsmomente nicht geändert.

achse dar. Sei der Einfachheit wegen der substituierte Hohlmagnet so lang und eng, daß durch den Hohlraum nicht Kraftlinien verlaufen, so entsprechen die in Betracht kommenden Teile des Magnetfeldes der Fig. 5. Man ersieht, daß die ponderomotorischen Kräfte zwischen dem Magnet und dem stromdurchflossenen Zylinder wirken, also dementsprechend im ursprünglichen Apparat zwischen dem Magnet und der äußeren Zuleitung zum Quecksilbernäpf.

Halle, 31. März 1903.

(Eingegangen 1. April 1903.)

**8. Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der
Salzlösungen von der Konzentration;
von J. Wallot.**

(Auszug aus der Münchner Inaugural-Dissertation.)

Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der Salzlösungen von der Konzentration wurde bisher immer von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet: entweder stellte man die beobachteten Werte rein empirisch durch Interpolationsformeln dar, oder man untersuchte die Gültigkeit der sogenannten Mischungsregeln, die ja bekanntlich Beziehungen zwischen Brechungsexponent, Dichte und Konzentration sind. Ich habe mir im folgenden die Aufgabe gestellt, diese beiden Betrachtungsweisen zu vereinigen, also zu untersuchen einerseits, wie weit den Konstanten der empirischen Interpolationsformeln eine physikalische Bedeutung zuzusprechen ist, und andererseits, zu welchen Interpolationsformeln die in theoretischer Hinsicht so interessanten Mischungsregeln führen.

Zunächst teile ich die von mir durchweg gebrauchten Bezeichnungen mit. Ich verstehe unter p die Menge Salz, die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthalten ist; demnach ist $\varphi = \frac{100 p}{100 - p}$ die Menge Salz, die in 100 Gewichtsteilen des Lösungsmittels enthalten ist. n sei der Brechungsexponent der Lösung, n_w der des Lösungsmittels, n_s der des festen Salzes, d , d_w und d_s die entsprechenden Dichten, v , v_w und v_s die entsprechenden Volumina und a , b , k und D positive Konstanten.

Die älteste Interpolationsformel für die Brechungsexponenten in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration ist die Parabelgleichung von Beer und Kremers¹⁾:

$$(1) \quad n = n_w + a \cdot \varphi - b \cdot \varphi^2.$$

1) A. Beer u. P. Kremers, Pogg. Ann. 101. p. 133. 1857.
Annalen der Physik. IV. Folge. 11.

Hier ist sofort klar, daß mit Ausnahme von n_w keiner der Konstanten eine bestimmte Bedeutung zukommt. Insbesondere entspricht die Gleichung für $p = \infty$ nicht der Erfahrung.

Auch die Gleichungen dritten Grades von Hofmann¹⁾ und Börner²⁾ können nur als rein empirische Interpolationsformeln angesehen werden.

Erst Walter³⁾ hat ein Gesetz aufgestellt, bei dem die Konstanten physikalisch gedeutet werden können. Er schloß sowohl aus den Zahlen anderer Beobachter, als auch aus seinen eigenen auf eine Beziehung:

$$(2) \quad n = n_w + k \cdot p,$$

und hier kann wenigstens formell der Konstanten k , die von Walter als das Refraktionsinkrement bezeichnet wird, die Bedeutung

$$k = \frac{n_s - n_w}{100}$$

beigelegt werden. Freilich auch *nur* formell; denn, wie die nachfolgende Übersicht zeigt, die mit Hülfe der von Walter selbst gegebenen Mittelwerte zusammengestellt ist, kann von einer tatsächlichen Übereinstimmung keine Rede sein.

Tabelle 1.

Salz	Nach Landolt u. Börnstein		$\frac{n_s - n_w}{100}$	k nach Walter
	n_s	n_w		
KCl	1,487	1,332	0,00155	0,00137
NaCl	1,544	1,332	0,00212	0,00177
NH ₄ Cl	1,642	1,332	0,00310	0,00191

Die Waltersche Beziehung stellt übrigens auch rein empirisch die Beobachtungen nur annähernd dar. Sobald man genauere Messungen heranzieht, zeigen sich bedeutende Ab-

1) K. Hofmann, Pogg. Ann. 133. p. 575. 1868.

2) Börner, Inaug.-Diss., Marburg 1869.

3) B. Walter, Wied. Ann. 38. p. 107. 1889.

weichungen. Ich habe z. B. mit Zahlen von Schütt¹⁾ nach der Methode der kleinsten Quadrate die folgende Gleichung bekommen:

$$n = 1,332975 + 1787,69 \cdot 10^{-6} \cdot p,$$

und die hiernach berechneten Werte weichen, wie die folgende Tabelle zeigt, von den unmittelbar beobachteten, die nach Schütt auf $\pm 15 \cdot 10^{-6}$ genau sind, ganz bedeutend ab.

Tabelle 2.

Nr.	p	n _D bei 18,07° bezogen auf Luft		Diff. · 10 ⁶
		berechnet	beobachtet ²⁾	
1	24,9886	1,377647	1,377894	- 247
2	19,9908	1,368711	1,368621	+ 90
3	14,9921	1,359776	1,359586	+ 190
4	9,9944	1,350842	1,350684	+ 158
5	4,9970	1,341908	1,341914	- 6
6	0	1,332975	1,333158	- 183

Walter selbst hat sich in der betreffenden Arbeit auf Beobachtungen von Brechungsexponenten gestützt, die sich zum Teil voneinander um sechs Einheiten der vierten Dezimale unterscheiden. Auch Bremer³⁾, der in der neuesten Zeit das Waltersche Gesetz bestätigt zu haben glaubt, benutzt Brechungsexponenten, die wohl kann auf eine Einheit der vierten Dezimale genau sind.

Auf einem ganz anderen Gebiet, auf dem der Kompressibilität, haben nun Röntgen und Schneider⁴⁾ eine *Hyperbelgleichung* benutzt, durch die sie die Kompressibilität

1) F. Schütt, Zeitschr. f. physik. Chem. 5. p. 349. 1890.

2) Die Umrechnung geschah nach p. 352 der Schütt'schen Arbeit.

3) G. J. W. Bremer, Arch. Néerl. (2) 5. (Jubelh. f. H. A. Lorentz p. 202. 1901.

4) W. C. Röntgen u. J. Schneider, Wied. Ann. 29. p. 193. 1886; 31. p. 1003. 1887.

der Kochsalzlösungen in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration recht gut darstellen konnten. Es liegt nahe, zu untersuchen, ob man eine solche Formel vielleicht auch auf dem Gebiete des Brechungsexponenten mit Vorteil verwenden kann. Die übersichtlichste Gestalt, die man der Gleichung geben kann, ist wohl die folgende:

$$(3) \quad \frac{n_s - n_\infty}{n - n_\infty} = \frac{D}{p}.$$

Für die beiden Konstanten n_s und n_∞ ergibt sich hier die physikalische Bedeutung unabhängig von theoretischen Voraussetzungen nur aus der Form der Gleichung, sodaß man also, wenn sie streng richtig wäre, den Brechungsexponenten des festen Salzes aus den Brechungsexponenten der Lösung extrapolieren könnte. Von der Konstante D dagegen weiß man vorläufig noch nichts weiter, als daß sie die Konzentration ist, zu der der Brechungsexponent $n = (n_s + n_\infty)/2$ gehört.

Bis zu welcher Annäherung die Brechungsexponenten durch (3) wiedergegeben werden, lassen die folgenden beiden Tabellen erkennen, denen die schon benutzten Messungen von Schütt und außerdem eine Reihe von Messungen von der Willigen¹⁾ zu Grunde gelegt sind. Die unter „ n_D berechnet“ stehenden Werte wurden folgendermaßen gefunden: Zuerst wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate aus *allen* Werten (auch aus den für $p = 0$ geltenden) die Konstanten n_s , n_∞ und D der Gleichung (3) berechnet. Dann ergaben sich die Werte „ n_D berechnet“ aus der mit (3) identischen Formel:

$$(3a) \quad n - 1 = \frac{(n_s - 1) \cdot D + (n_\infty - 1) \cdot p}{D + p}.$$

In den letzten Vertikalreihen der Tabellen stehen die Differenzen „ n berechnet — n beobachtet“.

1) V. S. M. van der Willigen, Arch. Mus. Teyl. 2. p. 222. 1869. — Die Zahlen sind bei ganz verschiedenen Temperaturen gefunden und wurden erst nachträglich von van der Willigen auf 26,3° umgerechnet; da die Temperaturkoeffizienten nicht sehr genau bekannt waren, und da van der Willigen die Konzentration nur auf zwei Dezimalstellen angibt, so sind die Zahlen wohl beträchtlich weniger genau als die von Schütt.

Tabelle 3.

Kochsalzlösungen nach Schütt.

Nr.	p	n_D bei 18,07° bezogen auf Luft		Diff. 10 ⁴
		berechnet	beobachtet	
—	∞	1,534888	1,544180 ¹⁾	— 9242
1	33,3131	1,377870	1,377894	— 24
2	24,9848	1,368665	1,368621	+ 44
3	17,6361	1,359598	1,359586	+ 12
4	11,1041	1,350666	1,350684	— 18
5	5,2598	1,341866	1,341914	— 48
6	0	1,333195	1,333158	+ 37

$$D = 117,086. \quad 100 \cdot \frac{d_s}{d_w} = 215,239.^2)$$

Tabelle 4.

Salmiaklösungen nach van der Willigen.

Nr.	p	p	n_D bei 26,3° bezogen auf Luft		Diff. 10 ⁴
			berechnet	beobachtet	
—	100,00	∞	1,51281	1,64220 ³⁾	— 12939
1	24,83	33,082	1,37942	1,37947	— 5
2	19,68	24,502	1,36980	1,36980	0
3	19,58	24,347	1,36961	1,36948	+ 13
4	14,51	16,973	1,36007	1,36015	— 8
5	11,79	13,866	1,35492	1,35495	— 3
6	9,72	10,766	1,35099	1,35098	+ 1
7	0	0	1,33238	1,33237 ⁴⁾	+ 1

$$D = 93,308. \quad 100 \cdot \frac{d_s}{d_w} = 152,490.^5)$$

1) A. Haagen, Pogg. Ann. 131. p. 117. 1867. — Die Zahl gilt genau genommen für 20°.

2) $d_s = 2,15000$, $d_w = 0,99866$ nach Schütt, l. c.

3) Nach Graillich: Landolt u. Börnstein, physik.-chem. Tab. 2. Aufl., Tab. 153.

4) Nach B. Walter, Wied. Ann. 46. p. 424. 1892.

5) $d_s = 1,52000$, $d_w = 0,99673$ nach Landolt u. Börnstein, Tab. 13.

Die Brechungsexponenten der Lösungen stimmen, wie man sieht, ziemlich gut überein, jedenfalls besser, als die nach dem Walterschen Gesetze berechneten. Daß bei NH_4Cl etwas größere Differenzen auftreten, das hat zwei Gründe: erstens sind die Zahlen von van der Willigen an sich weniger genau, und zweitens gehört die Lösung Nr. 3, die offenbar die Hauptschuld trägt, einer ganz anderen Versuchsreihe von der Willigen an.¹⁾

Hinsichtlich der physikalischen Bedeutung ihrer Konstanten scheint sich die Hyperbelgleichung (3) nur beim NaCl einigermaßen der Erfahrung anzuschließen (vgl. die Tabellen 3 und 4). n_w allerdings zeigt einfach deshalb, weil die unmittelbar beobachteten Brechungsexponenten des Wassers bei der Konstantenbestimmung mit benutzt wurden, nur geringe Abweichungen, n_s aber, d. h. der zu $p = \infty$ gehörende Brechungsexponent, stimmt bei NH_4Cl noch ungefähr ebenso schlecht wie beim Walterschen Gesetz.

Wie steht es nun mit der Bedeutung der Konstanten D ? Röntgen und Schneider haben für die Kompressibilität die Hyperbelgleichung (3) aus einer den Mischungsregeln der Optik verwandten Beziehung abgeleitet und auf diesem Wege für D den Wert $100 \cdot d_s/d_w$ gefunden.

Überträgt man diese Entwicklungen auf die Brechungsexponenten, so erkennt man bald, daß die Hyperbelgleichung und auch das Waltersche Gesetz durch spezielle Annahmen aus der allgemeinen Mischungsregel von Arago und Biot hergeleitet werden können.

Dies soll jetzt nachgewiesen werden.

Die allgemeine Mischungsregel hat die Gestalt:

$$(4) \quad \frac{N}{d} \cdot 100 = \frac{N_s}{d_s} \cdot p + \frac{N_w}{d_w} \cdot (100 - p)$$

oder

$$(5) \quad N \cdot v = N_s \cdot v_s + N_w \cdot v_w,$$

wobei im besonderen

1) Vgl. l. c. p. 231.

oder $N = n - 1$ (nach Beer und Landolt)

oder $N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ (nach Lorentz und Lorenz)

oder $N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + x}$ (nach Ketteler)

zu setzen ist. Unter den Volumina v_s und v_w sind immer die der unvereinigten Substanzen zu verstehen.

Der Zusammenhang der Mischungsregeln mit den bisher besprochenen Interpolationsformeln ergibt sich nun am einfachsten, wenn man statt der Dichte d die Kontraktion c einführt. Ich definiere sie mit Pulfrich¹⁾ durch die Gleichung

$$(6) \quad c = \frac{d - d_s}{d},$$

wobei

$$(7) \quad d_v = \frac{\text{Masse der Lösung}}{v_s + v_w}$$

sein soll. Es ist also auch

$$c = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{v_s + v_w}}{\frac{1}{v}}$$

oder

$$v = (v_s + v_w)(1 - c).$$

Daher wird (5) zu

$$N(v_s + v_w)(1 - c) = N_s \cdot v_s + N_w \cdot v_w.$$

Nun ist

$$v = 100 \cdot \frac{v_s d_s}{v_w d_w},$$

also

$$\frac{v_s}{v_w} = \frac{v}{100} \cdot \frac{d_w}{d_s} = \frac{v}{D},$$

wenn

$$(8) \quad D = 100 \cdot \frac{d_s}{d_w}$$

gesetzt wird. Man erhält daher

$$N(v + D)(1 - c) = N_s \cdot v + N_w \cdot D$$

und hieraus folgt:

$$(9) \quad \frac{N_s - N(1 - c)}{N(1 - c) - N_w} = \frac{D}{v}.$$

1) C. Pulfrich, Zeitschr. f. physik. Chem. 4. p. 561. 1889.

Diese Gleichung, die als bloße Umformung mit der allgemeinen Mischungsregel identisch ist, deckt den Zusammenhang zwischen dieser und den Interpolationsformeln auf. Nimmt man für N den Wert von Beer und Landolt und vernachlässigt man die Kontraktion, so erhält man — und dies ist die Entwicklung von Röntgen und Schneider¹⁾ — aus (9) die Hyperbelgleichung (3), setzt man außerdem noch $D=100$, so ergibt sich die Waltersche Beziehung.²⁾ Man darf sich demnach nicht darüber wundern, daß die Konstante D bei der empirischen Bestimmung der Tabellen 3 und 4 einen sehr stark von $100 \cdot d_s/d_w$ verschiedenen Wert bekommt; denn erstens stimmt das der Theorie zu Grunde gelegte Landoltsche Gesetz nicht genau und zweitens (was wichtiger ist) darf die Kontraktion (oder bei den Salmiaklösungen die Dilatation) nicht vernachlässigt werden.

Führt man

$$N(1 - c) = N \cdot \frac{d_s}{d} = N_w$$

ein, sodass

$$\frac{N_s - N_w}{N_s - N_w} = \frac{D}{p}$$

ist, und nimmt man an, der Quotient N/d sei konstant, so kann man den Inhalt der Gleichung (9) auch so aussprechen: Wäre es möglich, auf irgend eine Weise die bei der Auflösung eines Salzes auftretende Kontraktion zu verhindern, so könnte man das sich so ergebende Brechungsvermögen N_w in seiner Abhängigkeit von der Konzentration p durch eine Hyperbelgleichung darstellen.

1) Röntgen und Schneider gingen allerdings von einer Gleichung aus, die, auf die Brechungsexponenten übertragen, folgendermaßen lautet:

$$n \cdot v = n_s \cdot v_s + n_w \cdot v_w.$$

Diese Gleichung ist aber, wenn man die Kontraktion vernachlässigt, mit der Landoltschen Regel identisch. — In der Bezeichnungsweise von Röntgen und Schneider ist die Konstante $D = a \cdot A \cdot 10^{-4}$, wo a eine andere Konstante und A das Molekulargewicht des betreffenden Salzes ist.

2) Man erkennt dies, indem man p durch p ersetzt, oder einfacher, indem man bedenkt, dass D die Konzentration ist, für die

$$n = \frac{n_s + n_w}{2}$$

wird.

Ich will mich nun im folgenden auf die Landoltsche Form der Mischungsregel beschränken und untersuchen, ob man die so spezialisierte Gleichung (9) als Interpolationsformel benutzen kann. Soviel steht von vornherein fest, daß man von dieser Gleichung, da sie komplizierter ist als die Hyperbelgleichung, eine größere Genauigkeit erwarten kann. Es fragt sich nur, wie man die dritte Variable c am besten aus ihr entfernt. c ist eine Funktion des Gehaltes p ; man könnte diese Funktion ermitteln und so c aus (9) eliminieren. Nun ist aber die Kontraktion sowohl für das reine Lösungsmittel, für das $p = 0$ ist, als auch für das feste Salz, für das $p = \infty$ ist, gleich Null, und die einfachste rationale Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, hat die Gestalt:

$$c = \frac{k_1 \cdot p}{1 + k_2 \cdot p^2}.$$

Zwischen n und p bekäme man also mindestens eine Gleichung vierten Grades, und daß man damit weiter käme als mit Gleichungen dritten und zweiten Grades, das bedarf keines Beweises.

Ich schlage daher einen anderen Weg ein: Ich setze

$$(10) \quad v = 1 + (n - 1)(1 - c),$$

so daß das Landoltsche Gesetz die folgende Gestalt bekommt:

$$(11) \quad \frac{n_s - v}{v - n_w} = \frac{D}{p},$$

berechne zu jedem n das v und stelle die v durch (11) dar.

Dies Verfahren hat den Vorzug einer gewissen Anschaulichkeit. Denn die Brechungsexponenten v sind ja (immer unter der Voraussetzung, daß $(n-1)/d$ konstant bleibt) geradezu die Brechungsexponenten, die herauskämen, wenn man durch irgend ein Mittel die Kontraktion verhindern könnte, und es lohnt sich immerhin zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit man diese v durch die Hyperbelgleichung darstellen kann.

Meinen Berechnungen habe ich nur die Brechungsexponenten der Kochsalzlösungen zu Grunde gelegt, da die Brechungsexponenten der Salmiaklösungen doch wohl nicht genau genug untersucht sind. Aus einer theoretischen Ableitung des Landoltschen Gesetzes, die ich an anderer Stelle¹⁾ gebe, folgt, daß nun die absoluten Brechungsexponenten benutzt werden

1) p. 605 f.

müssen. Es wurde immer zuerst $1 - c$ bestimmt, und zwar nach der Gleichung

$$1 - c = \frac{d, d_w (100 + p)}{d (100 d_s + p d_w)},$$

die aus (6) und (7) folgt. Dann wurden die nach (10) berechneten Größen v nach der Methode der kleinsten Quadrate durch (11) dargestellt. Dabei wurden wieder alle Werte 1 bis 6 benutzt. d_s setzte ich gleich 2,15000; die Dichten der Lösungen sind von Schütt selbst gemessen. Es ergab sich:

Tabelle 5.

Nr.	p	$d^{18,07^\circ}$ 4°	n_D	v_D bei 18,07°		Diff. · 10 ⁶
			bei 18,07°	ber.	beob.	
—	∞	2,15000	1,544552 ¹⁾	1,564553	1,544552	+20001
1	33,3131	1,18911	1,378270	1,366773	1,366765	+ 8
2	24,9848	1,14821	1,368995	1,359390	1,359409	— 19
3	17,6361	1,10914	1,359957	1,352403	1,352394	+ 9
4	11,1041	1,07124	1,351053	1,345780	1,345774	+ 6
5	5,2598	1,03454	1,342280	1,339494	1,339493	+ 1
6	0	0,99866	1,333522	1,333519	1,333522	— 3

$$D = 198,132. \quad 100 \cdot \frac{d_s}{d_w} = 215,289.$$

Die Brechungsexponenten v lassen sich also nach der Hyperbelgleichung ungefähr mit derselben Genauigkeit berechnen, die von Schütt für seine Brechungsexponenten n angegeben wird ($\pm 15 \cdot 10^{-6}$).²⁾

Schütt hat die Brechungsexponenten auch noch für eine ganze Reihe von Konzentrationen zwischen $p = 5$ und $p = 0$ gemessen, und diese Werte sind alle größer als die nach der Hyperbelgleichung berechneten. Die Abweichungen betragen im schlimmsten Falle drei Einheiten der fünften Dezimale.

1) 1,544130 · 1,000273.

2) Was die Genauigkeit der Konstanten betrifft, so sei bemerkt, daß bei der konzentriertesten der Lösungen einer Änderung von n , um $7 \cdot 10^{-6}$ oder einer Änderung von D um $7 \cdot 10^{-3}$ eine Änderung von v um ungefähr 10^{-6} entspricht.

Wahrscheinlich hängt dies mit den Fehlern der Dichtebestimmungen zusammen.¹⁾ Das ist ja überhaupt ein Mangel des hier beschriebenen Verfahrens, daß zu den Fehlern des Brechungsexponenten die Fehler der Dichten hinzukommen. Eine Vergrößerung der Dichte um $3 \cdot 10^{-5}$ zieht z. B. eine Verkleinerung des aus ν berechneten Brechungsexponenten n um etwa $1 \cdot 10^{-5}$ nach sich. Will man also zu irgend einer vorgegebenen Konzentration den Brechungsexponenten n finden und berechnet man dabei die Kontraktion z. B. nach einer von Schütt²⁾ aufgestellten Interpolationsformel für die Dichte, so können die Resultate allein durch die Bestimmung der Kontraktion um zwei Einheiten der fünften Dezimale falsch werden, denn die Schütt'sche Formel für die Dichte zeigt unter anderem eine Abweichung von sechs Einheiten der fünften Dezimale. Für solche praktische Zwecke ist es daher besser, die Kontraktion schon bei der Konstantenbestimmung nur nach der Interpolationsformel für die Dichte und nicht aus den direkt gemessenen Dichten zu berechnen. Dann fällt, besonders bei Lösungen, die nahezu dieselbe Konzentration haben wie die Schütt'schen Lösungen, der Einfluß eines Fehlers in der Bestimmung der Kontraktion fast ganz weg. Auch die Differenzen der Tab. 5 werden dabei nach oberflächlicher Schätzung eher kleiner als größer werden.

Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Exponenten ν an sich aber kann man gewiß als eine gute bezeichnen. Das ist auch nicht wunderbar, denn ich habe ja zwei Konstanten, nämlich D und n_s (n_s kommt nicht in Betracht) ohne Rücksicht auf ihre physikalische Bedeutung gerade so bestimmt, daß die Abweichungen möglichst gering werden mußten. Auch Schütt selbst hat die Brechungsexponenten seiner Lösungen berechnet und zwar nach der Landolt'schen Mischungsregel in ihrer ursprünglichen Gestalt(4). Er entnahm dazu N_s und d_s der unmittelbaren Beobachtung; das Brechungsvermögen des festen Salzes N_s/d_s dagegen hatte er sich vorher aus dem Brechungsexponenten der 25proz. Lösung berechnet. Er bekam so in den Brechungsexponenten

1) Vgl. den letzten Absatz der p. 356 der Schütt'schen Arbeit.

2) l. c. p. 356.

eine größte Abweichung von elf Einheiten der fünften Dezimale. Das ist kaum die Genauigkeit der Hyperbelgleichung (3) (Tab. 3).

Man könnte nun aus der Tatsache, daß die extrapolierten Konstanten n_s und D mit dem unmittelbar beobachteten Brechungsexponenten des festen Steinsalzes und mit der Größe $100 \cdot d_s/d_w$ durchaus nicht übereinstimmen, weitere Schlüsse ziehen. Genau genommen wird ja durch die Tab. 5 nicht das Landoltsche Gesetz, sondern ein anderes mit zwei neuen Konstanten behaftetes Gesetz bestätigt, dessen nähere Gestalt aufzufinden durchaus keine Schwierigkeiten macht. Man könnte auf diesem Wege sogar zu einer ganzen Anzahl neuer Gesetze gelangen, da ja kein Grund vorliegt, bei der Berechnung der Tab. 5 gerade die Konstanten d_s und d_w und nicht etwa n_s und d_w oder n_s und d_s der unmittelbaren Beobachtung zu entnehmen.

Bei der Dürftigkeit des von mir benutzten Beobachtungsmaterials ist es jedoch wohl nicht angebracht, auf derartige Folgerungen näher einzugehen.

München, Physik. Inst. d. Univ.

(Eingegangen 14. März 1903.)

**9. Über die von Beer und Landolt gewählte
Form des spezifischen Brechungsvermögens;
von J. Wallot.**

Für die Abhängigkeit des Lichtbrechungsverhältnisses n einer bestimmten Substanz von ihrer Dichte d gibt es bekanntlich eine ganze Reihe von Formeln. Die einfachste rührt von Beer her: nach ihm bleibt der Quotient $R = (n - 1)/d$ bei allen Dichteänderungen der Substanz unverändert. Man bezeichnet diesen Quotienten (gerade wie die entsprechenden Ausdrücke der von andern Physikern aufgestellten Formeln) auch als das spezifische Brechungsvermögen der betreffenden Substanz. Der Quotient R ist später, und zwar zuerst von Landolt, in die Mischungsregel von Arago und Biot eingeführt worden, d. h. das Brechungsverhältnis n einer Mischung (oder Lösung) von k Substanzen, denen die Brechungsverhältnisse n_1, n_2, \dots, n_k zukommen, kann nach Landolt aus der Gleichung:

$$\frac{n - 1}{d} 100 = \frac{n_1 - 1}{d_1} p_1 + \frac{n_2 - 1}{d_2} p_2 + \dots + \frac{n_k - 1}{d_k} p_k$$

berechnet werden, wo die Größen d die Dichten und die Größen p die in 100 Gewichtsteilen der Mischung (oder Lösung) enthaltenen Mengen der Substanzen bedeuten.

Merkwürdigerweise ist nun bis jetzt meines Wissens noch keine vollständig ausreichende theoretische Ableitung der Beerschen Gleichung und des Landoltschen Mischungsgesetzes veröffentlicht worden. Christiansen¹⁾ zwar hat im Jahre 1884 in einer Arbeit über die optischen Eigenschaften von fein verteilten Körpern heiläufig auf ein einfaches Prinzip aufmerksam gemacht, dem das Landoltsche Gesetz oder wie er sagt die Lehre vom Refraktionsäquivalent Ausdruck gebe; er hat dabei aber auf die mit jeder Mischung verbundene Kontraktion (oder Dilatation) gar keine Rücksicht genommen. Und Zehnder²⁾ hat dann unabhängig davon zwar sowohl das Landoltsche Gesetz als auch die Beersche Gleichung abgeleitet; seine Ab-

1) C. Christiansen, Wied. Ann. 23. p. 298. 1884.

2) L. Zehnder, Wied. Ann. 34. p. 91. 1888.

leitung des Landoltschen Gesetzes beschränkt sich aber auf den Fall, daß die Kontraktion zu vernachlässigen ist, und bei seiner Ableitung der Beerschen Gleichung macht er Annahmen über die Konstitution der Stoffe, die wie ich glaube nicht nötig sind.

Ich will nun im folgenden die beiden Gesetze auf einen sehr einfachen und ohne weiteres einleuchtenden Grundsatz zurückführen.

Ich beginne mit dem Landoltschen Gesetz. Ich denke mir eine vollständig abgeschlossene Röhre $ABCD$ mit überall

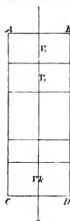


Fig. 1.

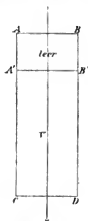


Fig. 2.

gleichem Querschnitt q (vgl. den Längsschnitt Fig. 1), durch die in der Richtung des Pfeiles ein Lichtstrahl fällt. Diese Röhre enthalte die Stoffe, die miteinander gemischt werden sollen, getrennt, und zwar sollen die einzelnen Volumina v_1, v_2, \dots, v_k , wie es in der Figur gezeichnet ist, durch Flächen, die zu dem Lichtstrahl senkrecht stehen, voneinander geschieden sein.¹⁾ Dann ist die Zeit, die das Licht zum Durchmessen der ganzen Röhre von der Fläche AB bis zu der Fläche CD braucht, gleich

$$(1) \quad \frac{1}{C} (n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_k v_k),$$

1) Ob sich diese Annahmen verwirklichen lassen, ist für die Betrachtung gleichgültig.

wo unter C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum und unter $n_1, n_2, \dots n_k$ die *absoluten* Brechungsverhältnisse der Stoffe zu verstehen sind.

Nun sollen die Stoffe gemischt werden (Fig. 2); dabei möge sich ihr Gesamtvolumen bis auf $A'B'CD = v$ verkleinern. Das absolute Brechungsverhältnis der Mischung sei n . Da der Raum $AB A'B' = v_1 + v_2 + \dots + v_k - v$ nun offenbar leer ist, so braucht das Licht zum Durchmessen der ganzen Röhre von der Fläche AB bis zu der Fläche CD jetzt die Zeit:

$$(2) \quad \frac{1}{Cq} (1 \cdot [v_1 + v_2 + \dots + v_k - v] + nv).$$

Nach dem einfachen Grundsatz nun, von dem ich vorhin gesprochen habe, sind die berechneten beiden Zeiten (1) und (2) einander gleich, d. h. für die Zeit, die das Licht zum Durchmessen der ganzen Röhre $ABCD$ braucht, ist es gleichgültig, ob die Stoffe in der Röhre getrennt oder gemischt sind. Es muß also

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_k v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k - v + nv$$

oder

$$(3) \quad (n_1 - 1)v_1 + (n_2 - 1)v_2 + \dots + (n_k - 1)v_k = (n - 1)v$$

sein, und hierin erkennt man das Landoltsche Mischungsgesetz, wenn man statt der Volumina die Dichten d und die Konzentrationen p einführt.

In dieser Ableitung des Landoltschen Gesetzes ist die Ableitung des Beerschen Gesetzes schon enthalten. Denn denkt man sich durch irgend ein Mittel die Kontraktion aufgehoben, sodaß die bereits gemischten Stoffe immer noch die ganze Röhre ausfüllen, und bezeichnet man das nun durch die Mischung entstehende Brechungsverhältnis mit n_0 und das Volumen der ganzen Röhre mit v_0 , so ist nach dem Landoltschen Gesetz, das für jede Kontraktion gilt:

$$(n_1 - 1)v_1 + (n_2 - 1)v_2 + \dots + (n_k - 1)v_k = (n_0 - 1)v_0$$

und daher nach (3) auch:

$$(n - 1)v = (n_0 - 1)v_0.$$

Der Quotient $(n - 1)/d$ bleibt also bei der Kontraktion ungeändert, und dies ist die Beersche Beziehung.¹⁾

1) Sie kann natürlich auch direkt abgeleitet werden.

Der von mir benutzte Grundsatz ist in ganz ähnlicher Form schon von Christiansen und Zehnder ausgesprochen worden. Daß die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen einer Anzahl getrennter Medien braucht, von deren Reihenfolge unabhängig ist, ist an sich selbstverständlich. Das Besondere des Grundsatzes liegt darin, daß nach ihm diese Unabhängigkeit auch noch sozusagen für molekulare Abstände der Medien gilt, und daß die lichtverzögernde Wirkung der einzelnen Medien in der Mischung dieselbe ist wie im getrennten Zustand.

Im übrigen bedurfte es zu meiner Ableitung keiner besonderen Annahme über die Natur des Lichtes. Dadurch unterscheidet sie sich ganz wesentlich von den bekannten Ableitungen der anderen Ausdrücke für das spezifische Brechungsvermögen. Ebenso wenig hängt sie von besonderen Annahmen über die Konstitution der Stoffe ab. Außer Zehnder scheint auch de Klercker¹⁾ die Beersche Gleichung aus gewissen Annahmen über die Verteilung des Äthers im Innern der Körper abgeleitet zu haben. Man könnte ja auch bei meiner Ableitung sagen, der leere Raum der Fig. 2 werde von Äther ausgefüllt, der vorher als „Körperäther“ in den ungemischten Stoffen verteilt gewesen sei. Aber bei der Durchdringbarkeit aller Körper für den Äther wäre durch eine derartige Annahme über die Herkunft des erwähnten Äthers wohl noch nicht einmal für die Anschauung etwas gewonnen. Andererseits ist es ziemlich gleichgültig, ob die Stoffe Äther verloren haben oder nicht: der direkten Beobachtung sind ja doch immer nur die Brechungsverhältnisse der körperlichen Moleküle mit all ihren dichteren und dünneren Ätherhüllen zugänglich.

Wiesbaden, im März 1903.

1) C. E. de Klercker, Beibl. 7. p. 890. 1883.

(Eingegangen 18. März 1903.)

10. Zur Frage der störungsfreien Magnetometer; von H. du Bois.

Im Februarhefte dieser Annalen haben die Herren Kohlrausch und Holborn ein Torsionsmagnetometer ¹⁾ beschrieben, welches überall dort als störungsfrei zu betrachten ist, wo das Störungsfeld innerhalb einer Höhe von etwa 1,5 m als *merklich gleichförmig* gelten darf. Die Brauchbarkeit des Instrumentes ist in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt durch längere Beobachtungsreihen erprobt worden.

Im wesentlichen findet dabei annäherungsweise eine der beiden von mir aus einer potentialtheoretischen Betrachtung des ablenkenden Magnetfeldes hergeleiteten Methoden Verwendung, von der ich behauptet hatte, daß sie sich brauchbar erweisen würde „falls die Entfernung der Störungsquelle von der Ordnung 100 m oder gar eines Kilometers ist“. ²⁾ Wenn nun auch jene günstigen Ergebnisse recht befriedigend sind, so scheint mir daraus zunächst gefolgert werden zu sollen, daß die Lage der genannten Musteranstalt hinsichtlich der magnetischen Störungen nicht ganz so ungünstig ist, als zuweilen befürchtet werden mußte und als es bei manchen anderen Laboratorien der Fall ist. Leider sehe ich mich indessen auf Grund meiner Erfahrungen veranlaßt, vorläufig noch vor einer unbedingt optimistischen Verallgemeinerung jener Resultate zu warnen.

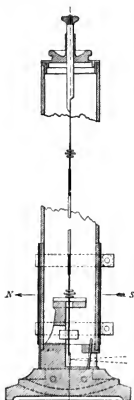
Die Frage der Zulässigkeit vagabondierender Ströme bez. der sie erzeugenden Straßenbahnen in der Nähe der physikalischen Institute ist heute allerorts eine recht aktuelle, und eine verfrühte Entscheidung ohne nähere Prüfung der vorliegenden Spezialverhältnisse könnte leicht Enttäuschungen zur Folge haben. Seitdem die Galvanometrie durch die Einführung der mehrschaligen Panzer und der Spulengehänge Störungen

1) F. Kohlrausch u. L. Holborn, Ann. d. Phys. 10. p. 287. 1903.

2) H. du Bois, Verndl. d. physik. Gesellsch. zu Berlin 15. p. 102. 1896; Ann. d. Phys. 9. p. 944. 1902.

gegenüber als gesichert zu betrachten ist, handelt es sich wesentlich nur noch um den Schutz der magnetometrischen Arbeiten. Die Tragweite dieser Frage reicht infolgedessen über ihre spezielle Bedeutung hinaus, indem eine wirklich überall verwendbare und befriedigende Lösung den Gegensatz zwischen Physikern und Straßenbahnern zum beiderseitigen Vorteil beiseitigen würde. Dieses Ziel scheint mir leider zur Zeit noch nicht erreicht.

Die von mir angegebenen Methoden sind nicht nur vorschlagsweise angeregt worden, sondern es sind im Herbst 1901 unter Mitwirkung der Firma Siemens & Halske, A.-G. Versuche zu ihrer praktischen Ausführung in meinem damaligen ziemlich ungünstig gelegenen Berliner Laboratorium angestellt worden, welche indessen keine befriedigenden Ergebnisse zeitigten. Diese negativen Resultate wurden daher l. c. p. 943 nur kurz erwähnt, sodaß ich mir nunmehr gestatten möchte meine Mitteilung in dieser Beziehung zu ergänzen.



$\frac{1}{2}$ nat. Größe.

Die astatischen Gehänge waren den früher ausführlich beschriebenen Galvanometergehängen¹⁾ nachgebildet. Die beiden Teile waren durch ein sehr dünnes Aluminiumröhrchen verbunden, mittels dessen ihre Entfernung und ihr relatives Azimut eingestellt werden konnte, letzteres freilich mit geringerer Genauigkeit als es der von den Herren Kohlrausch und Holborn eingefügte Teilkreis ermöglicht. Bei einer vertikalen Entfernung von 0,5 m ergab sich bereits eine derart ungünstige Ruhelage, daß von einer weiteren Verlängerung Abstand genommen wurde. Das Versuchsgehänge befand sich in dem oben abgebildeten, etwas abgeänderten, früher von mir be-

1) H. du Bois u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 2. p. 84. 1900.

schriebenen Panzerpermeameter, welches zugleich als Tangentenbusssole und Magnetometer verwendbar ist.¹⁾ Mittels geeigneter Wahl und Justierung des aus dünnem Transformatorblech bestehenden Panzers, welcher das untere Magnetbündel umgab, konnte unter Zuhülfenahme einer gleichförmigen künstlichen Störung die Differentialastasierng erreicht werden; mit Hülfe eines äußeren Magnetes wurde das Gehänge gerichtet. Indessen ergab sich, wie früher bemerkt, daß während ein kurzes Gehänge eine ruhigere Lage aufweist als ein einfaches unastatisches, die Ablenkungen in dem Maße zunehmen als man das astatische Gehänge verlängert.

Freilich konnten im Laboratorium zuweilen Azimutänderungen bis zu 10° an einer gewöhnlichen Nadel beobachtet werden. Indessen in der Nähe einer elektrischen Straßenbahn, etwa in Räumen, welche an der Straße gelegen sind, sind die Störungen noch bedeutend größer, und selbstverständlich in hohem Grade ungleichförmig. Die Verwendung längerer Brocascher Gehänge, welche der Theorie zufolge, astatisch bleiben sofern nur die Störung in ihrem Bereiche linear variiert, erscheint nicht sehr aussichtsvoll, indem sie die Herstellung völlig gerader gehärteter Stahldrähte bez. Stahlröhrchen der gleichen Länge zur Voraussetzung hat²⁾; außerdem unterliegt sie der Folgepole wegen auch gewissen Bedenken.

Eine der häufigsten Anwendungen findet das Magnetometer neuerdings bei der Bestimmung von Induktionskurven unter Benutzung ovoïdischer Versuchskörper und kompensierter Spulen. Für dieses Anwendungsgebiet empfiehlt es sich folgende Bedingungen einzuhalten (l. c. p. 942): „Die einzelnen Magnetbündel des Differentialgehänges sind nach bekannten Regeln derart anzuordnen, daß sie ein starkes Moment aufweisen; sie sind aber möglichst klein zu wählen, damit das Feld des Versuchsmagnetes im Bereiche jedes einzelnen von ihnen merklich gleichförmig sei; daraus folgt die Notwendigkeit einer Luftdämpfung. Im Gegensatz zu den Galvanometergehängen ist

1) H. du Bois, Wied. Ann. 65. p. 22. 1898; Ausführlicher in The Electrician 40. 1898.

2) A. Broca, Journ. de Phys. (3) 6. p. 67. 1897. Diese Schwierigkeit wurde von den Herren Broca und Armagnat bei einer Besprechung der vorliegenden Frage ausdrücklich betont.

beim Dämpferflügel eine gewisse Trägheit nicht nachteilig und kann sogar zur mechanischen Stabilität wesentlich beitragen; es empfiehlt sich bekanntlich zwei Dämpferflügel in senkrechten Ebenen anzuordnen“. Außerdem kann das Trägheitsmoment selbstredend noch beliebig vergrößert werden. Die bekannten kleinen Magnetbündel, wie sie bei allen neueren Galvanometern üblich sind, scheinen mir auch hier den schwereren Zylindermagneten meistens vorzuziehen.

Nach alledem scheint mir vorderhand die bedauerliche Schlußfolgerung unabweisbar, daß die Magnetometrie eines überall — auch unter ungünstigsten Verhältnissen — zu jeder Tageszeit verwendbaren Instrumentes heute noch entbehrt.

Utrecht, Universität, März 1903.

(Eingegangen 28. März 1903.)

11. *Über die Wirkung von Kanalstrahlen auf Zinkoxyd; von Julius Tafel.*

Im Verlaufe seiner Arbeiten über Kanalstrahlen hat W. Wien¹⁾ die Beobachtung gemacht, daß aus den Metallen durch Verbrennen an der Luft gewonnene Oxyde, wie Magnesiumoxyd, Aluminiumoxyd und Zinkoxyd, unter der Wirkung von Kanalstrahlen fluoreszieren, daß aber diese Fluoreszenz rasch abblaßt, und daß sie ferner wasserhaltigen Oxyden nicht zukommt.

Ich habe im Einvernehmen mit Hrn. Wien einige Versuche ausgeführt, um die Natur des durch die Strahlen in den Oxyden hervorgerufenen Vorganges aufzuklären. Dazu war in erster Linie das Zinkoxyd geeignet, weil bei ihm, wie schon Wien beobachtete, mit der Erscheinung der Fluoreszenz eine Farbenänderung verbunden ist.

Es mag daher zunächst für das Zinkoxyd die Erscheinung näher beschrieben werden: Wenn man ein geeignetes, reines, weißes Zinkoxyd kräftigen Kanalstrahlen aussetzt, so tritt für einige Minuten ein eminent starkes grünes Fluoreszenzlicht auf, während meist gleichzeitig das Vakuum der Röhre rasch schlechter wird, anscheinend unter Entbindung von etwas Sauerstoff. Bei fortwährender Tätigkeit der Pumpe und Anfschütteln des Zinkoxydpulvers erneuert sich die helle Fluoreszenz und eine Zeitlang auch die Gasentbindung. Bald aber hört letztere auf, während die Fluoreszenz zwar die anfängliche Pracht eingebüßt hat, aber doch noch recht kräftig ist. In diesem Stadium ist das Zinkoxyd noch kaum gefärbt. Erst wenn man nun ohne Umschütteln die Kanalstrahlen längere Zeit (je nach dem Zustand des Robres sehr verschieden — im Minimum einige Minuten) auf das Oxyd wirken läßt, tritt oberflächliche Bräunung ein und es ist stundenlange Bestrahlung unter fortgesetztem Schütteln

1) W. Wien, Physik. Zeitschr. 3. p. 440. 1902.

nötig, um dem Zinkoxyd eine gleichmäßige, sich bei weiterer Bestrahlung nicht mehr verstärkende hellkaffeebraune Färbung zu erteilen. Nun ist die Fluoreszenz nur mehr minimal, gleichzeitig hat dann das Zinkoxyd seine gesamte Konsistenz geändert. Das voluminöse nicht klebende Pulver ist dichter geworden und klebt an den Glaswänden.

Die erste Frage, welche bezüglich der Natur dieses Vorganges zu stellen ist, die Frage nämlich, ob dabei eine chemische Veränderung des Zinkoxyds im Sinne einer Oxydation oder Reduktion stattfindet, hat sich durch einen Versuch verneinend beantworten lassen, bei welchem das aus reinem Zink durch Oxydation gewonnene Oxyd in einem Glassack abgewogen wurde, der mittels Schliff an die Röhre angesetzt werden konnte. Nachdem die Kanalstrahlen stundenlang unter fortgesetztem Schütteln eingewirkt hatten und die Fluoreszenz nur mehr ganz schwach war, wurde der Glassack abgenommen und wieder gewogen. Die minimale Gewichtsänderung von einigen $\frac{1}{10}$ mg (+) fiel innerhalb die Fehlergrenzen. Sie beweist, daß eine stöchiometrische Veränderung des Zinkoxyds durch die ganze Masse nicht stattgefunden hat.

Die Herstellung irgend größerer Mengen reinen Zinkoxyds aus reinem Zink ist nicht ohne Schwierigkeit. Es bleiben zunächst auch beim Verbrennen im kräftigen Sauerstoffstrom Zinkpartikelchen unoxydiert oder vielleicht unvollkommen oxydiert. Auch in einem anscheinend rein weißen Oxydationsprodukt kann man häufig noch solche Partikelchen nachweisen, wenn man das Oxyd in nicht allzuviel verdünnter Schwefelsäure löst, wobei sie zurückbleiben. Ich habe zu meinen Versuchen ein Zinkoxyd benutzt, welches einen solchen Rückstand nicht zeigte. Es war gewonnen durch Oxydation von chemisch reinem, in Schwefelsäure nur sehr langsam löslichem Zink im Sauerstoffstrom, leichtes Zerreiben in der Reibschale, Sieben durch sehr feinmaschige Beutelseide und nochmaliges Glühen im Sauerstoffstrom. Bei dieser Präparierung von Zinkoxyd fiel es mir auf, daß es seine rein weiße Farbe verliert und einen Stich ins Gelbliche annimmt, sobald man beim Zerreiben irgend größere Kraft anwendet. Wird dasselbe in einer Achat- oder auch Porzellanreibschale unter sehr starkem Aufdrücken zerrieben, so wird die Farbe rasch dunkler und

kommt bald der ungefähr gleich, welche die Kanalstrahlen dem Zinkoxyd verleihen.

Ein Zinkoxyd, welches unter kräftigstem Aufdrücken in der Reibschale so lange zerrieben war, bis weiteres Zerreiben keine erkennbare Farbenänderung mehr hervorrief, zeigte unter der Wirkung von Kanalstrahlen keine Fluoreszenzerscheinung mehr, unter Umständen, unter denen das nicht zerriebene Produkt kräftig fluoreszierte.

Ich habe solche vergleichende Versuche in zwei an das gleiche Vakuum angeschlossenen Röhren von möglichst übereinstimmender Form ausgeführt, welche mit gleichen Mengen der zu vergleichenden Substanzen beschickt waren. Die Form der Röhren war ganz ähnlich derjenigen, welche W. Wien zu seinen Versuchen benutzt hatte. Die Kathode bestand aus einer siebförmigen Aluminiumscheibe, welche dicht an die Wand der Röhre anschloß. Die Anode bestand aus einem Aluminiumstifte, der, um bei einem etwaigen Polwechsel den Zutritt von Kathodenstrahlen zur Substanz zu verhindern, in einer seitlichen Ansatzröhre angebracht war. Der Abstand der Kathode von der Substanz betrug 45 mm.

Ein Umschalter gestattete, die Entladung beliebig durch jede der beiden Röhren gehen zu lassen und damit häufig zu wechseln. Bei Versuchen, in denen es sich um die Beurteilung kleinerer Unterschiede in der Leuchtintensität handelte, wurde stets ein zweiter Beobachter zugezogen.

Die geschilderten Beobachtungen legen die Hypothese nahe, daß das Gelbwerden des Zinkoxyds beim Zerreiben lediglich einer Druckwirkung zuzuschreiben sei. Bei kräftigem Reiben in einer Reibschale können lokale Drucke bis zu 20 000 Atmosphären wohl erreicht werden, andererseits konnte man auch lokale starke Temperatursteigerungen zur Erklärung heranziehen. Letztere Erklärung wird aber widerlegt durch die Beobachtung, daß umgekehrt die gelbe Farbe des zerriebenen Zinkoxyds gleich der des längere Zeit mit Kanalstrahlen behandelten durch Glühen verschwindet.

Zur Prüfung der ersten Hypothese habe ich rein weißes Zinkoxyd in einer Schranbenpresse gepreßt, welche schätzungsweise einen Druck von etwa 50 000 Atmosphären zu erzeugen gestattete. Tatsächlich genügte schon ein wenige Minuten

dauerndes Pressen¹⁾, dem Zinkoxyd durch die ganze Masse eine gelbliche Farbe zu erteilen und seine Fluoreszenz im Kanalstrahlenfelde deutlich herabzusetzen.

Dagegen war das Pressen in einer hydraulischen Presse auf 500 Atmosphären ohne jede Wirkung auf Farbe und Kanalstrahlenfluoreszenz des Zinkoxyds.

Somit darf wohl die Richtigkeit der erstgenannten Hypothese als erwiesen angesehen werden und es liegt die weitere Annahme nahe, daß auch die Wirkung der Kanalstrahlen auf das Zinkoxyd wesentlich eine Druck- bez. Stoßwirkung sei, daß also das durch Oxydation aus Metall gebildete Zinkoxyd eine weniger dichte Form vorstelle, welche unter hohem Druck oder unter der Stoßwirkung aufprallender Ionen unter Fluoreszenzerscheinung in eine dichtere Form übergeben. Diese dichtere Form ist labil. Die Farbe eines durch kräftiges Reiben maximal gefärbten Zinkoxyds wird schon bei mäßigem Glühen rasch heller, scheint aber, bis zu einem gewissen Grade wenigstens, auch bei Zimmertemperatur von selbst abzunehmen.

Es darf übrigens nicht übersehen werden, daß das farbig geriebene und das mit Kanalstrahlen bis zur Erschöpfung der Fluoreszenz beleuchtete Zinkoxyd durch heftiges Glühen über der Gebläselampe wohl wieder farblos werden, daß aber ihre Kanalstrahlenfluoreszenz doch stets hinter derjenigen zurückbleibt, welche ein durch Verbrennen von Zink frisch bereitetes Präparat zeigt.

Ein durch Auflösen reinen Zinks in verdünnter Schwefelsäure, Fällen mit reiner Natriumkarbonatlösung und schwaches Glühen über dem Bunsenbrenner gewonnenes weißes Zinkoxyd, zeigte fast gar keine Kanalstrahlenfluoreszenz, durch heftiges fortgesetztes Glühen wird dieselbe jedoch verstärkt.

Es wären also zum mindesten drei Formen des Zinkoxyds zu unterscheiden: eine gelbbraune und zwei weiße. Der gefärbte und einer der weißen gibt die Fähigkeit unter der Wirkung von Kanalstrahlen zu fluoreszieren ab.

Wenn die Fluoreszenzerscheinung und Färbung durch Kanalstrahlen auf einer Druck- oder Stoßwirkung materieller

1) Bei diesem Versuch litt die Presse Schaden, sodaß der tatsächlich erreichte Druck nicht anzugeben ist.

Teilchen beruhen soll, so muß sie wohl von der elektrischen Ladung derselben unabhängig sein und es ist zu erwarten, daß Kathodenstrahlen die gleiche Wirkung haben werden. Tatsächlich fand ich, daß das durch Verbrennen von Zink gewonnene Zinkoxyd bei Bestrahlung mit Kathodenstrahlen sich ebenfalls allmählich färbt und daß das längere Zeit mit Kathodenstrahlen bestrahlte gefärbte Oxyd unter Kanalstrahlen deutlich schwächer fluoresziert, als ein nicht mit Kathodenstrahlen behandeltes Kontrollpräparat.

Quantitativ vergleichende Versuche über die Wirkung von Kanal- und Kathodenstrahlen sind schwierig auszuführen, weil übereinstimmende Versuchsbedingungen kaum herzustellen sind. Immerhin erhielt ich den Eindruck, daß die Kathodenstrahlen schwächer wirken. Es mag sein, daß dies mit ihrer starken Wärmewirkung zusammenhängt, die ja der komprimierenden Wirkung entgegenarbeiten wird. Wenn auch die Annahme, daß die Wirkung der Kanalstrahlen auf das Zinkoxyd eine reine Stoßwirkung sei, durch die im vorstehenden beschriebenen Beobachtungen nicht streng bewiesen ist, dürfte sie doch sehr wahrscheinlich dadurch gemacht sein.

Vor kurzem hat G. C. Schmidt¹⁾ die Wienschen Beobachtungen an Oxyden dahin interpretiert, daß nur die in Form fester Lösung vorhandenen geringfügigen Verunreinigungen der Oxyde die Fluoreszenz im Kanalstrahlenfelde zur Folge haben, die reinen Oxyde aber nicht fluoreszieren würden. Diese rein hypothetische Interpretation scheint mir von vornherein nicht recht glücklich, weil sie das rasche Abbläßen der Fluoreszenz während der Bestrahlung nicht berücksichtigt. Außerdem dürften die Verunreinigungen des reinsten Zinkes so minimal sein, daß eine Zurückführung der eminenten Kanalstrahlenfluoreszenz auf dieselben wenig plausibel erscheint. Weiter scheint mir die Annahme allzu willkürlich und der gemeinhin bestehenden Ansicht widersprechend, daß das auf nassem Wege bereitete Zinkoxyd bez. das aus Zinklösungen gefällte Zinkkarbonat oder Zinkhydroxyd die mit ausfallenden Verunreinigungen *nicht* ebensogut im Zustande fester Lösung enthalten solle, wie das aus verunreinigtem Zink

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 9. p. 707. 1902.

durch Verbrennen gewonnene Zinkoxyd. Aus früheren Publikationen von G. C. Schmidt selbst ließen sich eine Reihe von Zitaten anführen, welche auf das Gegenteil schließen lassen.¹⁾

Nimmt man hinzu, daß jene Schmidtsche Hypothese mit dem bleibenden Verschwinden der Fluoreszenzfähigkeit des Zinkoxyds unter der Wirkung hohen Druckes kaum in Einklang zu bringen sein wird, so dürfte es zweckmäßig sein, sie fallen zu lassen und das Fluoreszieren des Zinkoxyds im Kanalstrahlenfelde als Begleiterscheinung einer Umwandlung desselben in eine andere Modifikation anzusehen.

Würzburg, Chemisches Institut, April 1903.

1) So stellen E. Wiedemann u. G. C. Schmidt die kathodenlumineszierende „feste Lösung“ von Manganphosphat in Calciumphosphat durch Füllen einer manganchloridhaltigen Calciumchloridlösung mit Natriumphosphat und Auswaschen mit Wasser dar. Wied. Ann. 54. p. 612. 1895.

(Eingegangen 6. April 1903.)

12. *Über die Änderung der Dielektrizitätskonstante des Glases mit dem Druck;*
von A. Wüllner und Max Wien.

Das wichtigste Resultat unserer Untersuchung über die Elektrostriktion des Glases ¹⁾ war folgendes:

„Die durch Elektrostriktion bewirkte Vergrößerung des inneren Volumens von Kugel- und Zylinderkondensatoren ist im allgemeinen kleiner, als sie nach dem akustisch und durch Kompression bestimmten Werte des Elastizitätskoeffizienten sein müßte. Diese Differenz hängt von der Glassorte ab, sie ist am größten bei Flintglas, am kleinsten bei Thüringer Glas.“

Wenn man nicht annehmen will, daß in dem Glase sehr eigentümliche elastische Verhältnisse vorliegen, so ist die einzige Erklärung für die beobachtete Erscheinung die, daß die Dielektrizitätskonstante ϵ von dem Druck p abhängig ist. Helmholtz, Kirchhoff, Lorberg und Sacerdote, welche die Elektrostriktion theoretisch behandelt haben, setzen eine solche Abhängigkeit in ihren Gleichungen voraus.

Nehmen wir an, daß durch einen Zug ($-p$) senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien die Dielektrizitätskonstante auf $\epsilon + d\epsilon$ ansteigt, so sei

$$-\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dp} = k$$

der Koeffizient der Änderung der Dielektrizitätskonstante mit dem Zug. Für einen sehr langen Zylinder von kleiner Wandstärke ist die Änderung des Volumens (Δv) durch Elektrostriktion, wenn l die Länge des Zylinders, e die Elektrizitätsmenge und E der Elastizitätskoeffizient ist, angenähert ²⁾

$$\Delta v = \frac{3e^2}{2\epsilon l} \cdot \frac{1}{E}.$$

1) A. Wüllner u. M. Wien, Ann. d. Phys. 9. p. 1217. 1902.

2) P. Sacerdote, Ann. de chim. et phys. (7) 20. p. 313. Für unendlich dünne Zylinder. Statt des Potentials ist die Elektrizitätsmenge eingeführt und $k_1 = 0$ gesetzt.

Δv ergab sich bei unseren Versuchen zu klein oder, was dasselbe bedeutet, der „Elastizitätskoeffizient durch Elektrostriktion“ E_e ergab sich größer als E_a , der aus dem Longitudinalton berechnete Elastizitätskoeffizient.

Führt man eine Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Glases von dem Zug ein, so wird:

$$\Delta v = \frac{3 \epsilon^3}{2 \epsilon l} \left(\frac{1}{E_a} + k \right)$$

und

$$k = \frac{1}{E_e} - \frac{1}{E_a}.$$

Unsere Resultate ergeben, daß sich k je nach der Glassorte zwischen 0 und $-8 \cdot 10^{-13}$ bewegen muß. Der absolute Wert von k ist also kleiner als $1/E_a$, das zwischen $1,3$ und $1,9 \cdot 10^{-12}$ liegt.

Im folgenden soll nun der Versuch gemacht werden, die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von dem Druck bei denselben Glasröhren, die wir früher auf ihre Elektrostriktion untersucht hatten, direkt experimentell zu bestimmen.

Das Prinzip der Versuche ist sehr einfach: an den Röhren wurde in achsialer Richtung gezogen, und der Zug an einem Manometer abgelesen. An der Innen- und Außenwand der Röhren wurden Belegungen angebracht, und die durch den Zug verursachte Änderung der Kapazität wurde gemessen und gleichzeitig die Längenänderung der Röhre bestimmt. Die Kapazität des Kondensators ist

$$\frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}},$$

worin r_a den äußeren, r_i den inneren Radius des Zylinders bedeutet. Durch den Zug wird l verlängert, während r_a/r_i ungeändert bleibt. Die Änderung der Kapazität mit dem Zug war daher durch zwei Gründe bedingt, einmal durch die Verlängerung der Röhre (Δl) und zweitens durch die angenommene Änderung der Dielektrizitätskonstante $\Delta \epsilon$. Es ist:

$$C + \Delta C = (\epsilon + \Delta \epsilon) \frac{l + \Delta l}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}}$$

oder

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon}.$$

Wenn man $\Delta C/C$ und $\Delta l/l$ beobachtet, so kann man $\Delta \epsilon/\epsilon$ und damit

$$k = - \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\Delta p}$$

berechnen. Multipliziert man die Gleichung für $\Delta C/C$ mit $1/\Delta p$, so ist

$$\frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{1}{\Delta p} = \frac{1}{E_t},$$

worin E_t der Elastizitätsmodul durch Verlängerung ist, und

$$\frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{1}{\Delta p} = \frac{1}{E_\epsilon},$$

worin E_ϵ der „Elastizitätskoeffizient aus der Kapazitätsänderung“ ist. Demnach wird

$$\frac{1}{E_\epsilon} = \frac{1}{E_t} + k,$$

eine Gleichung, die durchaus der obigen Elektrostriktionsgleichung

$$\frac{1}{E_\epsilon} = \frac{1}{E_a} + k$$

entspricht. Es müßte sich demnach eigentlich bei den Versuchen

$E_a = E_t$, $E_\epsilon = E_\epsilon$ und auch $k_\epsilon = \frac{1}{E_\epsilon} - \frac{1}{E_a} = k_\epsilon = \frac{1}{E_\epsilon} - \frac{1}{E_t}$

ergeben. Eine vollkommene zahlenmäßige Übereinstimmung ist jedoch wegen der sehr verschiedenen Art der Beanspruchung des Glases und der Abweichungen der Glasröhren von der genau zylindrischen Form nicht zu erwarten.

Die Schwierigkeit der Untersuchung liegt darin, daß die Änderungen der Dielektrizitätskonstante nur äußerst klein sind, auch wenn man den Zug bis an die Zerreißgrenze steigert. Nach Versuchen von Kowalski ¹⁾ liegt die Zerreißgrenze für Glas zwischen 800 und 900 kg Gew./cm², nach Versuchen von Galitzin ²⁾ zwischen 236 und 800 kg Gew./cm². Wie aus dem folgenden sich ergibt, ist die Zerreißfestigkeit unserer Glasröhren sehr viel niedriger, was vermutlich mit Ungleichmäßigkeiten in Form und Material zusammenhängen dürfte. Die meisten Röhren zer-

1) v. Kowalski, Wied. Ann. 36, p. 307. 1888.

2) Fürst Galitzin, Petersburger Berichte (5) 21. Nr. 1. 1902.

rissen schon bei einer Beanspruchung von 200 kg Gew./cm², nur eine hielt noch 250 kg Gew./cm² aus.

Aus unseren Elektrostriktionsversuchen hatte sich k_1 zu 0 bis $-8 \cdot 10^{-18}$ ergeben. Hieraus berechnet sich, daß die zu erwartende Änderung der Dielektrizitätskonstante $\Delta\epsilon/\epsilon$ bei

$$\Delta p = -200 \frac{\text{kg Gew.}}{\text{cm}^2} = -1,96 \cdot 10^8 \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2}$$

höchstens $1,96 \cdot 10^8 \cdot 8 \cdot 10^{-18} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ betragen dürfte. Um eine solche Änderung mit einiger Sicherheit feststellen zu können, mußte die Versuchsanordnung so getroffen werden, daß Kapazitätsänderungen von $1/50000$ beobachtet werden konnten.

Die Genauigkeit der galvanometrischen und elektrometrischen Methode erscheinen hierfür nicht genügend¹⁾; wir verwandten eine Brückenmethode mit Wechselstrom, wobei als Brückeninstrument ein sehr empfindliches Vibrationsgalvanometer diente.

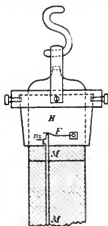


Fig. 1.

Versuchsanordnung.

Um den Zug ausüben zu können, waren dicke Messinghülsen (Fig. 1, H) von 6 cm Länge mit Siegellack oben und unten an der Röhre angekittet, auf diese wirkte mittels Cardanischer Gelenke der Zug. Da wir in unserem Institut keine passenden Zugvorrichtungen besaßen, wurden die Versuche im Maschinentechnischen Laboratorium unserer Hochschule ausgeführt, was uns Hr. Prof. Junkers in liebens-

1) B. Dessau (Rend. d. R. A. d. Lincei (5) 3. p. 488. 1897), O. M. Corbino (Riv. scient. e indust. 29. Jahrgang Nr. 8—9. 1897), G. Ercolini, (Rend. d. R. A. d. Lincei (5) 7. p. 172. 1898), O. M. Corbino u. F. Cannizzo (R. d. R. A. d. Lincei (5) 7. 1898), Ugo Panichi (Il Nuovo Cimento (4) 8. 1898) haben die Änderung der Dielektrizitätskonstante mit dem Zug für verschiedene Substanzen nach der elektrometrischen Methode untersucht. Die Resultate stehen miteinander im Widerspruch, indem die einen eine Vermehrung, die anderen eine Verminderung der Dielektrizitätskonstante mit dem Zug erhalten. Ercolini findet bei Thüringer Glas k positiv. Wie genau seine Methode war, läßt sich aus dem Referat, welches uns nur zugänglich ist, nicht crschen

würdigster Weise gestattete; wir sprechen ihm auch hier dafür unseren verbindlichsten Dank aus. ♦

Der Zug wurde durch einen bequem regulierbaren Flaschenzug ausgeübt und durch ein Manometer gemessen. Das Manometer wurde durch Gewichte geeicht und die mittlere Korrektion zu -1 Proz. bestimmt.

Zur Messung der *Verlängerung* durch den Zug diente die Messingstange M , die mit dem einen Ende an der unteren Hülse befestigt war, und deren oberes Ende — bis auf eine schwache Führungsfeder F — frei bei der oberen Hülse endete. An dem freien Ende dieser Stange und auf der oberen Hülse waren Marken (m) angebracht. Wenn die Glasröhre sich durch Zug verlängerte, so mußten die Marken sich gegeneinander verschieben. Diese Verschiebung wurde mittels eines Mikroskopes mit Okularteilung gemessen.

Eine unter Umständen erhebliche Fehlerquelle war hierbei eine eventuelle Krümmung der Röhre, die durch den Zug verringert wurde. Befand sich die Messingstange auf der konvexen Seite der Krümmung, so beobachtete man eine zu kleine Verschiebung der Marken, andererseits auf der konkaven Seite eine zu große. Wenn man demnach die Messingstange um 180° um die Röhre herumdrehte, mußte der Fehler bei Bildung des Mittels herausfallen.

Die *Messung der Kapazitätsänderung* $\Delta C/C$ geschah in folgender Art.

Die Glasröhre war unten zugeschmolzen und mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt, die als innere Belegung diente. Außen war die Glasröhre zwischen den Hülsen versilbert und zur besseren Zuleitung mit Stanniol bewickelt. Die innere Belegung und die Hülsen waren zur Erde abgeleitet. Die Kapazität der Zuleitungen war klein (1—2 Proz.) gegen die des Glaskondensators; sie wurde durch besondere Versuche ermittelt und als Korrektion bei der Berechnung von $\Delta C/C$ eingeführt. Zur Messung der Kapazität wurde eine Brückenmethode benutzt, welche bei schwach leitendem Dielektrikum mit Rückstandsbildung bequem ist.¹⁾

1) Vgl. M. Wieu, Wied. Ann. 44. p. 689. 1891 und J. Hanauer, Wied. Ann. 65. p. 789. 1898.

Im Zweige 1 der Brückenkombination (vgl. Fig. 2) befindet sich ausschließlich der zu messende Glaskondensator C_1 , im Zweige 2 ein Kondensator (C_2) mit geringerer Leitung bez. Rückstands-bildung, und dahinter geschaltet ein Rheostat. Die Zweige 3 und 4 bestehen aus einfachen — kapazitäts- und selbstinduktionsfreien — Widerständen. Dem Energieverlust durch Leitung und Rückstands-bildung im Glaskondensator entspricht ein parallel geschalteter Widerstand W_1 . Dieser

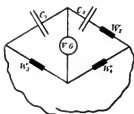


Fig. 2.

wird im Zweige 2 durch den dem Kondensator C_2 vorgeschalteten Widerstand W_2 kompensiert.

Die Bedingungsgleichungen für das Verschwinden eines Sinusstromes von der Schwingungszahl n in 2π Sek. lauten:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{W_4}{W_3} - \frac{W_2}{W_1}, \quad n^2 C_1 C_2 W_1 W_2 = 1.$$

In unserem Fall ist W_2 (10—100 Ohm) sehr klein neben W_1 ($1,5 \cdot 10^7 - 1,5 \cdot 10^8$ Ohm), sodaß das Verhältnis W_2/W_1 verschwindend klein ist neben W_4/W_3 , und wir können die Änderung von C_1/C_2 einfach durch die Änderung von W_4/W_3 beobachten.

Die Glaskondensatoren im Zweige 1 besaßen eine Kapazität von $5 - 8 \cdot 10^{-3}$ Mikrof., im Zweige 2 befand sich ein Glimmerkondensator von der Kapazität $C_2 = 0,05$ Mikrof. und ein Rheostat (W_2). Der Zweig 3 bestand aus 10 000 Ohm; der Zweig 4 aus etwa 700—1100 Ohm, je nach der Größe von C_1 . Dazwischen befand sich eine Kohlrauschsche Brückenwalze, mit der die eigentlichen Einstellungen gemacht wurden. Die Widerstandsverhältnisse waren so, daß ca. $3/10$ Umdrehungen der Brückenwalze einer Kapazitätsänderung von 1 Promille entsprachen. Jede zehntel Umdrehung ist nun bekanntlich bei der Walze in 10 Unterteile eingeteilt, und die Zehntel dieser Unterteile wurden geschätzt. Für jede Röhre wurde zu Beginn und zum Schluß der Versuche festgestellt, wieviel Trommelteile (Zehntelumdrehungen) der Brückenwalze auf 1 Promille Änderung der Kapazität gingen. Diese Zahl war bei den einzelnen Röhren nicht genau die gleiche, da die Kapazität der Röhren verschieden war.

Bei den eigentlichen Versuchen wurde jedesmal von beiden Seiten eingestellt. Diese beiderseitigen Einzeleinstellungen lagen etwa 0,1 Trommelteile der Brückenwalze = $\frac{1}{100}$ Umdrehung auseinander. Für jede Versuchsreihe wurden 3 bis 6 solcher Doppeleinstellungen ausgeführt. Für jede Belastung wurden mehrere Versuchsreihen abwechselnd mit und ohne Belastung gemacht, um die kleine Differenz möglichst sicher zu bestimmen.

Um die nötige Empfindlichkeit zu erzielen, wurden recht kräftige Wechselströme benutzt. Erzeugt wurde sie mittels eines Schlitteninduktoriums mit Eisendrahtkern, dessen primäre Rolle durch einen Saitenunterbrecher geöffnet und unterbrochen wurde. Den primären Strom lieferten 4—6 Akkumulatoren. Um den Unterbrechungsfunken kleiner zu machen, wurde ein Paraffinpapierkondensator von 2 Mikrof. dem Funken parallel geschaltet. Im Brückenzweig befand sich ein sehr empfindliches Vibrationsgalvanometer¹⁾ von hohem Widerstand, das auf einen Ton von ca. 256 Schwingungen eingestimmt war.

Die Brückeneinstellungen selbst waren empfindlich genug (vgl. die Versuchsreihen auf p. 626 und 627), jedoch bestand eine große Fehlerquelle in den Temperaturschwankungen des Beobachtungsraumes, die insofern von Einfluß waren, als die Dielektrizitätskonstante besonders der besser leitenden Glassorten von der Temperatur abhängig ist. Da nun der Raum, in dem wir arbeiten mußten, starken Temperaturschwankungen ausgesetzt war, so zeigten viele unserer Versuchsreihen einen erheblichen Gang des Nullpunktes (Einstellung ohne Belastung). Bei den kleinen zu messenden Differenzen brachte dies natürlich eine Unsicherheit mit sich, die bei einigen Röhren nur durch mehrfache, möglichst schnelle Wiederholung der Einstellungen mit und ohne Belastung umgangen werden konnte. Andererseits wurde bei diesen schnellen Einstellungen der Einstellungsfehler etwas größer. Eine andere Fehlerquelle lag darin, daß während einer Beobachtungsreihe die Stellung der Apparate untereinander und auch die Stellung des Beobachters zu den Apparaten und Leitungsdrähten nicht geändert werden durfte, weil die Kapazität dadurch beeinflußt wurde. Nachdem diese Fehler-

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 4. p. 429. 1901.

quelle einmal erkannt war, ließ sie sich natürlich leicht vermeiden.

Als Beispiel seien hier eine der schlechtesten und eine der besten Versuchsreihen angeführt; bei der ersten störten die Leitfähigkeit des Glases und Temperaturänderung in dem Versuchsraum.

Neue Thüringer Röhre (N. Th. R.).

N = Nullpunkt auf der Brückenwalze (ohne Belastung).

B = Einstellung bei Belastung.

<i>N</i>		<i>B</i> (220 kg)		<i>N</i>		<i>B</i> (240 kg)		<i>N</i>
7,10		7,67		7,20		7,63		7,35
6,98	7,04	7,75	7,71	7,30	7,25	7,90	7,765	7,52
7,09		7,67		7,20		7,50		7,30
7,00	7,045	7,74	7,705	7,33	7,265	7,78	7,64	7,50
7,15		7,60		7,22		7,70		7,28
7,02	7,085	7,73	7,665	7,31	7,265	7,95	7,825	7,50
		7,67		7,24		7,90		7,22
		7,80	7,735	7,26	7,25	7,98	7,94	7,45
						7,80		
						7,95	7,875	

Hieraus die Mittelwerte:

<i>N</i>	<i>B</i> (220 kg)	<i>N</i>	<i>B</i> (240 kg)	<i>N</i>
7,057	7,704	7,257	7,810	7,390
Differenz: 0,547 Trommelteile (3,15 Trommelteile = 1 Promille)		Differenz: 0,487 Trommelteile (3,15 Trommelteile = 1 Promille)		
$\frac{\Delta C}{C} = \frac{0,547}{3,15} \cdot 10^{-3} = 1,75 \cdot 10^{-4}$		$\frac{\Delta C}{C} = \frac{0,487}{3,15} \cdot 10^{-3} = 1,55 \cdot 10^{-4}$		
$E_t = 6,78 \cdot 10^{11}$		$E_t = 8,26 \cdot 10^{11}$		

Die Wanderung des Nullpunktes einerseits, die Ungenauigkeit der Einstellung andererseits — besonders hervortretend bei *B* (250 kg) — bewirken eine Unsicherheit des Resultates, die hier 10—20 Proz. der Gesamtänderung von *C* betragen mag. Wesentlich besser sind die Versuche bei den schlecht leitenden Röhren, bei dem auch die Dielektrizitätskonstante nur wenig von der Temperatur abhängig ist.

Jenenser Röhre (477^{III} R. II).

N	B (94,5 kg)	N	B (94,5 kg)	N
5,22	5,215	5,87	5,65	5,10
5,21	5,215	5,63	5,65	5,21
5,30	5,245	5,66	5,82	5,12
5,19	5,245	5,58	5,15	5,18
5,28	5,26	5,72	5,11	5,58
5,24	5,26	5,56	5,22	5,58
		5,64	5,15	5,62
		5,64	5,20	5,26
			5,175	

Hieraus die Mittelwerte:

N	B (94,5 kg)	N	B (94,5 kg)	N
5,24	5,639	5,162	5,630	5,182
Differenz: 0,438 Trommelteile (3,03 Trommelteile = 1 Promille)		Differenz: 0,458 Trommelteile (3,03 Trommelteile = 1 Promille)		
$\frac{\Delta C}{C} = \frac{0,438}{3,03} \cdot 10^{-3} = 1,44 \cdot 10^{-4}$		$\frac{\Delta C}{C} = \frac{0,458}{3,03} \cdot 10^{-3} = 1,51 \cdot 10^{-4}$		
$E_s = 1,11 \cdot 10^{12}$		$E_s = 1,06 \cdot 10^{12}$		

Die Fehlergrenze der einzelnen Versuchsreihen dürfte bei den besser leitenden Glasröhren etwa bei 0,05 Trommelteilen liegen, was also ungefähr $\frac{1}{60.000}$ der Kapazität wäre. Bei den schlechter leitenden Glassorten liegt die Fehlergrenze zum Teil noch wesentlich niedriger. Demnach dürfte die Genauigkeit der Messung völlig ausreichen, um eine Änderung der Dielektrizitätskonstante von der oben berechneten Größe mit Sicherheit festzustellen.

Im folgenden sind sämtliche Versuchsreihen angeführt, die überhaupt gemacht sind. Für jede Röhre ist zunächst die Glassorte und die Bezeichnung in unserer früheren Arbeit angegeben. Dann der Querschnitt der Röhre und die in unserer früheren Arbeit gemessenen Größen E_a , der Elastizitätskoeffizient aus dem Longitudinalton, und E_v , der Elastizitätskoeffizient aus der Volumenänderung bei der Elektrostriktion, und schließlich die hieraus berechnete Änderung der Dielektrizitätskonstante mit dem Zug

$$k_s = \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_a}.$$

Es folgt dann die Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten aus der durch den Zug bewirkten Verlängerung der Glasröhre. In der ersten Kolumne ist die Mehrbelastung in Kilogramm angegeben, in der zweiten der hieraus berechnete Zug in Dyn/cm², in der dritten der für den betreffenden Zug Δp berechnete Wert von

$$E_l = - \frac{\Delta p \cdot l}{\Delta l},$$

in der vierten der Mittelwert von E_l .

Zum Schluß sind dann die Versuchsergebnisse für die Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten aus der Änderung der Kapazität angegeben. Zunächst für jede Röhre die Anzahl von Trommelteilen der Brückenwalze, welche einer Änderung der Kapazität des Glaskondensators um 1 Promille entsprechen. Dann in der ersten Kolumne wieder die Belastung, in der zweiten der Zug (Dyn/cm²), in der dritten die Einstellung der Brückenwalze — jedesmal das Mittel einer Versuchsreihe —, dann in der vierten die Differenz dieser Einstellungen mit und ohne Belastung, in der fünften die hieraus mit Hilfe des Trommelteilwertes berechnete Kapazitätsänderung ($\Delta C/C$), dann in der sechsten

$$E_c = - \frac{\Delta p \cdot C}{\Delta C}$$

und schließlich in der siebenten der Mittelwert von E_c für jede Belastung. Am Schluß ist noch das Gesamtmittel von E_c für die Röhre angegeben, und die Änderung der Dielektrizitätskonstante mit dem Zug

$$k_s = \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_l}.$$

Sämtliche Röhren waren in der früheren Arbeit auf ihre Elektrostriktion hin untersucht worden, bis auf die „Neue Thüringer Röhre“ (N. Th. R.), die hinzugenommen wurde, weil nur eine Thüringer Röhre (Nr. 3 Th. R.) noch zur Verfügung stand. Die Röhre (Nr. 1 Th. R.) war absichtlich krumm gebogen worden, die „italienische Röhre“ besaß eine zu kleine Kapazität.

Tabelle I.

Röhre aus Thüringer Phosphatglas (Nr. 3 Th. R.).

Querschnitt = 1,485 cm². $E_a = 6,47 \cdot 10^{11}$. $E_z = 7,21 \cdot 10^{11}$. $k_z = -1,6 \cdot 10^{-13}$.Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_l).

Belastung	Dyn/cm ²	E_l	Mittel
181 kg	$1,19 \cdot 10^8$	$6,66 \cdot 10^{11}$	} $6,41 \cdot 10^{11}$
270	$1,76 \cdot 10^8$	$6,17 \cdot 10^{11}$	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_z).

3,30 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_z	Mittel
0 kg	—	6,40	—	—	—	} $5,95 \cdot 10^{11}$
181	$1,19 \cdot 10^8$	6,99	0,64	$1,97 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{11}$	
0	—	6,30	—	—	—	
171	$1,12 \cdot 10^8$	6,97	0,635	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{11}$	
0	—	6,37	—	—	—	
0	—	6,30	—	—	—	} $6,0 \cdot 10^{11}$
280	$1,85 \cdot 10^8$	7,24	1,00	$3,04 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{11}$	
0	—	6,18	—	—	—	
260	$1,72 \cdot 10^8$	7,04	0,98	$2,84 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{11}$	
0	—	6,04	—	—	—	
0	—	5,00	—	—	—	} $5,8 \cdot 10^{11}$
260	$1,72 \cdot 10^8$	5,98	0,98	$2,99 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{11}$	
0	—	5,00	—	—	—	
0	—	5,00	—	—	—	} $5,8 \cdot 10^{11}$
374	$2,47 \cdot 10^8$	6,39	1,39	$4,23 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{11}$	

Zerbrochen!

Gesamtmittel: $E_z = \frac{5,95 + 6,0 + 5,8}{3} \cdot 10^{11} = 5,92 \cdot 10^{11}$. $k_z = +1,3 \cdot 10^{-13}$.

Neue Thüringer Röhre (N. Th. R.)

Querschnitt = 1,83 cm². $E_a = 6,71 \cdot 10^{11}$.Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_l).

Belastung	Dyn/cm ²	E_l	Mittel
255 kg	$1,33 \cdot 10^8$	$6,18 \cdot 10^{11}$	} $6,26 \cdot 10^{11}$
344	$1,80 \cdot 10^8$	$6,34 \cdot 10^{11}$	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_ϵ).

8,15 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_ϵ	Mittel
0	—	7,057	—	—	—	7,52 · 10 ¹¹
220 kg	1,18 · 10 ⁸	7,704	0,547	1,75 · 10 ⁻⁴	6,78 · 10 ¹¹	
0	—	7,267	—	—	—	
240	1,28 · 10 ⁸	7,810	0,487	1,60 · 10 ⁻⁴	8,26 · 10 ¹¹	
0	—	7,390	—	—	—	
0	—	8,975	—	—	—	6,76 · 10 ¹¹
339	1,82 · 10 ⁸	9,78	0,80	2,54 · 10 ⁻⁴	7,16 · 10 ¹¹	
0	—	8,985	—	—	—	
0	—	8,60	—	—	—	
349	1,87 · 10 ⁸	9,53	0,925	2,94 · 10 ⁻⁴	6,36 · 10 ¹¹	
0	—	8,61	—	—	—	

Bei 420 kg Belastung zerbrochen!

$$\text{Gesamtmittel: } E_\epsilon = \frac{7,52 + 6,76}{2} \cdot 10^{11} = 7,14 \cdot 10^{11}, \quad k_\epsilon = -1,9 \cdot 10^{-13}.$$

Röhre aus blauem Jenenser Geräteglas (Nr. 8. Bl. R. II).

Querschnitt = 0,488 cm². $E_a = 7,44 \cdot 10^{11}$. $E_c = 9,04 \cdot 10^{11}$. $k_\epsilon = -2,4 \cdot 10^{-12}$.Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_ϵ).

Belastung	Dyn/cm ²	E_ϵ	Mittel
46,5 kg	9,4 · 10 ⁷	5,15 · 10 ¹¹	5,51 · 10 ¹¹
65	1,33 · 10 ⁸	5,45 · 10 ¹¹	
92	1,89 · 10 ⁸	5,93 · 10 ¹¹	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_ϵ).

8,14 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_ϵ	Mittel
0	—	4,15	—	—	—	5,90 · 10 ¹¹
43,5 kg	8,92 · 10 ⁷	4,545	0,470	1,50 · 10 ⁻⁴	6,09 · 10 ¹¹	
0	—	4,00	—	—	—	
43,5	8,92 · 10 ⁷	4,516	0,491	1,56 · 10 ⁻⁴	5,71 · 10 ¹¹	
0	—	4,05	—	—	—	
0	—	4,52	—	—	—	5,68 · 10 ¹¹
65	1,33 · 10 ⁸	5,40	0,765	2,43 · 10 ⁻⁴	5,47 · 10 ¹¹	
0	—	4,75	—	—	—	
63	1,29 · 10 ⁸	5,59	0,69	2,20 · 10 ⁻⁴	5,88 · 10 ¹¹	
0	—	5,05	—	—	—	

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_z	Mittel
0	—	5,33	—	—	—	6,25 · 10 ¹¹
92 kg	1,89 · 10 ⁸	6,296	0,956	3,05 · 10 ⁻⁴	6,20 · 10 ¹¹	
0	—	5,35	—	—	—	
92	1,89 · 10 ⁸	6,43	1,01	3,23 · 10 ⁻⁴	5,87 · 10 ¹¹	
0	—	5,49	—	—	—	
92	1,89 · 10 ⁸	6,35	0,895	2,85 · 10 ⁻⁴	6,62 · 10 ¹¹	
0	—	5,42	—	—	—	
0	—	5,42	—	—	—	

Bei 130 kg zerbrochen!

Gesamtmittel: $E_z = \frac{5,90 + 5,68 + 6,25}{3} \cdot 10^{11} = 5,95 \cdot 10^{11}$. $k_z = -1,4 \cdot 10^{-13}$.

Die absoluten Werte von E_i und E_z weichen bei dieser Röhre stark von denjenigen von E_a und E_c ab, während k_i und k_z von gleicher Größenordnung und gleichem Zeichen sind. Da die Röhre zerrissen war, konnten an ihr keine weiteren Versuche zur Aufklärung gemacht werden. Die folgenden Versuche, welche darauf an einer zweiten Röhre aus dem gleichen Glase angestellt wurden, machen es wahrscheinlich, daß nicht das Material an der Abweichung schuld ist, sondern vermutlich der Grund in ungleicher Wandstärke und anderen Abweichungen von der Zylinderform zu suchen ist.

Röhre aus blauem Jenenser Geräteglas (Nr. 7. Bl. R. I).

Querschnitt = 0,597, $E_a = 7,45 \cdot 10^{11}$, $E_z = 9,51 \cdot 10^{11}$, $k_z = -2,9 \cdot 10^{-13}$.

Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_i).

Belastung	Dyn/cm ²	E_i	Mittel
63,3 kg	1,04 · 10 ⁸	6,76 · 10 ¹¹	6,83 · 10 ¹¹
93,1	1,53 · 10 ⁸	7,04 · 10 ¹¹	
118	1,92 · 10 ⁸	6,70 · 10 ¹¹	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_z).

2,96 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_z	Mittel
0	—	5,70	—	—	—	8,00 · 10 ¹¹
63,3 kg	1,04 · 10 ⁸	6,13	0,43	1,45 · 10 ⁻⁴	7,2 · 10 ¹¹	
0	—	5,69	—	—	—	
63,3	1,04 · 10 ⁸	6,28	0,51	1,72 · 10 ⁻⁴	6,1 · 10 ¹¹	
0	—	5,85	—	—	—	
63,3	1,04 · 10 ⁸	6,20	0,32	1,08 · 10 ⁻⁴	9,6 · 10 ¹¹	
0	—	5,93	—	—	—	
0	—	5,52	—	—	—	
63,3	1,04 · 10 ⁸	5,93	0,40	1,35 · 10 ⁻⁴	7,7 · 10 ¹¹	
0	—	5,54	—	—	—	
63,3	1,04 · 10 ⁸	5,88	0,33	1,12 · 10 ⁻⁴	9,4 · 10 ¹¹	
0	—	5,43	—	—	—	
0	—	5,43	—	—	—	
0	—	5,43	—	—	—	
0	—	5,43	—	—	—	
0	—	5,43	—	—	—	
0	—	5,43	—	—	—	

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_e	Mittel
0	—	4,95	—	—	—	} 8,10 · 10 ¹¹
93 kg	1,53 · 10 ⁸	5,51	0,80	2,03 · 10 ⁻⁴	7,6 · 10 ¹¹	
0	—	4,86	—	—	—	
93	1,53 · 10 ⁸	5,21	0,56	1,90 · 10 ⁻⁴	8,1 · 10 ¹¹	
0	—	4,44	—	—	—	
93	1,53 · 10 ⁸	4,93	0,49	1,66 · 10 ⁻⁴	9,8 · 10 ¹¹	
0	—	4,17	—	—	—	
93	1,53 · 10 ⁸	4,65	0,56	1,90 · 10 ⁻⁴	8,1 · 10 ¹¹	
0	—	4,01	—	—	—	
93	1,53 · 10 ⁸	4,54	0,61	2,07 · 10 ⁻⁴	7,4 · 10 ¹¹	
0	—	3,86	—	—	—	
0	—	2,98	—	—	—	} 7,24 · 10 ¹¹
119	1,93 · 10 ⁸	3,79	0,84	2,81 · 10 ⁻⁴	6,9 · 10 ¹¹	
0	—	2,91	—	—	—	
118	1,92 · 10 ⁸	3,59	0,83	2,80 · 10 ⁻⁴	6,9 · 10 ¹¹	
0	—	2,63	—	—	—	
118	1,92 · 10 ⁸	3,30	0,74	2,5 · 10 ⁻⁴	7,9 · 10 ¹¹	
0	—	2,49	—	—	—	

Gesamtmittel: $E_e = \frac{8,0 + 8,1 + 7,24}{3} \cdot 10^{11} = 7,78 \cdot 10^{11}$, $k_e = -1,8 \cdot 10^{-18}$.

Röhre aus Jenenser Glas 477^m (Nr. 10. 477^m R. II).

Querschnitt = 0,578, $E_n = 7,21 \cdot 10^{11}$, $E_e = 10,66$, $k_e = -4,53 \cdot 10^{-18}$.

Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_i).

Belastung	Dyn/cm ²	E_i	Mittel
64,5 kg	1,09 · 10 ⁸	7,04 · 10 ¹¹	} 7,015 · 10 ¹¹
94,5	1,60 · 10 ⁸	7,03 · 10 ¹¹	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_e).

3,03 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_e	Mittel
0	—	7,72	—	—	—	} 1,21 · 10 ¹²
64,5 kg	1,09 · 10 ⁸	8,023	0,298	0,985 · 10 ⁻⁴	1,11 · 10 ¹²	
0	—	7,73	—	—	—	
64,5	1,09 · 10 ⁸	8,015	0,250	0,826 · 10 ⁻⁴	1,32 · 10 ¹²	
0	—	7,80	—	—	—	
0	—	7,55	—	—	—	} 1,085 · 10 ¹²
94,5	1,60 · 10 ⁸	8,01	0,43	1,42 · 10 ⁻⁴	1,13 · 10 ¹²	
0	—	7,42	—	—	—	
94,5	1,60 · 10 ⁸	7,90	0,475	1,53 · 10 ⁻⁴	1,04 · 10 ¹²	
0	—	7,43	—	—	—	

Am nächsten Tage:

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_e	Mittel
0	—	5,240	—	—	—	} 1,085 · 10 ¹²
94,5 kg	1,60 · 10 ⁸	5,639	0,438	1,44 · 10 ⁻⁴	1,11 · 10 ¹²	
0	—	5,162	—	—	—	
94,5	1,60 · 10 ⁸	5,630	0,458	1,51 · 10 ⁻⁴	1,06 · 10 ¹²	
0	—	5,182	—	—	—	

Gesamtmittel:

$$E_e = \frac{1,21 + 1,085 + 1,085}{3} \cdot 10^{12} = 1,127 \cdot 10^{12}, \quad k_e = -5,3 \cdot 10^{-13}$$

Röhre aus deutschem (Ehrenfelder) Flintglas (Nr. 12. D. F. R. 11).

Querschnitt = 1,42 cm², $E_a = 5,58 \cdot 10^{11}$, $E_e = 10,03 \cdot 10^{11}$, $k_e = -8,0 \cdot 10^{-13}$.Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_l).

Belastung	Dyn/cm	E_l	} 5,12 · 10 ¹¹
74 kg	0,522 · 10 ⁸	4,93 · 10 ¹¹	
163	1,13 · 10 ⁸	5,30 · 10 ¹¹	
252	1,74 · 10 ⁸	5,14 · 10 ¹¹	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_e).

3,29 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_e	Mittel
0	—	9,36	—	—	—	} 8,03 · 10 ¹¹
164 kg	1,13 · 10 ⁸	9,78	0,43	1,32 · 10 ⁻⁴	8,6 · 10 ¹¹	
0	—	9,34	—	—	—	
164	1,13 · 10 ⁸	9,77	0,42	1,29 · 10 ⁻⁴	8,7 · 10 ¹¹	
0	—	9,36	—	—	—	
0	—	9,50	—	—	—	
164	1,13 · 10 ⁸	10,05	0,54	1,66 · 10 ⁻⁴	6,8 · 10 ¹¹	} 8,8 · 10 ¹¹
0	—	9,52	—	—	—	
0	—	9,86	—	—	—	
252	1,74 · 10 ⁸	10,56	0,695	2,13 · 10 ⁻⁴	8,2 · 10 ¹¹	
0	—	9,87	—	—	—	
242	1,68 · 10 ⁸	10,57	0,705	2,16 · 10 ⁻⁴	7,8 · 10 ¹¹	} 7,7 · 10 ¹¹
0	—	9,86	—	—	—	
0	—	9,814	—	—	—	
341	2,35 · 10 ⁸	10,81	0,996	3,06 · 10 ⁻⁴	7,7 · 10 ¹¹	

Zerbrochen!

$$\text{Gesamtmittel: } E_e = \frac{8,03 + 8,00 + 7,7}{3} \cdot 10^{11} = 7,91 \cdot 10^{11}, \quad k_e = -6,9 \cdot 10^{-13}.$$

Röhre aus englischem Flintglas (Nr. 16. L. F. R. II).

Querschnitt = $1,04 \text{ cm}^2$, $E_a = 6,2 \cdot 10^{11}$, $E_t = 10,78 \cdot 10^{11}$, $k_t = -6,9 \cdot 10^{-13}$.Elastizitätskoeffizient aus Verlängerung durch Zug (E_t).

Belastung	Dyn/cm ²	E_t	Mittel
67 kg	$0,63 \cdot 10^8$	$5,73 \cdot 10^{11}$	$5,74 \cdot 10^{11}$
153	$1,44 \cdot 10^8$	$5,80 \cdot 10^{11}$	
222	$2,1 \cdot 10^8$	$5,70 \cdot 10^{11}$	

Elastizitätskoeffizient aus Änderung der Kapazität (E_c).

3,03 Trommelteile = 1 Promille.

Belastung	Dyn/cm ²	Einst.	Diff.	$\Delta C/C$	E_c	Mittel
0	—	5,05	—	—	—	$8,7 \cdot 10^{11}$
143 kg	$1,35 \cdot 10^8$	5,40	0,375	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{11}$	
0	—	5,00	—	—	—	
0	—	4,69	—	—	—	
153	$1,44 \cdot 10^8$	4,99	0,345	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^{12}$	
0	—	4,60	—	—	—	$9,75 \cdot 10^{11}$
0	—	3,95	—	—	—	
143	$1,35 \cdot 10^8$	4,39	0,340	$1,41 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{11}$	
0	—	4,14	—	—	—	
0	—	4,61	—	—	—	
148	$1,40 \cdot 10^8$	4,95	0,305	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,08 \cdot 10^{12}$	$9,50 \cdot 10^{11}$
0	—	4,68	—	—	—	
0	—	4,86	—	—	—	
232	$2,19 \cdot 10^8$	5,44	0,595	$2,48 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{11}$	
0	—	4,85	—	—	—	
0	—	4,87	—	—	—	$9,50 \cdot 10^{11}$
227	$2,15 \cdot 10^8$	5,40	0,505	$2,10 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{12}$	
0	—	4,92	—	—	—	
222	$2,10 \cdot 10^8$	5,44	0,545	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$9,3 \cdot 10^{11}$	
0	—	4,87	—	—	—	

Bei 300 kg zerbrochen.

Gesamtmittel: $E_t = \frac{9,75 + 9,50}{2} \cdot 10^{11} = 9,625 \cdot 10^{11}$, $k_t = -7,0 \cdot 10^{-13}$.

In der Tab. II sind sämtliche Resultate nochmals kurz zusammengestellt. Darin bedeutet E_a den aus dem Longitudinalton abgeleiteten, E_c den aus der Elektrostriktion unter Annahme konstanter Dielektrizitätskonstante berechneten, E_t den aus der Verlängerung der Glasröhren durch Zug, E_c den aus der Vergrößerung der Kapazität durch Zug berechneten Elastizitätskoeffizienten. $k_t = 1/E_c - 1/E_a$ ist die Änderung der

Dielektrizitätskonstante, wie sie sich aus den Elektrostriktionsversuchen, $k_z = 1/E_z - 1/E_t$ ist die Änderung der Dielektrizitätskonstante, wie sie sich aus den Zugversuchen ergibt.

Tabelle II.

Bezeichnung	E_a	E_z	E_t	E_z	k_z	k_z
Ph. R.	$6,47 \cdot 10^{11}$	$7,21 \cdot 10^{11}$	$6,41 \cdot 10^{11}$	$5,92 \cdot 10^{11}$	$-1,6 \cdot 10^{-13}$	$+1,3 \cdot 10^{-13}$
N. Th. R.	$6,71 \cdot 10^{11}$	—	$6,26 \cdot 10^{11}$	$7,10 \cdot 10^{11}$	—	$-1,9 \cdot 10^{-13}$
Bl. R. II	$7,44 \cdot 10^{11}$	$9,04 \cdot 10^{11}$	$5,51 \cdot 10^{11}$	$5,95 \cdot 10^{11}$	$-2,4 \cdot 10^{-13}$	$-1,4 \cdot 10^{-13}$
Bl. R. I	$7,45 \cdot 10^{11}$	$9,51 \cdot 10^{11}$	$6,83 \cdot 10^{11}$	$7,78 \cdot 10^{11}$	$-2,9 \cdot 10^{-13}$	$-1,3 \cdot 10^{-13}$
477 ^m R. II	$7,21 \cdot 10^{11}$	$10,66 \cdot 10^{11}$	$7,03 \cdot 10^{11}$	$11,27 \cdot 10^{11}$	$-4,5 \cdot 10^{-13}$	$-5,3 \cdot 10^{-13}$
D. F. R. II	$5,58 \cdot 10^{11}$	$10,03 \cdot 10^{11}$	$5,13 \cdot 10^{11}$	$7,91 \cdot 10^{11}$	$-8,0 \cdot 10^{-13}$	$-6,9 \cdot 10^{-13}$
L. F. R. II	$6,20 \cdot 10^{11}$	$10,78 \cdot 10^{11}$	$5,74 \cdot 10^{11}$	$9,63 \cdot 10^{11}$	$-6,9 \cdot 10^{-13}$	$-7,0 \cdot 10^{-13}$

Berücksichtigt man die sehr geringen Differenzen der Dielektrizitätskonstante, welche beobachtet werden mußten, ferner die sehr verschiedenartige und sehr verschieden große Beanspruchung des Glases bei der Elektrostriktion und bei den Zugversuchen, und schließlich den Einfluß der Abweichungen der Glasröhren von der genau zylindrischen Form, so ist die Übereinstimmung zwischen k_z und k_z eine so gute, als es sich irgend erwarten ließ. Besonders bei den letzten drei Röhren, wo k größere Werte erreicht, und wo wegen der geringen Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Temperatur die Messungen besonders genau waren.

Wir glauben daher aus unseren Versuchen *folgende Schlüsse* ziehen zu können:

Die Änderung der Dielektrizitätskonstante des Glases durch einen Zug senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien ist im allgemeinen negativ. Bei dem Thüringer Glase ist sie sehr klein und übersteigt kaum die Beobachtungsfehler, größer ist sie bei den Jenenser Glassorten, am größten bei Flintglas. Dem Vorzeichen und der Größenordnung nach stimmt die Änderung überein mit derjenigen, die sich aus unseren Elektrostriktionsversuchen für dieselben Röhren berechnet. Demnach kann das eigentümliche Verhalten des Glases bei der Elektrostriktion auf eine Änderung der Dielektrizitätskonstante mit dem Zug zurückgeführt werden.

Aachen, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., März 1903.

(Eingegangen 8. März 1903.)

13. *Über den elektrischen Bogen und die Spektren der Metalle; von P. Lenard.*

1. Daß die Emissionsspektren der Elemente Schwingungsmöglichkeiten darstellen, welche den Atomen derselben zugehören, ist nicht zu bezweifeln nach den Erfolgen der Spektralanalyse, besonders in der Entdeckung neuer Elemente. Betrachtet man in diesem Sinne den Linienreichtum eines vollständigen Metallspektrums, so muß die umgeheure Zahl der möglichen Schwingungsweisen, welche einem und demselben Atom hiernach zuzurechnen sind, in Erstaunen setzen, und es ist die Frage, ob die gesamte Zahl dieser Schwingungsmöglichkeiten jederzeit in jedem Atom des betreffenden Elementes vorhanden sei. — Allerdings haben gewisse Erscheinungen der Kathodenstrahlen gezeigt, daß die Atome der Materie einen inneren Aufbau mit vielen Zwischenräumen, also auch vielen Bewegungsmöglichkeiten aufweisen müssen¹⁾, jedoch die Untersuchungen der Herren Kayser und Runge, sowie Rydberg, haben das Liniengewirre der Spektren in gesetzmäßig gebaute Linienserien auflösen gelehrt, wie dies Balmer zuerst am Wasserstoff gezeigt hatte, und die Zahl der Linien jeder einzelnen solchen Serie ist deren Bau nach unendlich, die Linienzahl eines ganzen Spektrums also mehrfach unendlich, und hieruach kann unzweifelhaft nicht für jede Spektrallinie ein besonderer schwingungsfähiger Teil im Atom vorhanden sein. In der Tat haben die Untersuchungen der Herren Zeeman und Lorentz²⁾ von anderer Seite her zu der Annahme geführt, daß je eine ganze Linienserie von einem und demselben schwingungsfähigen System im Atome emittiert werde, so daß nur so viele solcher Systeme im Atom anzunehmen wären, als Serien in seinem Spektrum sind. — Danach wäre jene Frage so zu stellen: ob jederzeit in jedem Atom eines bestimmten Elementes so viele schwingungsfähige Systeme vor-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. S. p. 192. 1902.

2) Vgl. H. Lorentz, Akad. Amsterdam 7. p. 90. 1898.

handen seien als Serien in seinem Spektrum, oder: ob jedes erregte Atom gleichzeitig alle Serien seines Spektrums emittiere.

Die folgenden Beobachtungen liefern, in einfachster Auffassung, eine verneinende Antwort auf diese Frage, indem sie zeigen, daß der metallhaltige elektrische Bogen — eine der wenigen Lichtquellen, in welchen beispielsweise die Alkalien ihr bekanntes Spektrum vollständig liefern — aus einzelnen Schichten besteht, deren jede nur eine einzige Spektralserie des betreffenden Metalles emittiert.

2. Untersucht man das auf einer matten Glasplatte entworfene, vergrößerte Linsenbild des natriumhaltigen Bogens von Stelle zu Stelle mit dem Taschenspektroskop, so findet man, daß im Saum des Bildes nur $\text{Na}\alpha$ ¹⁾, die einzige ins sichtbare Gebiet fallende Linie der Hauptserie des Natriums erscheint; die Linien der beiden Nebenserien werden nur im Innern des Bildes gefunden, wobei manchmal stellenweise die relative Intensität dieser beiden Serien wechselt. $\text{Na}\alpha$ erscheint im Innern des Bildes oft auffallend schwach gegen die Nebenserien. Eine Stelle, an welcher stets alle Linien des Natriums sehr intensiv gefunden werden, ist der Ansatzpunkt des Bogens an der positiven Kohle, auf welcher das Natriumsalz sich befindet. — Wegen der stets wechselnden Form und Lage des Bogenbildes ist diese Beobachtungsweise jedoch nicht geeignet, weitere Aufschlüsse zu liefern.

3. Man erhält dagegen solche, wenn man ein möglichst verkleinertes, reelles Linsenbild des Bogens durch ein Spektroskop ohne Spalt mit genügend starker Dispersion und Vergrößerung betrachtet. Das Bogenbild muß in den Brennpunkt des Spektroskopkollimators fallen; es muß klein sein, und die Dispersion groß, um das kontinuierliche Licht der Kohlen und des Bogens selbst verschwinden zu lassen. Es ist dies die Methode, nach welcher die Protuberanzen ohne Sonnenfinsternis beobachtet werden²⁾; ich bezeichne im folgenden den eben

1) Für Linien, die auch im Flammenspektrum vorkommen, wähle ich Bunsens Bezeichnung; allgemein bedeute H eine Kayser'sche Hauptserie, I eine erste, II eine zweite Nebenserie und n die Ordnungszahl einer besonderen Linie der Serie. $\text{Na}\alpha$ und $\text{Na}Hn=3$ bezeichnen danach dasselbe, nämlich die gelbe Natriumdoppellinie.

2) F. Zöllner, Verh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 21. p. 76 u. 145. 1869.

skizzierten Apparat als Objektivspektroskop im Gegensatz zum gewöhnlichen Spaltspektroskop. Man sieht im Objektivspektroskop so viele Bilder des elektrischen Bogens, als Lichtarten in seiner Emission vorhanden sind, und jedes dieser Bilder führt genau die räumliche Verteilung der Emissionszentren der betreffenden Lichtart vor Augen.

4. Vor Beschreibung der hierbei auftretenden Erscheinungen muß über das Aussehen des Bogens, wie es unmittelbar mit freiem Auge bez. durch dunkle Gläser beobachtet werden kann, einiges bemerkt werden, was in der sonst reichen hierher gehörigen Literatur nicht hervorgehoben zu sein scheint. Man kann nämlich zutreffend behaupten, der Bogen bestehe stets aus zwei Flammen, deren jede aus einer der Kohlen hervorbricht, die einander zustreben und dabei mehr oder weniger miteinander verschmelzen. Die beiden Flammen sind um so kräftiger, und dementsprechend auch ihre Verschmelzung um so geringer, je höher die benutzte Stromstärke ist. Bei ganz schwachem Strome macht die von der unteren Kohle aufsteigende Flamme den Hauptteil des Bogens aus; die Flamme der oberen Kohle wird dann durch den aufsteigenden Luftstrom stark gegen diese Kohle zurückgedrängt, und nur ein seitlicher Fortsatz des Ganzen zeigt dann oft noch an, daß zwei nicht genau zentrisch gegeneinander gerichtete matte Flammen im „Bogen“ vereinigt sind. Bei großer Stromstärke, 15 Amp. und mehr, erscheint jede der beiden Flammen für sich wohl entwickelt, sehr unabhängig von der anderen sich hin und her bewegend, je nach dem Wandern ihres Ansatzpunktes an der Kohle. Oft berühren sich dann die beiden Flammen, schräge seitlich aneinander vorbeifahrend, nur an einem einzelnen gemeinsamen Punkte ihrer Mäntel (vgl. die Figg. 1 und 2); geht diese Berührung verloren, so ist Erlöschen die Folge. Diese Erscheinungen sind unabhängig von der Stellung der beiden Kohlen, doch wird für das Folgende Vertikalstellung vorausgesetzt werden, die positive Kohle meist unten, gehöhlt, und die Höhlung mit dem Metallsalz gefüllt. Ausziehen des Bogens zu viel größerer Länge, als es durch selbstregulierende Lampen zu Beleuchtungszwecken zu geschehen pflegt, ist vorteilhaft zur volleren Entwicklung der Flammen.

5. Im Objektivspektroskop (3) zeigt sich am natrium-

haltigen Bogen das Folgende: Die Flammen der Hauptserie sind am größten — sie müssen, nach (2), die volle Größe der ganzen Bogenflammen haben —; bedeutend kleiner erscheinen daneben die Flammen der ersten Nebenserie, und wieder bedeutend kleiner die Flammen der zweiten Nebenserie. Dasselbe gilt für Lithium. Sind Natrium und Lithium gleichzeitig vorhanden, so haben die Flammen entsprechender Serien, z. B. die $\text{Na } \alpha$ - und $\text{Li } \alpha$ -Flammen oder die grüngelben Lithiumflammen $I_n = 4$ und die gelben Lithiumflammen $I_n = 3$, sehr nahe die gleiche Größe. Es eignet sich zu solcher vergleichender Beobachtung ein einzelnes Prisma im Spektroskop am besten, da es stets mehrere Bogenbilder zugleich im Gesichtsfeld zeigt, doch wurde hier und später auch abwechselnd ein Satz von vier Prismen oder ein ebenes, feines Reflexionsgitter benutzt.

6. Der angegebenen Größenabstufung der Flammen entspricht es, daß nur bei der Hauptserie obere und untere Flamme sich berühren müssen, wenn nicht sofort Erlöschen des Bogens eintreten soll, während bei den Nebenserien die beiden Flammen durch einen weiten, dunklen Zwischenraum voneinander getrennt sein können. Letzteres war besonders häufig bei $\text{Na } II_n = 4$ und $n = 5$ zu beobachten. Doch können auch in den Nebenserien obere und untere Flamme verschmolzen sein und es beim Auseinanderziehen der Kohlen auch bleiben, bis zum letzten Augenblick vor dem Erlöschen vollständige Brücken von Kohle zu Kohle bildend. Dies wurde wiederholt bei $\text{Li } I_n = 6$ und $II_n = 6$ beobachtet. Die Erscheinung der getrennten Nebenserienflammen macht es unzweifelhaft, daß die Lichtemission des Metalles im Bogen nicht an die Strombahn, sondern an die Flammengestalt gebunden ist; dagegen darf nach der zweiten Erscheinungsform die Behauptung nicht etwa dahin erweitert werden, daß die Flammen der Nebenserien an der Stromleitung im Bogen nicht mit beteiligt wären.

7. Da die Flammenbilder nicht scharf begrenzt, sondern mit etwas verwaschenen Rändern auf dem dunkleren Hintergrund erscheinen, war zu untersuchen, ob die beobachteten Größenabstufungen nicht etwa durch die Intensitätsverhältnisse der betreffenden Emissionen bedingt seien. Hiergegen spricht zuerst die Größengleichheit aller Flammen derselben Serie, z. B. $\text{Li } I_n = 3, 4, 5, 6$ bez. $\text{Li } II_n = 4, 5, 6$, während die Inten-

sität mit wachsendem n stark abnimmt. Außerdem habe ich aber auch durch Einschaltung selektiv absorbierender Medien die Intensitätsverhältnisse der zu vergleichenden Flammen sehr weitgehend abändern können, ohne daß jemals eine Umkehr in der Ordnung der Größen hätte hervorgebracht werden können. Schwächt man beispielsweise das intensive rote und gelbe Licht von $\text{Li } \alpha$ und β ($Hn = 3$ und $In = 3$) durch eine Lösung von Kupferoxydammon so weit ab, daß diese Flammen nur mehr sehr dunkel erscheinen, so ist ihre damit allerdings verbundene scheinbare Verkleinerung doch nur so gering, daß ihr Größenverhältnis zu den jetzt vergleichsweise intensiv leuchtenden grünen und blauen Flammen $\text{Li } In = 4, 5$, $Hn = 4, 5$ dadurch nicht wesentlich geändert wird. Die $\text{Na } \alpha$ -Flammen ($Hn = 3$) erscheinen mit dem benutzten sehr reinen Lithiumkarbonat stets nur sehr matt gegen die benachbarten $\text{Li } \beta$ -Flammen ($In = 3$), dennoch sind sie immer weiter größer als letztere.

Das Äußerste, was durch Intensitätsverminderung erreicht werden konnte, war Verringerung je einer Größenstufe bis fast zur Unmerklichkeit. So erschienen z. B. die intensiven gelben $\text{Li } \beta$ -Flammen ($In = 3$) fast ebenso groß, aber niemals kleiner, wie die $\text{Li } \alpha$ -Flammen ($Hn = 3$), wenn das ebenfalls sehr intensive Licht der letzteren durch eine genügend konzentrierte Lösung von Nickelchlorid so weit fortgenommen war, daß dieselben nur mit Mühe mehr gesehen werden konnten. Zur Lichtabschwächung wurden für diese und die ferneren Versuche außerdem benutzt für Blau Eisenchloridlösung, für Grün Eosinlösung, für Gelb und Grün Indigo- oder Methylviolettlösung, auch Fernrohrokulare mit Sonnengläsern, eine Irisblende im projizierenden Linsensystem, endlich schnell rotierende Scheiben mit schmalen Öffnungen. Das angegebene Resultat über die Flammengrößen, geprüft an Na und Li, hörte dabei nie auf sich zu bewähren.

8. Die bisherigen Beobachtungen lassen keinen Zweifel darüber, daß der Saum der Bogenflammen nur die Hauptserie emittiert, nichts von den Nebenserien, daß in einer tiefer im Innern der Flammen liegenden Schicht zwar die erste Nebenserie emittiert wird, die zweite aber noch fehlt und daß deren Emission endlich in noch größerer Tiefe beginnt. — Es wäre zu verwundern, wenn diese Verhältnisse aufmerksamen

Beobachtern nicht gelegentlich schon aufgefallen sein sollten, obgleich bestimmte Angaben hierüber mir nicht auffindbar waren.¹⁾ Es scheint jedoch die Auffassung vorhanden zu sein, daß der elektrische Bogen oder Funken im Gegensatz zur Bunsenflamme deshalb die linienreicheren Spektren liefere, weil er heisser sei, und hiernach könnte im Innern des Bogens das vollständige Spektrum erwartet werden und ein um so unvollständigeres, je weiter man nach außen geht.

9. Diese Auffassung wäre jedoch unrichtig; schon die bisher mitgeteilten Beobachtungen wären nach derselben unverständlich. Denn wenn die gesamte Emission nach dem Innern der Bogenflammen hin zunähme, wenn beispielsweise $\text{Na}\alpha$ im Kern der Flammen stärker emittiert würde als im Saume, oder auch nur in gleicher Stärke wie im Saume, so hätte es möglich sein müssen, durch genügende Lichtabschwächung die $\text{Na}\alpha$ -Flammen, welche konisch geformte Gebilde mit nach der Achse hin zunehmender Dicke sind, beliebig klein erscheinen zu lassen. Dies traf aber nicht zu (7). Daß bei zunehmender Lichtabschwächung eine Grenze für die Flammengröße erreicht wurde, unterhalb deren vollständiges Verschwinden eintritt, zeigt an, daß die betreffende Lichtemission in geringer Tiefe unter der Oberfläche der betreffenden Flamme ein Maximum erreiche und weiter nach dem Innern zu rasch wieder abnehme.

10. In der Tat lassen die angegebenen Beobachtungsmittel auch sämtliche Flammen aller Serien hohl erscheinen; nur ein zarter, dünner Mantel ist es, der in jeder der Flammen leuchtet, während deren Inneres so dunkel erscheint als es nur erwartet werden kann, wenn ein von Lichtemission völlig freier Raum durch eine leuchtende Hülle hindurch gesehen wird. Freilich ist die Erscheinung der Hohlflammen nur bei Benutzung guter und gut justierter optischer Hilfsmittel und bei Regulierung der Lichtintensität auf ein für das Auge passendes Maß in voller Reinheit zu erhalten. Die Fig. 1 soll den Anblick zeigen; sie bezieht sich auf $\text{Li}\alpha$. Mit zunehmender

1) Die allgemeine Behauptung, daß verschiedene Teile des Bogens verschiedene Lichtemission besitzen, kann schon nach dem unmittelbaren Anblick einer Linsenprojektion des Bogens aufgestellt werden, in welcher der Saum meist anders gefärbt erscheint als das Innere.

Lichtabschwächung nimmt die sichtbare Dicke des leuchtenden Mantels in solcher Art ab, daß dabei die Größe des dunklen Innenraumes nahe ungeändert bleibt, die Flamme also an äußerem Umfang etwas verliert.



Fig. 1.
Hohlflammen einer
Hauptserie.

Daß die Höhlung nur bei nicht zu großer Lichtintensität gut sichtbar wird, entspricht den Eigenschaften des Auges; die gleiche Erscheinung zeigt sich auch bei Betrachtung einer Bunsenflamme, welche in sehr stark natriumhaltiger Luft brennt. Die unzweifelhaft vorhandene, von Lichtemission freie Höhlung des inneren Konus dieser Flamme ist unmittelbar fast unsichtbar; sie wird um so deutlicher sichtbar, je mehr man das Licht der Flamme abschwächt, z. B. durch rotierende Scheiben mit schmalen radialen Ausschnitten.

11. Die Flammen einer Hauptserie, welche am größten sind (τ), haben auch die größte Höhlung (Fig. 1, Li α); die Flammen der ersten Nebenserie sind von solcher Größe, daß sie ungefähr diese Höhlung füllen; in die Höhlung der Flammen der ersten Nebenserie passen wieder nahezu die Flammen der zweiten Nebenserie. Auch ändern, während der Bogen brennt und etwa seine Länge oder Stromstärke geändert wird, sämtliche Flammen ihre Gestalten und Größen so, daß das Gesagte jederzeit zutreffend bleibt.

Man kann daher auch sagen: In Hinsicht der Lichtemission vorhandener Metalldämpfe besteht jede der beiden Flammen des Bogens aus einer Reihe umeinander gelagerter Mäntel, deren jeder eine der Spektralserien des Metalles für sich emittiert; den äußersten dieser Mäntel, der die Hauptserie emittiert, haben wir auch Saum genannt. Da auch die Flammen der zweiten Nebenserie hohl sind, bleibt als Innerstes jeder Bogenflamme ein Kern, welcher entweder frei ist von der Lichtemission des Metalles, oder aber noch unbeachtet gebliebene Emissionen desselben enthält (17).

Zu bemerken ist, daß die verschiedenen Mäntel gewisse Räume gemeinsam erfüllen. Ein gemeinsamer Raum aller Mäntel scheint der Ansatzpunkt der Flamme an ihrer Kohle zu sein; er ist die hellste Stelle jeder der spektroskopisch gesehenen Serien-

flammen; eine teilweise, wenn auch sehr geringe Deckung je zweier benachbarter Mäntel scheint aber auch an ihrem ganzen Umfange stattzufinden, denn bei äußerster Lichtabschwächung des äußeren zweier solcher Mäntel und großer Lichtintensität des inneren konnten im Grenzfalle beide nahezu gleich groß erscheinen (7). Die Intensität der Emission in jedem einzelnen Mantel nimmt, soweit mit dem Auge zu beurteilen, von außen hernach der Flammenachse hin allmählich zu, passiert in bestimmtem Abstände von der Achse ein Maximum und fällt danach sehr rasch zu Null herab.

12. Außer den von mir hauptsächlich untersuchten Flammen des Natriums und Lithiums traten stets auch noch andere Metallflammen, von Verunreinigungen stammend, im spektroskopischen Bilde auf. Keiner dieser Flammen fehlte die Höhlung, und da sie lichtschwach und dabei scharf gezeichnet erschienen, waren sie der Beobachtung sogar besonders günstig. Es sind zu nennen $\text{Ca } \lambda = 422,69 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$, Flammen gleich *I* der Alkalien bildend, ferner das Calciumpaar $\lambda = 396,9$ und $393,4 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$ (*H* und *K* der Sonne entsprechend), dessen Komponenten sowohl einander als *Li II* gleich waren, endlich zwei innerhalb des letztgenannten Paares gelegene Flammen, die noch weit schmaler als *Li II*, aber dennoch auf das deutlichste fein gehöhlt waren; sie gehören der charakteristischen Gruppierung nach dem Aluminium an und sind die kleinsten von mir bisher gesehenen Hohlflammen. Die Erdmetalle mit ihren komplizierteren Spektren scheinen mehr Größenabstufungen der Flammen zu bieten als die Alkalien.

Es ist offenbar möglich, eine Einteilung der Spektralserien auf die Flammengrößen zu gründen. Das Beispiel des Calciums zeigt, daß diese Einteilung nicht in allen Fällen mit der gegenwärtig gebrauchten bez. sich entwickelnden¹⁾ zusammen treffen würde, nach welcher *Ca H* und *K* die Hauptserie dieses Metalles repräsentieren sollten.

13. Ohne Metallzusatz scheinen die Flammen des Bogens eine ähnliche Schichtung zu besitzen, wie wir es für den Metall-

1) Diese Einteilung ist teils von den Herren Kayser und Runge vorläufig zum Zweck erster Orientierung nach dem Aussehen der Linien gewählt, teils gründet sie sich auf die magnetische Zerlegung der Linien. Vgl. hierüber, besonders in Bezug auf *Ca*, C. Runge u. F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 270. 1902.

bogen fanden, doch versagt hier im allgemeinen das Objektivspektroskop, weil die Emissionen aller Teile der Flammen aus Banden bestehen, die im besten Falle bei starker Dispersion in eine sehr große Zahl einander sehr nahe stehender Linien sich auflösen. Man sieht daher im Objektivspektroskop verzerrte Flammen oder Serien von Flammen, deren einzelne Glieder einander sehr überdecken. Eine Ausnahme machen die ersten Kanten der indigoblauen Cyanserie¹⁾, welche infolge ihrer hervortretenden Helligkeit der Beobachtung günstig sind. Ich habe deren Flammen niemals hohl sehen können; sie scheinen gerade den Raum einzunehmen, welchen wir vorher (11) frei von Metallemission fanden. Bringt man etwas Lithium in den Bogen, so sieht man in der Tat die alsdann schwächer gewordenen, genannten Cyankanten als kleine Flammenpaare, die positive Flamme heller als die negative, von solcher Größe und Form, daß sie die Höhlung von Li II gerade zu füllen geeignet wären; tritt dabei Verschmelzung der beiden Bogenflammen ein (4), so werden Li II Hohlfäden, die Cyankanten feine ungehöhlte Fäden von Kohle zu Kohle reichend, letztere wieder in erstere passend.

Im übrigen kann man durch die schon von Lockyer angewandte Methode, ein Bild des Bogens auf den Spektroskopspalt zu projizieren, wenn man dies hier nicht zu klein zu wählende Bild am Spalt wandern läßt, um seine einzelnen Teile zu untersuchen, davon sich überzeugen²⁾, daß der Kern der Flammen des nahezu metallfreien Bogens neben den sämtlichen Cyanbanden³⁾ auch die Kohlebanden³⁾ emittiert und daß um diesen Kern ein Mantel sich lagert, in dessen Spektrum die Cyan- und Kohlebanden gänzlich fehlen, in welchem dagegen häufig Metalllinien hell aufblitzen und welcher aus zwei Teilen besteht: einem inneren Mantel, dessen Spektrum feinste Schraffen enthält, unter welchen zwei Linien im Grün hervor-

1) Über diese Serie und ihre Bezeichnung vgl. H. Kayser u. C. Runge, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 139, 1889.

2) Soweit dies bei der durch die Unstetigkeit des Bogens bedingten Unvollkommenheit dieser Art der Beobachtung möglich ist.

3) Über diese Banden und ihre Bezeichnung vgl. Kayser u. Runge, l. c. Auch die dortselbst erwähnten roten Banden, mit der Kante nach Violett zu, sind im obigen zu den Cyanbanden gerechnet.

treten, und einem äußeren, dessen Spektrum breite Maxima und Minima der Helligkeit aufweist — Maxima bei $\lambda = 576, 548, 517, 491.10^{-6} \text{ mm}$ —, die oft weit seitlich und nach oben aus dem Bogen hinausflammen. Lithiumzusatz ließ im Kern die Kohlebanden verschwinden, die Cyanbanden schwächer werden, manchmal ebenfalls verschwinden, änderte aber durchaus nicht merklich die Lichtemission der beiden Mäntel.

14. Die Hohlflammen der Metallserien können auch ohne Zuhilfenahme spektraler Zerlegung gesehen werden, wenn man den Bogen durch geeignete absorbierende Medien hindurch betrachtet. Will man in dieser Weise die roten Flammen der Hauptserie des Lithiums für sich allein sehen, so muß das absorbierende Medium das Licht von $\text{Li}\alpha$ durchlassen, die Lichter aller anderen Li-Linien aber verschlucken. Eine Kombination von Indigolösung und Eisenchloridlösung erfüllte die Bedingung. Die Konzentration der ersteren Lösung war so abgepaßt, daß ihre vom Rot nach dem Orange hin steil ansteigende Absorption dicht neben $\text{Li}\alpha$ begann, so daß das Gelb von $\text{Li}\beta$ schon völlig verschwand; das Eisenchlorid hatte den Zweck, das vom Indigo durchgelassene Grün, Blau und Violett zu entfernen. An Stelle oder neben der Indigolösung wurde in einigen Fällen auch noch Methylviolettlösung eingeschaltet. Die genannten zwei oder drei Lösungen zusammen ergeben ein tief rot gefärbtes Medium. Hierdurch betrachtet, sieht man prächtig die weit ausgehöhlten roten Flammen (wie Fig. 1). Manchmal, aber nicht immer, erscheint mitten im dunklen Hohlraume, an der betreffenden Kohle sitzend, eine kleinere, selber nicht hohle Flamme als Kern, durch einen breiten dunklen Mantel vom hellen Saume der $\text{Li}\alpha$ -Flamme getrennt. Verschmilzt das Flammenpaar des Bogens ein wenig, so kann sich das Paar der kleinen, inneren Flammen zu einem von Kohle zu Kohle reichenden Faden vereinigen, der frei die Hohlräume der $\text{Li}\alpha$ -Flamme durchzieht (Fig. 2). Da die benutzten absorbierenden Medien neben $\text{Li}\alpha$ alles noch minder brechbare Rot ebenfalls durchlassen, und da das Innerste des



Fig. 2.

Li- α Flamme mit
dem axialen
„Cyan“-Faden.

metallfreien Bogens breite (dem Cyan zugerechnete) Banden in diesem Rot emittiert (13), so ist zu schließen, daß der eben beschriebene helle, axiale Teil des Bogens nicht etwa $\text{Li}\alpha$, sondern dem reinen Bogen zugehört. Dies ließ sich auch bestätigen. Wurde zwischen Auge und Bogen außer den farbigen Medien noch ein geradsichtiger Prismensatz eingefügt, so erschien nur der axiale Teil in der Dispersionsrichtung des Prismas verbreitert, die Mäntel nicht. Nickelchloridlösung, die das äußerste Rot bis $\text{Li}\alpha$ hin verschluckt, an Stelle des Prismensatzes gesetzt, läßt den axialen Teil verschwinden, so daß nunmehr die $\text{Li}\alpha$ -Mäntel in voller Reinheit erscheinen. Ätherische Chlorophylllösung an Stelle des Nickelchlorids leistet das Umgekehrte: die Mäntel verschwinden nahezu, der axiale Teil erscheint dagegen hell; es entspricht dies der schmalen aber kräftigen, mit $\text{Li}\alpha$ zusammenfallenden Absorptionsbande dieser Lösung.

15. Zur objektivspektroskopischen Beobachtung des Metallbogens ist noch zu bemerken, daß Inhomogenität der einzelnen emittierten Lichtarten möglichst vermieden werden muß, denn sie hat Verwaschenheit der Bogenbilder zur Folge. Die Inhomogenität wächst mit der Menge des Metaldampfes im Bogen; zugleich treten dann auch leicht Umkehrungserscheinungen in den Bogenbildern auf. Es waren daher weniger flüchtige Salze, z. B. Natriumsilikat, der Beobachtung günstiger als sehr flüchtige, z. B. Natriumbromid. Beim Lithium wurde ausschließlich das Karbonat benutzt. Die Inhomogenität der Emission wächst aber auch unter gleichen äußeren Umständen, wie bekannt, nach dem Violett zu; die höheren Glieder der Nebenserien des Natriums und Lithiums sind Nebelstreifen, und dies macht es erklärlich, daß von $n = 7$ ab die Flammen dieser Nebenserien nicht mehr hohl gesehen werden konnten.

16. Die Duplizität der einzelnen Glieder aller Serien des Natriums ließ bei diesem Metall nur entweder sehr geringe oder aber sehr starke Dispersion anwenden. Im ersten Fall blieb die Duplizität unmerklich und die Erscheinung der Hohlflammen war, wie beschrieben, zu beobachten; im letzteren Falle erscheint jede Hohlflamme doppelt, doch war teilweise Deckung der beiden Komponenten mit meinen Hilfsmitteln nicht zu vermeiden. Soweit zu sehen, waren die Flammen

der beiden Komponenten von $\text{Na}\alpha$ an Form und Größe einander gleich. Dasselbe war der Fall bei den weiter auseinander fallenden Doppelbildern der Hauptserien des Rubidiums und Cäsiums. Ebensowenig waren an den sehr scharf gezeichneten, gut beobachtbaren Hohlflammen des violetten Calciumdoublets, H und K der Sonne entsprechend (12), und an der dazwischen fallenden Aluminiumdoppellinie ($Hn = 3$ bei Kayser) irgend welche Größenunterschiede der Komponenten bemerkbar.

Eine räumliche Trennung der Emissionszentren der Komponenten solcher Liniengruppen hat sich demnach nicht ergeben.

17. Über die Lichtemission des Natriums hat mir die Beobachtung im Objektivspektroskop auch einige besondere Einzelheiten gezeigt, die nicht bekannt zu sein scheinen.¹⁾

Häufig erschien außer den zwei Nebenserien dieses Metalles noch eine dritte Serie von Flammenbildern, deren einzelne Glieder neben die der ersten Nebenserie nach dem Violett zu gelagert waren und zwar in regelmäßig abnehmenden Abständen, so daß diese dritte Serie nach derselben Kante hin zu konvergieren schien, wie die beiden ersten Nebenserien. Ich habe vier solcher Flammenbilder gesehen bei folgenden Wellenlängen:

- | | | | |
|----|-----------------|----------|---|
| 1. | Neben $I n = 4$ | gelegen, | $\lambda = 553 \cdot 10^{-6} \text{ mm},$ |
| 2. | „ $I n = 5$ | „ | $\lambda = 491,5 \cdot 10^{-6} \text{ „}$ |
| 3. | „ $I n = 6$ | „ | $\lambda = 463,8 \cdot 10^{-6} \text{ „}$ |
| 4. | „ $I n = 7$ | „ | $\lambda = 447 \cdot 10^{-6} \text{ „}$ |

Daß diese Wellenlängen der Natriumemission zugehören, schließe ich erstens daraus, daß sie nur dann erschienen, wenn die bekannte Emission des Natriums voll entwickelt vorhanden war, gleichgültig ob Natriumbromid oder -silikat benutzt war; zweitens aus dem Ansehen ihrer Flammen, welche, obgleich lichtschwach, doch nicht scharf, sondern sehr verwaschen waren, während die Flammen spurenweise im Bogen vorhandener Metalle, selbst wenn sie sehr inhomogenen Emissionen zugehören, wie beispielsweise Ca-H und K , stets in auffallender Schärfe erschienen; drittens endlich aus ihrer oben angegebenen Gruppierung. Die Flammen dieser Serie scheinen

1) Vgl. die Zusammenstellung über das Natriumspektrum bei H. Kayser, Auhang zu den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 21. 1890.

im Hohlraum der zweiten Nebenserie sich zu finden, denn je weniger verwaschen sie erschienen, desto geringer war ihre Breite. Hohlräume zeigten sie nicht; im besten Falle zogen sie sich zu schmalen Fäden zusammen, deren Ansatzstellen an der positiven Kohle weit nach Violett hin verwaschen waren. Läßt man die Einteilung der Serien nach Flammengrößen (12) gelten, so würde die hier beobachtete Serie mit Na *III* zu bezeichnen sein. Zur Messung der angegebenen Wellenlängen mußte der Spektralspalt benutzt werden, oder doch mindestens eine Kante desselben; dabei waren die Flammen geneigt, der Sichtbarkeit sich zu entziehen, ein Zeichen für die große Inhomogenität ihrer Lichter und der Grund, warum nur angenäherte Angaben der Wellenlängen möglich waren. In einem Falle, als die Linien schärfer als sonst erschienen, war an Stelle der oben mit 2 bezeichneten Linie eine verwaschene Doppellinie zu sehen, die nach Violett zu gelegene Komponente sehr schwach, der Abstand beider Linien etwa gleich dem der beiden Na α -Linien.

Außer der Serie Na *III* erschienen noch andere Lichtemissionen, für deren Zugehörigkeit zum Natrium ebenfalls die oben angegebenen Gründe sprechen; sie bildeten im Objektivspektroskop kleine Höcker an der positiven Kohle, welche das Natriumsalz enthielt. Solche Höcker waren rechts und links von den am besten beobachtbaren Flammen der ersten sowohl als der zweiten Nebenserie zu sehen, nämlich bei $In = 4$ und 5, bez. $II n = 5$ und 6. Die Begleiter der ersten Nebenserie waren deren Flammen dicht angelagert, der nach Violett zu gelegene Begleiter war deutlicher als der nach Rot zu gelegene. Es erscheint nicht zweifelhaft, daß der deutlichste dieser Begleiter der ersten Nebenserie mit der von den Herren Kayser und Runge gemessenen und außer den Serien belassenen Doppellinie $\lambda = 567,592$ und $567,040 \cdot 10^{-6}$ mm koinzidiert. Die Begleiter der zweiten Nebenserie waren sehr viel weiter rechts und links von den Gliedern dieser Serie entfernt und deshalb deutlicher zu beobachten, doch erschienen sie nicht oft. Ihre Örter waren bei $\lambda = 527; 510; 482; 473 \cdot 10^{-6}$ mm.

Die Existenz mehrerer Nebenserien bez. Satelliten im Spektrum des Natriums nähert die Alkalien in spektraler Hinsicht den anderen Metallen.

18. Die im vorliegenden mitgeteilten Beobachtungen haben in den verschiedenen Teilen der Flammen des metallhaltigen elektrischen Bogens Lichtquellen gezeigt, welche je eine einzelne Spektralserie gesondert emittieren. Auf die Frage, ob eine bestimmte Stelle des Bogens deshalb nur eine einzelne, bestimmte Serie liefere, weil die dort befindlichen Emissionszentren — als welche wir die Metallatome auffassen (1) — anderer Schwingungsweisen nicht fähig wären, oder deshalb, weil die dazu nötige Erregung dort fehlte, kann man zusammenfassend die Beobachtungen dahin deuten, daß jedes Metallatom im Bogen, während es die verschiedenen Flammenschichten passiert, eine Reihe verschiedener Zustände annehme, deren mindestens so viele sind, als sein Spektrum Serien enthält. Über diese Zustände selbst sagen die Beobachtungen zunächst nur aus, daß sie nicht etwa Resultat der elektrischen Strömung im Bogen sind, denn ihre räumliche Verteilung war ganz an die von den elektrischen Strömungslinien unabhängige Flammenform gebunden (6), was mehr auf Einflüsse chemischer Art zu deuten schiene.¹⁾

Soviel mir bekannt, lag bisher nur eine vereinzelte Beobachtung vor, welche mit dem hier Mitgeteilten zusammentrifft; sie bezieht sich auf den elektrischen Funken und speziell auf bestimmte Spektrallinien des Wismuts. Die Herren Schuster und Hemsalech haben gezeigt²⁾, daß im Funken von Wismutpolen die Emissionszentren bestimmter Linien mit der Geschwindigkeit von etwa 1400 m/Sek. sich durch den Raum bewegen, während die Emissionszentren anderer Linien desselben Metalles nur eine Geschwindigkeit von etwa 400 m/Sek. besitzen. Zwei Dinge, welche unter gleichen äußeren Umständen verschiedene Geschwindigkeiten annehmen, können nicht identisch beschaffen sein, und doch ist aller Grund vorhanden, jene Emissionszentren beider Art als Wismutatome anzusehen.

1) Frühere Beobachtungen an brennenden Gasen haben wahrscheinlich gemacht (Ann. d. Phys. 9. p. 642. 1902), daß die Metallatome in denselben fortwährend wechselnde elektrische Ladungen tragen. In der Reihe von Zuständen, welche dabei durchlaufen werden, muß einer der Emission der Hauptserie entsprechen, denn diese erscheint in den damals untersuchten Flammen.

2) A. Schuster u. G. Hemsalech, Phil. Trans. A, 193. p. 205 u. 207. 1899.

Im übrigen sind vermutungsweise und in unbestimmter Form Spektrallinien bez. Serien schon oft mit Atomzuständen verknüpft worden. Man ist hierin sogar soweit gegangen, ein Zerfallen der Atome anzunehmen und die verschiedenen Spektrallinien oder Serien eines Metalles ebenso vielen Sorten von Bruchstücken seiner Atome zuzuschreiben.¹⁾ Hierzu ist zu bemerken, daß, obgleich die geometrische Teilbarkeit der Atome nicht zu bezweifeln ist und obgleich die physikalische Teilbarkeit derselben um so näher gerückt erscheint, je mehr Einzelheiten neue Beobachtungen in unsere Bilder der Atome bringen, dennoch jeder Nachweis einer geschehenen Teilung fehlt.²⁾ Auch unter den extremen Verhältnissen des elektrischen Bogens oder Funkens sind bisher nur Erscheinungen beobachtet, welche auf das Vorhandensein ungeteilter Atome hinweisen: Sämtliche Spektralserien der Alkalimetalle beispielsweise bestehen aus Linienpaaren, und die Schwingungsdifferenz aller Paare ist Funktion des Atomgewichtes. Wenn danach bei der Emission aller Serien eines und desselben Metalles die ganze Masse seines Atomes eine Rolle spielt, so ist es das Nächstliegende, diese ganze Masse in den Emissionszentren auch als vorhanden anzunehmen.

Der Begriff des Atomzustandes zur Erläuterung der nun nachgewiesenermaßen getrennt möglichen verschiedenen Schwingungsweisen muß daher zunächst wohl in weiterem Sinne gefaßt bleiben.

Kiel, Ostern 1903.

1) Vgl. die Zusammenstellung der Literatur in H. Kayser, Handb. d. Spektroskopie 2. p. 265 ff. 1902.

2) Hr. J. J. Thomson weist in Hinsicht der Frage nach der Teilbarkeit der Atome darauf hin (Phil. Mag. (5) 48. p. 547. 1899), daß bei der Erzeugung von Kathodenstrahlen in einer Entladungsröhre die elektrischen Quanten der Strahlen, welche Masse besitzen, von den Atomen des Gases abgetrennt werden; jedoch erscheint das Resultat solcher Abtrennung nicht verschiedener vom ursprünglichen Atom als etwa ein elektrolytisches Ion verschieden ist von seinem Atom oder ein Cupro von einem Cupri Kupferatom, so daß auch hier der Nachweis der Teilung eines Atoms in eigentlichem Sinne noch aussteht.

(Eingegangen 12. April 1903.)

**14. Bemerkungen zu meiner Abhandlung „Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation“¹⁾;
von F. Pockels.**

1. Gelegentlich einer eingehenden Untersuchung über die „Änderung der Doppelbrechung in gespanntem Glase mit der Wellenlänge“²⁾ nimmt Hr. Filon auf die Angaben Bezug, welche ich in der oben zitierten Arbeit auf Grund meiner Beobachtungen mit Lithium- und Thalliumlicht über die *Dispersion der durch einseitigen Druck erzeugten Doppelbrechung* verschiedener Glassorten gemacht habe. Hr. Filon hält es nicht für befriedigend, daß ich in einigen Fällen eine Dispersion der Doppelbrechung, d. h. eine Abhängigkeit des Gangunterschiedes von der Wellenlänge, nur dadurch gefunden habe, daß ich die Dispersion der Doppelbrechung der *Quarzkeile*, mit Hülfe deren die Gangunterschiede gemessen wurden, als Korrektion in die Rechnung einführte. Hiergegen möchte ich betonen, daß diese Korrektion doch notwendig *angebracht werden muß*; und wenn die Verschiebung des Kompensatorstreifens infolge der Kompression der Glasplatte sich im Lithium- und Thalliumlicht ganz gleich ergibt, oder wenn die Beobachtung in weißem Licht zeigt, daß der schwarze Streifen des Kompensators bei seiner Verschiebung durchaus *farblos* bleibt, so ist demnach der Schluß berechtigt, daß die Abhängigkeit des Gangunterschiedes von der Farbe in der Glasplatte die gleiche ist, wie im kompensierenden Quarz.

Ferner ist die Bemerkung von Hrn. Filon (l. c. p. 491) nicht ganz zutreffend, daß ich nur für schwere Gläser eine merkliche Dispersion der Doppelbrechung gefunden hätte. Denn z. B. bei dem Glase S 205 — dem leichtesten aller von mir untersuchten — unterscheidet sich die für den Gangunter-

1) F. Pockels, Ann. d. Phys. 7. p. 745. 1902; 9. p. 220 1902.

2) L. N. G. Filon, Cambridge Phil. Soc. Proc. 11. p. 478. 1902; 12. p. 55. 1903.

schied maßgebende Konstante $n(p - q)/\omega$, welche his auf den Faktor $(1 + \nu)/E$ der von Hrn. Filon eingeführten Konstante C entspricht, für Li- und Tl-Licht um fast 3 Proz., d. i. um annähernd ebensoviel, als bei dem von Hrn. Filon untersuchten leichten Glase unbekannter Zusammensetzung. Andererseits ist die Dispersion der Doppelbrechung bei dem Glase O 500 (von der Dichte 4,73) fast verschwindend (anscheinend sogar von entgegengesetztem Sinne), so daß keineswegs alle „schweren“ Gläser eine erhebliche Zunahme des Gangunterschiedes mit abnehmender Wellenlänge zeigen, wie es Hr. Filon in jener Bemerkung ausspricht.

Bei dem Glase O 658 bedürfen die von mir (l. c. p. 755 unten) angegebenen Werte von $(p - q)/\omega$ für Li- und Tl-Licht einer kleinen Berichtigung, weil bei ihrer Berechnung die oben erwähnte Korrektur wegen der Dispersion des Quarzes vergessen worden ist. Die berichtigten Zahlen sind

	für Li:	für Tl:
$\frac{p - q}{\omega}$	= 0,1056,	0,1075,
$\frac{p - q}{\omega} \cdot n$	= 0,1632,	0,1866,

wonach also bei diesem Glase die Dispersion der Doppelbrechung den normalen Sinn besitzt.

2. Bei dem in meiner Abhandlung mit O 428 bezeichneten Glase ist in der Angabe der chemischen Zusammensetzung ein Irrtum vorgekommen. Ich entnahm dieselbe den in dem Werke von Hovestadt über „Jenaer Glas“ p. 148—150 enthaltenen Tabellen, worin für das Glas Nr. 428 angegeben ist: $56 \text{ B}_2\text{O}_3 + 32 \text{ PbO} + 12 \text{ Al}_2\text{O}_3$. Hr. Winkelmann hat mich nun kürzlich darauf aufmerksam gemacht, daß letztere Angabe, wie er aus den Büchern der Firma Schott durch Vergleichung der Brechungsindizes ermitteln konnte, sich auf ein Glas mit der Bezeichnung F. S. 428 bezieht, während das von mir untersuchte Glas O 428 die Zusammensetzung



besitzt. Auf dieser Verwechslung beruht die auffallend große Abweichung, welche sich zwischen den nach den Formeln von

Winkelman und Straubel aus der Zusammensetzung berechneten und den durch Hrn. Luyken experimentell bestimmten Elastizitätskonstanten E und ν zu ergeben schien (vgl. l. c. p. 221). Mit der obigen, richtigen Zusammensetzung des Glases O 428 gibt nämlich die Winkelmanssche Formel

$$E = 7353,$$

welcher Wert von dem beobachteten (7940) nicht stärker abweicht, als es auch bei anderen, ähnlich zusammengesetzten Gläsern vorkommt.

Bezüglich des Verhältnisses ν der Querkontraktion zur Längsdilatation wird die Übereinstimmung jetzt ebenfalls besser; nach den empirischen Formeln (C) und (E) von Straubel findet sich nämlich $\nu = 0,215$ bis $0,218$, aus den Beobachtungen von Luyken folgte $0,187$. Die Differenz kann hier zum Teil auch an einem Fehler des letzteren Wertes liegen, der sich aus den direkt beobachteten Werten des Elastizitätsmoduls und Torsionsmoduls nur mit relativ großer Ungenauigkeit ableiten läßt.

Heidelberg, April 1903.

(Eingegangen 21. April 1903.)

**15. *Kleine Neuerungen an der Ablesung mit Spiegel
und Fernrohr;
von Wilhelm Volkmann.***

Ungünstige Raumverhältnisse haben mich im vergangenen Winter gewisse Schwierigkeiten beim Gebrauch von Spiegelinstrumenten besonders schwer empfinden lassen. Aus dem Kampfe mit diesen Beschwerden sind einige neue Hilfsmittel hervorgegangen, die im folgenden beschrieben werden sollen.

Zur Beleuchtung der Skale wurde nach allerlei nicht recht befriedigenden Versuchen auf meinen Vorschlag von der „Verkaufsstelle sämtlicher Fabrikate für Elektrotechnik“, E. Bier-nath, Charlottenburg, Bleibtreustr. 42 eine neue Röhrenlampe erzeugt, die sich vortrefflich bewährt hat. Die Lampe besteht aus einem Glasrohr von etwa 2,5 cm Durchmesser und 52 cm Länge, in dessen Achse sich, durch mehrere Stützen gehalten, der Kohlenfaden befindet. Das Rohr ist auf drei Vierteln des Umfanges verspiegelt und die Lampe gibt bei 220 Volt eine Helligkeit von 25 Kerzen. Sie hat 5 Mark, eine halb so lange 16 Kerzenlampe für 110 Volt 2,50 Mark gekostet. Man kann die Lampe dicht über der Skale in wenigen Zentimetern Abstand befestigen und erhält dann eine hervorragend gleichmäßige Beleuchtung, die selbst bei sehr kleinen Spiegeln für eine starke Fernrohrvergrößerung ausreicht.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit auf die sehr schönen und billigen Holzskalen mit künstlichem, elfenbeinartigem Teilungsgrunde aufmerksam machen, die die Fabrik für Längenmaße von C. Bube, Hannover-Bothfeld nach eigenem Verfahren erzeugt. Dieser Teilungsgrund wirft das Licht sehr gut zurück und ermöglicht sehr zarte und scharfe Teilungsstriche, was für die Leichtigkeit und Schnelligkeit des Ablesens, wie für die Genauigkeit der Zehntelschätzung gleich bedeutsam ist. Die Teilung erwies sich bei der Prüfung meiner beiden Exemplare als bemerkenswert genau.

Große Spannweite der Deckenkonstruktion, starke Benutzung des Gebäudes und die Lage an einer Straße mit leb-

haften Last- und Straßenbahnverkehr verursachen in der landwirtschaftlichen Hochschule Erschütterungen von ungewöhnlicher Größe. Nachdem für das Instrument eine leidlich geschützte Aufstellung gefunden war, zeigte sich, daß Fernrohr und Skale dauernde und oftmals recht beträchtliche Vibrationen ausführten, wenn sie auf einem von den Dielen des Fußbodens getragenen Tischchen aufgestellt waren. Wurden Skale und Fernrohr an einem Wandarm angebracht, so blieben die Erschütterungen im allgemeinen unmerklich. Um nun auch den Abstand der Skale vom Spiegel ändern zu können, wurde der Fuß des Wandarmes zu einem Schlitten ausgebildet, dem als Führung ein an der Wand festgeschraubtes Brett dient. Dieses Brett ist etwas schräg angebracht und berührt nur mit einem Ende die Wand unmittelbar, hierdurch wird erreicht, daß eine durch den Skalenmittelpunkt gelegte Parallele zum Brett den Spiegel trifft. Auf das Brett geklemmte Schraubzwingen dienen als Anschlag, um eine einmal gebrauchte Einstellung genau wieder finden zu können. Man kann so für ein Galvanometer z. B. zwei Stellungen für ballistischen und statischen Gebrauch fixieren, bei denen ein Skalenteil einen bequemen Wert hat, was besonders bei vorläufigen Messungen viele Vorteile gewährt.

Berlin, Physik. Kabinett d. landwirtschaftl. Hochschule,
im April 1903.

(Eingegangen 14. April 1903.)

16. Bemerkung zu der Mitteilung:
„Die sprechende Flamme; von V. Gabritschewski
und A. Batschinski“;
von F. Himstedt.

Auf p. 223, Band 11 dieser Annalen schreiben die oben genannten Autoren: „Im Winter 1901 haben wir uns mit einigen Prozessen am Induktorium beschäftigt. Als einer von den Polen diente eine Bunsensche Flamme. Dabei wurde 1. der später von Hrn. Möhlmann beschriebene elektroskopische Effekt bemerkt und 2. eigentümliche periodische Änderungen der Form der Flamme, die einen Nullpunkt aufgewiesen haben, ähnlich dem Möhlmannschen Nullpunkt am Elektroskop.“

Hierzu glaube ich bemerken zu sollen, daß die Arbeit des Hrn. Möhlmann im hiesigen physikalischen Institut in den Jahren 1899 und 1900 ausgeführt ist, und daß die Dissertation schon im April 1901 gedruckt worden ist, also lange vor der Zeit, zu welcher die oben genannten Autoren ihre Untersuchung erst begonnen haben.

Freiburg i/B., April 1903.

(Eingegangen 30. April 1903.)

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 11.

1. Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper; von Gustav Mie.

1. In seinen berühmten Untersuchungen über die Continuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes hat van der Waals die Hypothese eingeführt, daß die Moleküle eines flüssigen Körpers im wesentlichen dieselben Bewegungen ausführen, wie die eines gasförmigen, dessen Moleküle den Raum sehr dicht erfüllen. Diese Hypothese ist, soweit mir bekannt ist, in allen späteren Untersuchungen über die kinetische Theorie der Flüssigkeiten und speziell die Theorie der Verdampfung beibehalten worden. Es sind hier zu nennen die Arbeiten von G. Jäger ¹⁾, W. Voigt ²⁾, C. Dieterici ³⁾, H. Kamerlingh-Onnes. ⁴⁾ Auch die sehr tief gehenden Untersuchungen von L. Boltzmann ⁵⁾ über die Dampfdruckkurve beruhen ganz auf der van der Waalsschen Hypothese.

Wenn nun diese Hypothese richtig wäre, so müßte die Molekularwärme eines Dampfes immer gleich der seiner Flüssigkeit sein. Das ist aber keineswegs der Fall. So ist z. B. die spezifische Wärme des Quecksilbers etwa doppelt so groß, wie die seines Dampfes, die des Wassers sogar dreimal so groß. Es kann also die van der Waalssche Hypothese nicht allgemein richtig sein, und ebenso auch die Theorien der Flüssigkeiten, die auf ihr beruhen.

Andererseits sind aber die Molekularbewegungen in den Flüssigkeiten jedenfalls zu kompliziert, als daß es beim heutigen

1) G. Jäger, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien Math.-phys. Kl. IIa. 99. p. 681. 861. 1890.

2) W. Voigt, Göttinger Nachr. Math.-phys. Kl. p. 341. 1896; p. 19. 261. 1897.

3) C. Dieterici, Wied. Ann. 66. p. 826. 1898.

4) H. Kamerlingh-Onnes, Arch. Néerland. 30. p. 101. 1897.

5) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 2. p. 167. 1898.

Stande unserer Kenntnisse von den Molekülen möglich wäre, ohne vereinfachende Annahmen an ihr Studium zu gehen. Es schien mir deshalb nicht unnötig, einmal gerade vom entgegengesetzten Standpunkt auszugeben, wie die eben zitierten Untersuchungen, und die Flüssigkeiten im wesentlichen den festen Körpern gleich zu setzen. In der Tat spricht bei den einatomigen Körpern, d. h. den Metallen, auf die ich mich im folgenden beschränken werde, vieles für diese Hypothese. Das geschmolzene Metall unterscheidet sich vom festen in allen seinen Eigenschaften sehr wenig. Dichtigkeit, Ausdehnungskoeffizient und vor allem spezifische Wärme ändern sich durch das Schmelzen nur um einige Prozente. Allein die unendlich viel größere Plastizität bat das flüssige Metall vor dem festen voraus. Dagegen besteht zwischen flüssigem Metall und Metaldampf eine scharfe Diskontinuität, besonders auch in den Werten der spezifischen Wärme, die im Dampf auf die Hälfte heruntergeht. Es wird sich freilich zeigen, daß man auf dem von mir eingeschlagenen Wege nur eine sehr rohe Annäherung gewinnt. Aber ich glaube, daß man auch zugleich erkennen wird, in welcher Weise die Theorie vervollständigt werden muß, wenn sie die Tatsachen besser wiedergeben soll.

Die Dampfdruckkurve.

2. Man kann die Dampfdruckkurve angenähert auf einem rein thermodynamischen Wege berechnen.¹⁾ Es sei q die Verdampfungswärme einer Substanz, gemessen pro Grammolekül. Sie setzt sich aus zwei Summanden zusammen, nämlich erstens derjenigen Energie Q , welche die Substanz selbst bei der Änderung ihres Aggregatzustandes aufnimmt, zweitens derjenigen Energie, die infolge der Volumenvergrößerung der Substanz unter Wirkung eines Druckes (des Dampfdruckes) nach außen abgegeben wird. Da man die Verdampfungswärme stets bei konstant gehaltenem Druck p mißt, so ist die nach außen abgegebene Energie $p \cdot (v_G - v_F)$, wo v_G und v_F das Volumen eines Grammoleküls im gasförmigen und im flüssigen Zustande beim Drucke p bedeuten. Da wir nur Annäherungsformeln suchen, so können wir v_F gegen v_G vernachlässigen und den Dampf als ideales Gas ansehen. Die gesuchte Arbeit

1) H. Hertz, Wied. Ann. 17. p. 177. 1882.

ist also $p \cdot v_G = R \cdot \Theta$, wo R die Gaskonstante, Θ die absolute Temperatur, bei der verdampft wird, bedeuten.

Satz 1. Die „innere Verdampfungsenergie“ Q und die „totale Verdampfungsenergie“ q stehen in der Beziehung zueinander:

$$(1) \quad q = Q + R \cdot \Theta.$$

Durch Anwendung der beiden Hauptsätze auf einen besonderen Kreisprozeß, den zuerst Hertz in der zitierten Abhandlung benutzt hat, bekommt man einen zweiten Satz.

Satz 2. Die innere Verdampfungsenergie Q eines Körpers ändert sich nahezu linear mit der Temperatur, es ist:

$$(2) \quad Q = Q_0 - (c_F - c_G) \cdot \Theta,$$

wo Q_0 eine mit der Temperatur nur sehr wenig variierende Größe bedeutet und c_F und c_G die spezifischen Wärmen der Flüssigkeit und des Dampfes pro Grammolekül sind, beide bei konstantem Volumen.

Da man bei Flüssigkeiten immer die spezifische Wärme bei konstantem Druck mißt, sei hier die Formel¹⁾ hingeschrieben, nach der man sie umrechnen muß:

$$(3) \quad c_{Fv} = c_{Fp} - \frac{v_F \cdot \alpha^2}{\kappa} \cdot \Theta.$$

Hier bedeutet v_F das Volumen eines Grammoleküls, α den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, κ die Kompressibilität. Rechnen wir hier κ in 1/Atm. (1 Atm. = 1 kg/qcm = 735,5 mm Hg) und v_F in ccm, so haben wir als Einheit der Energie natürlich nicht die Kalorie, sondern das Kilogrammzentimeter zu nehmen (1 cal = 42,7 kgcm). In diesem Maßsystem ist die Gaskonstante $R = 84,8$.

Durch einen zweiten Kreisprozeß findet man, wie ebenfalls Hertz gezeigt hat, die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur, d. h. die Dampfdruckkurve.

Satz 3. Kennt man die Verdampfungswärme einer Substanz, so tritt in die Beziehung zwischen Dampfdruck und Temperatur nur noch eine neue, mit der Temperatur sehr wenig veränderliche Größe C ein, die man für jede Substanz besonders experimentell ermitteln muß. Die Beziehung lautet nämlich:

$$(4) \quad p = C \cdot (R \cdot \Theta)^{-\frac{c_F - c_G - R}{R}} \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen 4. Wärme. p. 72. 1894.

Die Formeln (2) und (4) gelten nur dann, wenn man die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen c_F und c_G als unveränderlich mit der Temperatur ansehen darf.

Man kann wohl mit Sicherheit sagen, daß in den aufgeführten drei Sätzen alles enthalten ist, was man durch rein thermodynamische Überlegungen über diesen Gegenstand finden kann. Die Wissenschaft kann aber hier natürlich nicht stehen bleiben. Es drängt sich uns die unabweisbare Frage auf, ob nicht die beiden für die Substanz charakteristischen Größen Q_0 und C in einem notwendigen Zusammenhang mit ihren anderen physikalischen Konstanten stehen. Hier hat nun die kinetische Theorie einzusetzen und aus ihren Voraussetzungen ebenfalls die beiden Gleichungen (2) und (4) herzuleiten, um dann zugleich etwas Genaueres über Q_0 und C auszusagen.

Geht man nun von der van der Waalsschen Hypothese aus, so findet man, da ja $c_F = c_G$ angenommen wird:

$$Q = Q_0$$

$$p = C \cdot R \cdot \Theta \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

Die innere Verdampfungsenergie ist die Energie der Lage, die der Körper gewinnt, wenn man seine Moleküle, entgegen den van der Waalsschen Kohäsionskräften, auseinanderreißt und in weiten Abständen im Raum verteilt.¹⁾ Den Faktor C zu deuten, ist L. Boltzmann²⁾ gelungen. Es ist der reziproke Wert des Volumens, das den Zentren der Moleküle in der Flüssigkeit für ihre Bewegung noch zur Verfügung steht.

Das Boltzmannsche Verteilungsgesetz.

3. Ich denke mir ein bestimmtes Quantum der zu untersuchenden Substanz, in ein bestimmtes adiabatisches Gefäß eingeschlossen, bei einer ganz bestimmten Temperatur. Im allgemeinen wird ein Teil der Substanz im flüssigen (oder festen) Zustand vorhanden sein, der andere im gasförmigen. Ich denke mir nun ferner dieses System ungeheuer oftmal wiederholt in der Weise, daß das Gefäß, die Zahl der Moleküle und die Temperatur jedesmal genau dieselben sind, dagegen die Lage

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 60. 1893.

2) L. Boltzmann, l. c. p. 169.

eines jeden einzelnen Moleküles sowie seine Geschwindigkeit in jeder unter den gegebenen Verhältnissen denkbaren Art variiert. In dieser ungeheuren Zahl von Systemen möge nun eine gewisse Anzahl: $dN = \alpha \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dq_1 \cdot dq_2 \dots$ (von Systemen) vorhanden sein, in welchen sämtliche Moleküle bis auf eines genau gleiche Lagen und Geschwindigkeiten besitzen, während bei diesem einen herausgegriffenen Molekül die Koordinaten seines Schwerpunktes (p_1, p_2, p_3) und diejenigen Größen (p_4 etc.), die die Lage seiner einzelnen Atome zueinander bestimmen (die Lagrangeschen Koordinaten der Atome), in einem kleinen Intervall: ($p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$) bis ($p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, p_3 + dp_3, p_4 + dp_4, \dots$) auf alle mögliche Weise variieren und ebenso auch die Komponenten der Bewegungsgröße des Schwerpunktes (q_1, q_2, q_3) und die Größen (q_4 etc.), die den relativen Geschwindigkeiten seiner einzelnen Atome entsprechen, zwischen ($q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$) und ($q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3, q_4 + dq_4, \dots$). Lassen wir nun einige Zeit verstreichen, so werden sich Lage und Zustand sowohl des herausgegriffenen als auch sämtlicher anderen Moleküle in diesen dN Systemen vollständig geändert haben. Dagegen ist es wohl möglich, daß eine gewisse Anzahl $dN' = \alpha' \cdot dp_1 dp_2 \dots dq_1 \cdot dq_2 \dots$ von Systemen, die zur Zeit $t = 0$ eine ganz andere Anordnung hatten, jetzt die Anordnung angenommen haben, welche unsere dN Systeme zur Zeit $t = 0$ besaßen. Ist nun zu allen Zeiten und für jede beliebig herausgegriffene Anordnung der Moleküle $dN = dN'$, so ist in der ungeheuer großen Zahl von vorgestellten Systemen die Zustandsverteilung zu allen Zeiten die gleiche. Wir sagen die Zustandsverteilung unter den Systemen ist stationär.

Eine solche stationäre Zustandsverteilung bekommen wir, wenn wir uns die Anordnungen, die die Moleküle eines Systems hintereinander in unendlich kleinen, konstanten Zeitintervallen dt im Lauf der Zeit annehmen, zeitlich nebeneinander vorstellen.

L. Boltzmann¹⁾ hat nun aus dem Liouvilleschen Satz den folgenden sehr allgemeinen Satz hergeleitet.

Satz 4. Die Zustandsverteilung in der ungeheuer großen Zahl von Systemen, die wir uns vorstellen, ist stationär, wenn

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 103. ff. 1898.

die Anzahl dN derjenigen Systeme, in denen das herausgegriffene Molekül nach Lage und Zustand in dem Intervall $(p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots)$ bis $(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \dots, q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots)$ variiert, sich nach der folgenden Formel berechnet:

$$(5) \quad dN = c \cdot e^{-2h \cdot E} \cdot dp_1 \cdot dp_2 \dots dq_1 \cdot dq_2 \dots$$

vorausgesetzt, daß das Molekül mit keinem anderen sich in einer Wechselwirkung befindet. Hier bedeutet: E die Energie, die das Molekül im ganzen infolge seines Zustandes, der durch die Größen $p_1, \dots, q_1, q_2, \dots$ beschrieben wird, besitzt, ferner: c eine willkürliche Konstante, endlich ist h definiert durch:

$$(6) \quad \frac{n}{2h} = R \cdot \Theta,$$

wo n die Zahl der Moleküle in einem Grammmolekül, R die Gaskonstante, Θ die absolute Temperatur des betrachteten Körpers.

Steht jedoch das Molekül mit einem oder mehreren anderen in Wechselwirkung, und ist die dieser Wirkung entsprechende Energie der Lage E' , sind ferner die eigenen Energien der einzelnen mitwirkenden Moleküle: E_1, E_2, \dots, E_v , so ist die Anzahl dN derjenigen Systeme, in denen die Lagen und Zustände dieser v Moleküle in dem Intervall $(p'_1, \dots, q'_1, \dots, p''_1, \dots, q''_1, \dots, p^{(v)}_1, \dots, q^{(v)}_1, \dots)$ bis $(p'_1 + dp'_1, \dots, q'_1 + dq'_1, \dots, p''_1 + dp''_1, \dots, q''_1 + dq''_1, \dots, p^{(v)}_1 + dp^{(v)}_1, \dots, q^{(v)}_1 + dq^{(v)}_1, \dots)$ variieren, während alle nicht beteiligten Moleküle genau gleich angeordnet sind, nach folgender Formel zu berechnen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} dN &= c^v \cdot e^{-2h \cdot (E' + E_1 + E_2 + \dots + E_v)} \\ &\cdot dp'_1 \dots dq'_1 \dots dp''_1 \dots dq''_1 \dots dp^{(v)}_1 \dots dq^{(v)}_1 \dots \end{aligned} \right.$$

Hier sind c und h dieselben Konstanten, wie in Formel (5).

4. Um diesen Boltzmannschen Satz auf die Theorie der einatomigen Körper anzuwenden, müssen wir die Energien der Atome berechnen. Im Dampf stehen die Atome nur während verschwindend kleiner Zeiten, nämlich beim Zusammenprallen, in Wechselwirkung. Wir können deswegen die Zahl der Atome, die mit anderen in Wechselwirkung stehen, gegen die sich ganz frei bewegenden vernachlässigen, d. h. so rechnen, als ob alle Atome sich frei bewegten. Die einzige Größe, die

für die Berechnung der Energie in Betracht kommt, ist jetzt die Geschwindigkeit u . Sei die Trägheit des Atoms m , so ist:

$$(8) \quad E = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \dots$$

Das Boltzmannsche Verteilungsgesetz wird also hier zu dem Maxwell'schen Gesetz, das den einfachsten Spezialfall des ersteren darstellt.

In dem flüssigen (oder festen) Teil der Substanz kommt zu der Bewegungsenergie noch die Energie der Lage. Wir nehmen an, wie es übrigens schon der Liouvillesche Satz, also auch das Boltzmannsche Verteilungsgesetz, voraussetzt, daß zwischen den Atomen nur konservative Kräfte im Sinne der analytischen Mechanik wirken und daß die Energie der Lage V eine Funktion der Entfernungen zwischen den einzelnen Atomzentren r_{12}, r_{13}, \dots ist. Ferner nehme ich noch an, wie man es bei den sogenannten Fernwirkungen immer tut, daß sich die Energie der Lage darstellen lasse als eine Summe von Ausdrücken, deren jeder nur von der Entfernung je eines Atompaars abhängt:

$$(9) \quad V = \sum \psi(r_{ik}).$$

Wir wissen nun, daß die Kraftwirkung zwischen zwei Atomen in Entfernungen, die größer sind als der Durchmesser der Molekularsphäre, eine Anziehung ist (die van der Waals'sche Kohäsionskraft), dagegen, sobald die Molekularsphären sich berühren, eine Abstoßungskraft, die mit weiterer Annäherung außerordentlich schnell steigt (die Elastizität der Molekularsphären). Entsprechend können wir $\psi(r_{ik})$ in zwei Summanden zerlegen: eine positive Größe ψ_1 , die nur in kleinen Entfernungen, hier aber allein in Betracht kommt, und eine negative Größe $-\psi_2$, von der gerade das Umgekehrte gilt:

$$(10) \quad \psi = \psi_1 - \psi_2.$$

Wir wollen jetzt ausgehen von einer bestimmten Anordnung der Atome, bei welcher der Wert von V ein Minimum ist. Wir bezeichnen diesen Minimalwert mit V_0 und den durchschnittlichen Abstand zweier Atome, deren Molekularsphären sich berühren, bei dieser Anordnung mit r_0 . Die Anordnung selbst nennen wir die Gleichgewichtslage der Atome. In einem

festen Körper besteht die ganze Wärmebewegung nun einfach darin, daß die Atome um die Gleichgewichtslage Pendelschwingungen ausführen, indem jedes abwechselnd seine Bewegungsenergie in potentielle Energie umsetzt und umgekehrt. Ich nehme an, daß in einem flüssigen Körper der Vorgang im wesentlichen derselbe ist, nur daß hier die Atome weit genug gelagert sind, daß sie bei stärkeren Ausschlägen gelegentlich einmal zwischeneinander hindurchschlüpfen können. Dadurch wird ihre Konfiguration nur in der Weise geändert, daß in der entsprechenden Gleichgewichtslage mehrere Atome gegen früher miteinander vertauscht sind.

Um die Ausschläge der Atome um die Gleichgewichtslage angeben zu können, nehmen wir drei aufeinander senkrechte Richtungen als x -, y -, z -Richtung und nennen die Änderungen der Koordinaten eines Moleküls m_1 gegen die seiner Gleichgewichtslage: (x_1, y_1, z_1) , ebenso die eines Moleküls m_2 : (x_2, y_2, z_2) etc. Bezeichnen wir ferner die Richtungskosinus der Verbindungslinie r_0 zwischen m_1 und m_2 in der Gleichgewichtslage (λ, μ, ν) , so ist die Änderung ihrer Entfernung, die wir r' nennen wollen, wie eine kleine Rechnung ergibt:

$$r' = (x_1 - x_2) \cdot \lambda + (y_1 - y_2) \cdot \mu + (z_1 - z_2) \cdot \nu + \frac{1}{2 \cdot r_0} \cdot [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - ((x_1 - x_2) \lambda + \dots)^2].$$

Wir haben dabei die höheren Potenzen von r'/r_0 als unendlich klein höherer Ordnung gegen 1 vernachlässigt.

Damit die Rechnung etwas einfacher ist, stelle ich mir vor, die Anordnung der Atome in der Gleichgewichtslage sei ein kubisches Raumgitter, und r_0 sei der konstante Abstand eines Atoms von den sechs berührenden Atomen. Für die Wirkung zwischen m_1 und den sechs umgebenden Atomen kommt nach dem oben Gesagten nur der positive Teil Φ_1 der Funktion Φ in Betracht und zwar ist mit derselben Genauigkeit, die wir bei der Berechnung von r' anwandten:

$$\Phi(r_{12}) = \Phi(r_0) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot r' + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0 \cdot r'^2.$$

Wir wählen nun als die Koordinatenrichtungen naturgemäß die drei Kanten des Elementarwürfels des Raumgitters.

Es sei z. B. die Richtung von m_1 nach m_2 die x -Richtung, dann ist:

$$r' = (x_1 - x_2) + \frac{1}{2r_0} \cdot ((y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2)$$

und:

$$\begin{aligned} \Phi(r_{12}) = \Phi(r_0) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot (x_1 - x_2) + \\ \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0 \cdot (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot \right. \\ \left. \cdot ((y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2) \right]. \end{aligned}$$

Analog berechnen sich die Werte $\Phi(r_{13})$ und $\Phi(r_{14})$ für die Kraftwirkung zwischen m_1 und den beiden in den positiven Richtungen y und z gelegenen Molekülen m_3 und m_4 . Für alle entfernten Moleküle kommt nicht der Teil Φ_1 , sondern der negative Teil $-\Phi_2$ von Φ allein in Betracht. Aber aus dem, was wir oben über die verschiedene Natur der beiden Funktionen Φ und Φ_2 bemerkt haben, geht hervor, daß wir gegenüber den großen Werten, die $\partial \Phi_1 / \partial r$ annimmt, jedenfalls $\partial \Phi_2 / \partial r$ vernachlässigen können, ohne einen bemerkbaren Fehler zu machen. Wir erhalten somit schließlich, indem wir beachten, daß sich bei der Summation die linearen Glieder wegheben, für die Energie pro Grammmolekül:

$$(11) \quad F = F_0 + L$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} L = n \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0 \cdot \sum ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_4)^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2r_0} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \cdot \sum ((y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right. \\ \left. + (x_1 - x_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (x_1 - x_4)^2) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hier ist F_0 die potentielle Energie pro Grammmolekül in der Gleichgewichtslage. Die ganze Energie eines Grammmoleküls des flüssigen (oder festen) Körpers ist: $F_0 + L + T$, wenn wir setzen:

$$(13) \quad T = \frac{n}{2m} \cdot \sum (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Die Größe $L + T$ können wir passend den Wärmegehalt des Körpers nennen. Im Dampf ist die ganze Energie nur T .

Die Gleichgewichtsbedingung Dampf—Flüssigkeit.

5. Während sich für ein einatomiges Gas der vollständige Beweis ¹⁾ führen läßt, daß die einzige Zustandsverteilung, die mit dem zweiten Hauptsatz vereinbar ist, durch das Maxwell'sche Gesetz ausgedrückt wird, ist dieser Beweis für das allgemeine Boltzmannsche Gesetz noch nicht gelungen. Wir nehmen indessen mit Boltzmann als höchstwahrscheinlich an, daß er sich führen läßt, und betrachten das Boltzmannsche Gesetz als das richtige Charakteristikum der ungeordneten Molekularbewegung.

Ich denke mir nun die Substanz, die wir untersuchen, in ein Gefäß eingeschlossen, dessen Wandung wenigstens zum Teil wärmeleitend ist. Durch diesen Wärmeleiter stehe sie in Verbindung mit einem anderen Körper gleicher Temperatur. Dieses System denke ich mir wieder ungeheuer oftmal wiederholt, indem die Moleküle der betrachteten Substanz nach Maßgabe des Boltzmannschen Gesetzes alle möglichen Anordnungen bekommen. Ob und wie gleichzeitig auch die Moleküle des mit ihr wärmeleitend verbundenen Körpers in Lage und Zustand variieren, oder ob sie immer dieselbe Anordnung behalten, ist gleichgültig. Diese ungeheueren Zahl von Systemen bleibe nun einige Zeit sich selbst überlassen, ohne daß eine äußere Arbeit geleistet oder Wärme zu- oder abgeleitet wird, und ohne daß nicht umkehrbare Änderungen, z. B. chemische Umsetzungen, eintreten. Nach dem zweiten Hauptsatz muß dann die Temperatur in all den ungeheuer vielen Systemen konstant bleiben, außerdem aber, und das ist uns hier das Wesentliche, muß die Zustandsverteilung in der Substanz, die wir untersuchen, wie sie es anfangs war, die der ungeordneten Molekularbewegung bleiben. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so hätten wir in dem mit ihr wärmeleitend verbundenen Körper einen Apparat gewonnen, der die ungeordnete Molekularbewegung in eine anders geartete umwandelt.

Ich wende diese Betrachtungsweise auf den folgenden Fall an. Es sei ein Zylinder aus adiabatischem Material durch eine leicht verschiebbare wärmeleitende Querwand in zwei

1) L. Boltzmann, *Gasttheorie* 1. p. 32. ff. 1895.

Abteilungen A und B geteilt. In beiden Räumen befinde sich die untersuchte Substanz, und zwar im Raume A als gesättigter Dampf, während in B mindestens die gleiche Substanzmenge als Flüssigkeit vorhanden ist und außerdem vielleicht auch noch Dampf. Die Substanz in A sei die von uns betrachtete, der wir bei der oftmaligen Wiederholung alle möglichen Anordnungen nach Maßgabe des Boltzmannschen Gesetzes erteilen, indem wir für die Konstante c einen ganz bestimmten Wert festsetzen. Der Inhalt von B sei der fremde, mit ihr verbundene Körper. Die wärmeleitende Querwand möge nun von Anfang an eine unendlich kleine Geschwindigkeit in der Richtung $B - A$ haben. Es findet dann, indem Substanz in B verdampft und in A niederschlägt, ein umkehrbarer isothermer Vorgang statt, bei welchem von außen weder Wärme zu- oder abgeleitet, noch Arbeit geleistet wird. Die Zustandsverteilung in A bleibt also immer die Boltzmannsche. In dem gasförmig gebliebenen Teil der Substanz, wo Formel (5) unverändert anzuwenden ist, hat die Konstante c natürlich denselben Wert, wie zu Anfang. Da aber ferner ein fortwährender Austausch von Molekülen zwischen Dampf und Flüssigkeit stattfindet, so gilt dasselbe auch für den flüssigen Teil, wo nach Formel (7) zu rechnen ist. Diese Gleichsetzung von c für die Moleküle im Gasraum und im Flüssigkeitsraum liefert uns die Gleichgewichtsbedingung zwischen Dampf und Flüssigkeit. Wenn wir nämlich die wärmeleitende Querwand immer weiter vorrücken lassen, bis endlich die Substanz in A ganz verflüssigt ist, so bleibt dabei die Konstante c in dem Boltzmannschen Verteilungsgesetz immer dieselbe. Da ferner auch die ungeheuer große Zahl der vorgestellten Systeme gleichbleibt, so erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 5. Die Gleichgewichtsbedingung zwischen Dampf und Flüssigkeit ist, daß die gesamte Zahl der möglichen Anordnungen, berechnet durch Integration der Boltzmannschen Verteilungsformel (5) und (7) für eine gleiche Zahl Moleküle und bei gleichgewähltem c , sich als dieselbe ergibt, wenn man einmal die Substanz im Zustand des gesättigten Dampfes, das andere Mal als Flüssigkeit annimmt.

Wir wollen nun die Substanzmenge in A gerade gleich 1 Grammolekül wählen (Zahl der Moleküle n), ferner wollen

wir ihren Energiegehalt im flüssigen Zustand mit Q_F , im gasförmigen durch Q_G bezeichnen. Endlich sei die Integration über alle möglichen Anordnungen im gasförmigen Zustand durch den Buchstaben G , im flüssigen Zustand durch F angedeutet. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{-2h \cdot Q_G} \cdot \int_G dp_1' \dots dq_1' \dots dp_1^{(n)} \dots dq_1^{(n)} \dots \\ = e^{-2h \cdot Q_F} \cdot \int_F dp_1' \dots dq_1' \dots dp_1^{(n)} \dots dq_1^{(n)} \dots \end{array} \right.$$

Wir haben dabei e^n beiderseits weggehoben.

Die Gleichung (14) ist der für uns in Betracht kommende Spezialfall eines sehr allgemeinen Satzes von Boltzmann.¹⁾

Dampfdruckkurve einatomiger Körper.

6. Wir wollen unter W den Wärmegehalt, d. h. denjenigen Teil der inneren Energie des Körpers verstehen, der den unregelmäßigen Bewegungen der Moleküle zugehört. Nach 4. ist $W_G = T$, $W_F = L + T$, wo T und L nach (13) und (12) zu berechnen sind. Das Integrationsgebiet der beiden Integrale in (14) ist bestimmt durch die Gleichung $W = \text{konst.}$ und durch die Bedingung, daß die Atome alle innerhalb des Raumes v_G bez. v_F liegen. Ist W eine quadratische Funktion der Größen p und q , so hat Boltzmann²⁾ gezeigt, wie man die Integration ausführen kann. Nun ist in der Tat

$$W_G = T = \sum \frac{2}{m} \cdot q^2,$$

die Integration über alle q ergibt also nach Boltzmann²⁾:

$$\frac{(F(1))^{3n}}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)} \cdot (2m \cdot W_G)^{\frac{3n-2}{2}}.$$

Integrieren wir weiter über die Koordinaten des Atoms m_1 : p_1' , p_2' , p_3' , so ergibt sich, wenn wir den von den Wirkungssphären der Atome eingenommenen Raum gegen den leeren Raum als unendlich klein ansehen, mit anderen Worten, wenn

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 136. 1898.

2) l. c. p. 96 ff.

wir, wie in den Formeln (1), (2), (4), den Dampf als vollkommenes Gas betrachten:

$$\int dp_1' \cdot dp_2' \cdot dp_3' = v_0.$$

Dasselbe Resultat bekommen wir bei jedem Atom und erhalten schließlich für die linke Seite der Gleichung (14):

$$e^{-2\lambda \cdot q_0} \cdot v_0^n \cdot \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{3n}}{\Gamma(\frac{3n}{2})} \cdot (2m \cdot W_0)^{\frac{3n-2}{2}}.$$

Für die Flüssigkeit ist die Integration über die Koordinaten etwas schwieriger. Wir verfahren da so, daß wir die Moleküle zuerst um die Punkte eines kubischen Raumgitters herum kleine Bewegungen machen lassen und sie darauf auf alle mögliche Weise permutieren. Wir haben dann einfach das Integral, das wir für das kubische Raumgitter erhalten, mit $n!$ zu multiplizieren. Leicht auszuführen ist das Integral jedoch nur dann, wenn man in dem Ausdruck (12) für L den Faktor

$$\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_0 \text{ gegen } \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right)_0$$

vernachlässigen kann. Da die abstoßende Kraft $P = -\partial \Psi / \partial r$ an der Oberfläche der Molekularsphäre mit abnehmendem r außerordentlich schnell anwächst (vgl. 4.), so ist jedenfalls in erster Annäherung diese Vernachlässigung gestattet. Wir wollen deshalb zunächst einmal das Glied mit

$$\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_0$$

streichen, und nachher den Fehler, den wir gemacht haben, zu schätzen versuchen. Wir wollen ferner setzen:

$(x_1 - x_2) = \xi_1$, $(y_1 - y_3) = \eta_1$, $(z_1 - z_4) = \zeta_1$ und $(\partial^2 \Psi / \partial r^2)_0 = b$, dann ist:

$$W_F = \sum \frac{b}{2} \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \sum \frac{1}{2m} \cdot q^2.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} dp_1' \cdot dp_2' \cdot dp_3' \cdot dp_1'' \cdot \dots &= dx_1 \cdot dy_1 \cdot dz_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \\ &= \frac{1}{A} \cdot d\xi_1 \cdot d\eta_1 \cdot d\zeta_1 \cdot \dots, \end{aligned}$$

wo Δ die Funktionaldeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Der Wert dieser Determinante ist einfach $\Delta = 1$. Man kann nun das Integral auf der rechten Seite von (14) ebenfalls berechnen und bekommt:

$$e^{-2h \cdot Q_F} \cdot n! \cdot \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{6n}}{\Gamma(3n)} \cdot (2m)^{\frac{3n-2}{2}} \cdot \left(\frac{2}{b}\right)^{\frac{3n}{2}} \cdot (W_F)^{3n-1}.$$

Wir setzen nun die beiden durch die Integration gewonnenen Ausdrücke einander gleich und ziehen beiderseits die n^{te} Wurzel aus, indem wir beachten, daß:

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

und für sehr große Zahlen:

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2k \cdot \pi}.$$

Wir erhalten so:

$$v_G \cdot (W_G)^{3n} = \sqrt{\frac{e \cdot n^3}{27}} \frac{e^{\frac{2h}{n} \cdot (Q_G - Q_F)}}{\sqrt{n \cdot b^3}} \cdot W_F.$$

Nun ist aber nach (6):

$$\frac{n}{2h} = R \cdot \Theta.$$

Ferner ist¹⁾:

$$(15) \quad \begin{cases} W_G = 3n \cdot \frac{q_1}{2m} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2h} = \frac{3}{2} \cdot R \Theta, \\ W_F = 6n \cdot \frac{q_2}{2m} = 3 \cdot \frac{n}{2h} = 3 \cdot R \Theta. \end{cases}$$

Endlich ist die Differenz $Q_G - Q_F$ nichts anderes als diejenige Energie, die der Körper gewinnt, wenn man ihn aus dem flüssigen (oder festen) Aggregatzustand in ein Gas von gleicher Temperatur umwandelt, d. h. also die innere Verdampfungsenergie, gerechnet pro Grammolekül:

$$(16) \quad Q_G - Q_F = Q.$$

Unsere Gleichung wird jetzt:

$$v_G = \frac{\sqrt{8 \cdot e \cdot \pi^2}}{\sqrt{n \cdot b^3}} \cdot e^{-\frac{Q}{R \Theta}} \cdot (R \Theta)^{1/2}.$$

Wenden wir jetzt noch die Zustandsgleichung der idealen Gase auf den Dampf an: $p \cdot v_G = R \cdot \Theta$, so bekommen wir schließlich die gesuchte Gleichung der Dampfdruckkurve:

$$(17) \quad p = \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8 e \cdot \pi^2}} \cdot (R \cdot \Theta)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

Aus den Gleichungen (15) ergibt sich die spezifische Wärme des Dampfes und der Flüssigkeit bei konstantem Volumen pro Grammolekül:

$$(18) \quad c_G = \frac{3}{2} R, \quad c_F = 3 R.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist das sogenannte Dulong-Petitsche Gesetz.²⁾

Man erkennt jetzt, daß Gleichung (17) in der Tat die Formel (4) in dem Fall einer einatomigen Substanz ist, wenn man setzt:

$$(19) \quad C = \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8 e \pi^2}}.$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 100. 1898; 1. p. 50. 1895.

2) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 708. 1893.

Um diese Formel etwas anschaulicher zu deuten, wollen wir uns den Mittelwert $\overline{\xi_1^2} = \overline{(x_1 - x_2)^2}$ berechnen. Es ergibt sich:

$$\overline{\xi_1^2} = \frac{1}{2 h \cdot b}.$$

Dasselbe für η_1^2 und ζ_1^2 . Wir setzen nun

$$\overline{\xi_1^2} + \overline{\eta_1^2} + \overline{\zeta_1^2} = \lambda^2,$$

also

$$\lambda = \sqrt{3/2} \, h \cdot b.$$

Um uns die Bedeutung von λ klar zu machen, wollen wir durch die drei Atome m_2, m_3, m_4 , welche m_1 benachbart sind, eine Kugelfläche vom Radius r_0 legen. In der Gleichgewichtslage bildet m_1 das Zentrum dieser Fläche. Bei der unregelmäßigen Wärmebewegung vibriert nun erstens diese Kugel als Ganzes, zweitens schwingen die drei Atome m_2, m_3, m_4 tangential auf ihrer Oberfläche, drittens endlich schwingt m_1 um das Zentrum und zwar ist λ das quadratische Mittel seiner Ausschläge. Derjenige Ausschlag, der am häufigsten vorkommt, ist:

$$\lambda_w = 1/\sqrt{h \cdot b}.$$

Wenn man ferner beachtet, daß $n \cdot r_0^3 = v_F$, so bekommt man nun durch eine kleine Rechnung:

$$\frac{r_0^3}{\lambda_w^3} = \frac{v_F}{(\Theta \cdot R)^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8}}.$$

oder:

$$(20) \quad C = \frac{1}{v_F \cdot n^3} \cdot \frac{(\Theta \cdot R)^{3/2}}{v_F} \cdot \left(\frac{r_0}{\lambda_w} \right)^3.$$

$$(21) \quad \frac{\lambda_w}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{v_F \cdot n^3 \cdot C \cdot v_F}} \cdot (R \Theta)^{3/2}.$$

7. Wir müssen jetzt noch den Fehler ermitteln, den wir gemacht haben, als wir das Glied mit dem Faktor $1/r_0 \cdot (\partial \Phi / \partial r)_0$ wegließen. Wir setzen:

$$\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_0 = -h_1,$$

b_1 ist eine positive GröÙe, die klein ist gegen b . Wir wählen jetzt neue Variable ξ, η, ζ , indem wir setzen:

$$\xi_1^2 = (x_1 - x_2)^2 - \frac{b_1}{b} \cdot ((x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2),$$

$$\eta_1^2 = (y_1 - y_3)^2 - \frac{b_1}{b} \cdot ((y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_4)^2),$$

$$\zeta_1^2 = (z_1 - z_4)^2 - \frac{b_1}{b} \cdot ((z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2).$$

Vernachlässigen wir die höheren Potenzen von b_1/b , so ist:

$$\xi_1 = (x_1 - x_2) - \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)}.$$

In die Funktionaldeterminante Δ haben wir einzusetzen:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1 + \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{b_1}{b} \cdot \frac{(x_1 - x_3) + (x_1 - x_4)}{(x_1 - x_2)} \text{ statt } 1,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -1 - \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^2} \text{ statt } -1,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = + \frac{b_1}{b} \cdot \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} = + \frac{b_1}{b} \cdot \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_3} \text{ statt } 0.$$

Man erhält:

$$\Delta = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \dots$$

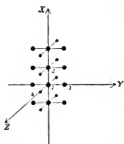
Nun ergibt eine leichte Umrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 1 - \frac{b_1}{b} + \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^2} \\ &= e^{-\frac{b_1}{b} + \frac{b_1}{2b} \cdot \frac{(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^2}}, \end{aligned}$$

wenn wir wieder die höheren Potenzen von b_1/b vernachlässigen. Wir berechnen nun gleich, da wir, um die Druckkurve zu erhalten, die n^{te} Wurzel ausziehen:

$$\Delta^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{3b_1}{b} + \frac{3b_1}{2b} \cdot \frac{(x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}{(x_1 - x_2)^2},$$

wo der horizontale Strich wie immer andeuten soll, daß der Mittelwert der betreffenden Größe zu nehmen ist. Dieser



Mittelwert läßt sich leider bei den von uns gemachten Voraussetzungen nicht exakt berechnen. Wenn wir nämlich, wie wir bei unserer Berechnung getan haben, wirklich nur abstoßende Kräfte zwischen den Atomen annehmen wollten, so müßten wir schließen, daß sich die Reihe der auf der x -Achse befindlichen Atome (zu denen m_1 und m_2 gehören) gegen die an diese Reihe anstoßenden

(z. B. m_3 und m_4) beliebig weit verschieben könnten, ohne Widerstand zu erfahren, solange nur in der Reihe selbst die Abstände ungeändert bleiben. Wollten wir genau rechnen, so müßten wir noch die Kräfte einführen, die diese Verschiebung verhindern. Ohne die Kenntnis dieser Kräfte können wir nur soviel sagen, daß die Mittelwerte $(x_2 - x_3)^2 / (x_1 - x_2)^2$ und ebenso $(x_2 - x_4)^2 / (x_1 - x_2)^2$ jedenfalls größer als 1 sind. Es ist also $\Delta^{1/n} = k$ eine nicht sehr große Zahl, aber jedenfalls größer als 1, sagen wir etwa $k \sim 1 + b_1/b$. Formel (19) ist zu ersetzen durch:

$$(22) \quad C = k \cdot \sqrt{\frac{n \cdot b^3}{8 \epsilon \pi^2}}.$$

Ungeändert bleibt die Berechnung des Wärmehaltes und demgemäß auch Formel (18). Formel (20) und (21) sind nur als rohe Annäherungsformeln verwendbar.

Verdampfungsenergie.

8. Wenn man eine Flüssigkeit in Dampf verwandelt, so ändert sich erstens die potentielle Energie, die der Körper bei Gleichgewichtslage der Moleküle besitzt, zweitens der Wärmegehalt. Der erste dieser beiden Summanden ist sehr oft von der Temperatur nur wenig abhängig, da die Flüssigkeit beim Erwärmen ihr Volumen nur wenig ändert und folglich die Gleichgewichtslage auch ungeändert bleibt, und da in den Gasen mit der Volumenänderung überhaupt keine wesentliche Energieänderung verbunden ist. Dieser Summand ist also die

in Formel (2) mit Q_0 bezeichnete Größe. Der zweite Summand läßt sich nur dann berechnen, wenn die spezifische Wärme bei konstantem Volumen in beiden Aggregatzuständen nicht von der Temperatur abhängt. Dann ist der Wärmehalt der Flüssigkeit $c_F \cdot \Theta$, der des Gases $c_G \cdot \Theta$. Man erhält so auch durch die kinetische Betrachtungsweise die Formel (2). Speziell für einatomige Körper ist (nach 4.)

$$Q = -V_0 - L = Q - \frac{3}{2} R \cdot \Theta.$$

Wir wollen jetzt versuchen, nach den Voraussetzungen, die wir über die zwischen den Atomen wirkenden Kräfte gemacht haben, die Größe Q_0 etwas genauer zu berechnen. Es sei, wie in 4. — $\Phi_2(r_{ik})$ die potentielle Energie der van der Waalsschen Kohäsionskraft zwischen den Molekülen m_i und m_k . Setzen wir

$$n \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \Phi_2(r) \cdot 4\pi r^2 dr = A,$$

also bezeichnen wir die bekannte Konstante der van der Waalsschen Theorie, die gewöhnlich als a geschrieben wird, mit A , so ist der eine Summand der Energie Q_0 gleich A/v_F .¹⁾ Von dem anderen Teil der potentiellen Energie, der den elastischen Abstoßungskräften der Molekularsphären entspricht, wollen wir annehmen, daß sie sich ungefähr durch einen Ausdruck folgender Form berechnen läßt:

$$\Phi_1(r) = \frac{a}{r^v}.$$

Der entsprechende Summand von Q_0 ist $-3n \cdot a/r_0^v$. Hier ist a eine Konstante; r_0 dagegen ist proportional mit $\sqrt[3]{v_F}$, denn $v_F = n \cdot r_0^3$. Wir können daher setzen:

$$3n \cdot a/r_0^v = B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}},$$

wo B eine zweite für die Substanz charakteristische Konstante ist. Es ist also:

$$(23) \quad Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}},$$

$$(24) \quad Q = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} - \frac{3}{2} R \cdot \Theta.$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 60. 1893.

Die Konstante B steht in einer einfachen Beziehung zu der in der Dampfdruckgleichung vorkommenden Konstanten C . Da nämlich

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)_e = b = \frac{\nu \cdot (\nu + 1) \cdot a}{r_0^{\nu+2}}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} \cdot b &= \nu \cdot (\nu + 1) \cdot n \cdot \frac{a}{r_0^\nu} \cdot (n \cdot r_0^\nu)^{-1/n} \\ &= \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu+2}{3}}, \end{aligned}$$

so ist:

$$(25) \quad C = k \cdot \sqrt{\frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{8 \cdot 27 \cdot e \cdot \pi^2}} \cdot B^{\frac{3}{2}} \cdot v_F^{-\frac{\nu+2}{2}},$$

wo k der in 7. eingeführte Zahlenfaktor ($k \sim 1 + b_1/b$) ist. Da

$$-\frac{1}{r_0} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_e = b_1 = \frac{\nu \cdot a}{r_0^{\nu+2}},$$

so ist $b_1/b = 1/(\nu + 1)$, also in der Tat eine ziemlich kleine Zahl, wenn ν groß ist.

Für den häufigsten Ausschlag der Atome λ_w liefert nun Formel (21):

$$(26) \quad \frac{\lambda_w}{r_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot R \Theta}{\nu \cdot (\nu + 1) \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}}}}.$$

Wir wollen endlich, da $B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}}$ die überall wiederkehrende Größe ist, die Formel (25) noch folgendermaßen schreiben:

$$(27) \quad B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} = \frac{6 \cdot \pi \cdot \sqrt[3]{e}}{\nu \cdot (\nu + 1) \cdot \sqrt[3]{k^2}} \cdot (C \cdot v_F)^{2/3}.$$

Bemerkung über mehratomige Körper.

9. Alle bisher angestellten Untersuchungen würden sich auf mehratomige Körper ohne weiteres übertragen lassen, wenn auch für sie der Unterschied zwischen der spezifischen Wärme des Dampfes und der Flüssigkeit regelmäßig $\frac{3}{2} \cdot R$ betrüge. Denn in diesem Falle könnten wir annehmen, daß die Bewegungen der Moleküle in der Flüssigkeit dieselben wären, wie im Dampf, und daß zu dem Wärmegehalt der Flüssigkeit nur noch die durch Formel (12) definierte Größe L hinzukäme. Ich habe in der folgenden Tab. 1 die spezifischen Wärmen einiger Körper

im flüssigen und im dampfförmigen Zustande zusammengestellt. Dabei ist c_F aus der beobachteten Zahl nach Formel (3) ausgerechnet. Außer bei Wasser, welches bekanntlich eine besonders kleine thermische Ausdehnung zeigt, ist c_F beträchtlich kleiner als das beobachtete c_{FP} . Leider sind die Zahlen nicht ganz sicher, besonders werden für die Kompressibilität α von verschiedenen Beobachtern ziemlich abweichende Zahlen angegeben. Für die Flüssigkeiten ist die spezifische Wärme bei ca. 20°, für die Dämpfe bei höheren Temperaturen hingeschrieben. Man darf daher nicht allzuviel aus der Vergleichung der Zahlen schließen wollen.

Tabelle 1.

		c_F	c_F/R	c_G/R
Wasser	H ₂ O	18.0,98	8,9	3,3
Schwefelkohlenstoff	CS ₂	76.0,15	5,7	5,0
Chloroform	CHCl ₃	120.0,12	7,2	8,4
Methylalkohol	CH ₃ OH	32.0,50	8,0	6,3
Äthylalkohol	C ₂ H ₅ OH	46.0,48	11,0	9,4

Während, mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit der Zahlen, bei den vier letzten Substanzen sehr wohl die Möglichkeit vorhanden ist, daß entweder die van der Waalssche Hypothese oder die dieser Arbeit zu Grunde gelegte das Richtige trifft, ist dies beim Wasser gänzlich ausgeschlossen. Die Bewegungsfreiheit der Moleküle im flüssigen Wasser ist außerordentlich viel höher als die im Wasserdampf. Wenn im flüssigen Wasser alle drei Atome sich völlig frei relativ zueinander und zu den benachbarten Molekülen bewegen können und gleichzeitig bei ihrer Bewegung elastische Kräfte in Wirkung treten, in der Art, wie wir sie in 4. kennen gelernt haben, dann erhalten wir für den Wärmegehalt eines Grammmoleküls Wasser:

$$3 \cdot (T + L) = 9 \cdot R \cdot \Theta,$$

also für die spezifische Wärme den Wert $c_F = 9 R$. Es scheint mir nicht unmöglich, daß sich die Atome der Wassermoleküle ungefähr in der beschriebenen Weise bewegen. Wenn andererseits in den Dampfmolekülen die Verkettung der Atome so ist, daß die beiden Wasserstoffatome sich frei bewegen können,

solange ihr Abstand vom Sauerstoffatom nur konstant bleibt, also gerade so, als ob jedes an einer starren Stange sitzt, die am Sauerstoffatom durch ein Kugelgelenk befestigt ist, dann hat die Bewegungsfreiheit den Grad: $3 + 2 + 2 = 7$, und wenn bei diesen Bewegungen keine elastischen Kräfte ins Spiel treten, so erhalten wir $c_G = 3,5 \cdot R$.

Ob die beiden geschilderten Mechanismen die Wirklichkeit ungefähr wiedergeben, müssen wir natürlich dahingestellt sein lassen. Nur das eine läßt sich mit einem sehr hohen Grad von Wahrscheinlichkeit behaupten, daß die Atome im Molekül des Wassers eine größere Beweglichkeit haben, als im Molekül des Dampfes.

In solchen Fällen aber versagt die Boltzmannsche Methode vollständig, weil der Liouvillesche Satz auf sie nicht angewendet werden kann.

Bemerkung über den Liouvilleschen Satz.

10. Boltzmann hat aus dem Liouvilleschen Satz den eminent wichtigen Schluß¹⁾ gezogen, daß jedem Freiheitsgrade der Bewegung des Moleküls dieselbe kinetische Energie zukommt, und zwar gilt dieser Satz ohne Rücksicht darauf, ob die Substanz gasförmig, flüssig oder fest ist.

Damit ist die Vorstellung, die wir soeben über das Wassermolekül als sehr wahrscheinlich gewonnen haben, durchaus unvereinbar. Man denke sich nur ein Molekül, das gerade aus dem Wasser in den Dampf übergeht. Solange es noch im Wasser ist, müßten die Wasserstoffatome auch in der Richtung ihrer Verbindungslinie mit dem Sauerstoffatom Schwingungen ausführen, deren mittlere kinetische Energie ebenso groß ist, wie die der Schwingungen in einer zur Verbindungslinie senkrechten Richtung. Sobald es in den Dampf übergegangen ist, müßten die Schwingungen der zuerst genannten Art völlig aufhören, während die der zweiten Art bestehen bleiben. Es ist klar, daß das ein Widerspruch gegen den Boltzmannschen Satz, also auch gegen den Liouvilleschen Satz ist.

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 100. 1896.

Bei dieser Gelegenheit sei auch auf das eigentümliche Verhalten des reinen Kohlenstoffs hingewiesen, dessen Atomwärme bei sehr hohen Temperaturen nahezu den Wert $3 \cdot R$ hat, während sie bei niedrigen Temperaturen unter $0,5 R$ heruntergeht. Da ein allmähliches Anwachsen der Zahl der Freiheitsgrade von äußerst kleinen Werten bis zu dem der einatomigen Körper unmöglich ist, so dürfte sich das Verhalten des Kohlenstoffs wohl auch sehr schwer mit dem Boltzmannschen Satz vereinigen lassen.

In der Tat beruht der Liouvillesche Satz auf einer Voraussetzung, die in vielen Fällen jedenfalls nahe zutrifft, aber doch nicht in allen, nämlich der: daß die auf die Moleküle und Atome wirkenden Kräfte sich als konservative Fernkräfte im Sinne der analytischen Mechanik berechnen lassen. Nun wird aber durch die Wärmeschwingungen der Moleküle auch der Äther zu einem besonderen Schwingungszustand erregt, er nimmt nämlich den Zustand der sogenannten „schwarzen Strahlung“ an. Die Wechselwirkungen zwischen Äther und Molekülen, die zweifellos vorhanden sind, sind in den Bewegungsgleichungen der Atome noch ausgelassen. Man muß also diese Gleichungen jedenfalls noch durch Glieder ergänzen, die nicht mehr den Charakter der konservativen Kräfte, sondern eher den von Reibungskräften haben, und denen ein Energieverlust durch die Strahlung entspricht. Diese Glieder sind in sehr vielen Fällen jedenfalls gegen die konservativen Kräfte zu vernachlässigen. In anderen Fällen sind sie aber vielleicht gerade die vorherrschenden und es wird deswegen die betreffende Bewegungskomponente so stark gedämpft, daß man sie gleich Null setzen kann.

Die Einführung dieser Wechselwirkungen zwischen Atomen Äther in die Theorie mag wohl sehr schwierig sein, aber jedenfalls ist nicht zu hoffen, daß man eine genügende Theorie der mehratomigen Körper entwickeln kann, ehe dies geschehen ist.

Zustandsgleichung einatomiger Körper.

11. Die Zustandsgleichung der Körper ist bekanntlich durch den Virialsatz ausgedrückt:

$$\sum m \bar{u}^2 + \sum (\bar{x} \cdot X + \bar{y} \cdot Y + \bar{z} \cdot Z) + \sum \bar{r}_{ik} \cdot f(r_{ik}) = 0.$$

Hier bedeutet u die Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt eines Moleküls bewegt, (x, y, z) sind die Koordinaten des Schwerpunktes, X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kraft, die auf das Molekül wirkt, r_{ik} ist die Entfernung zweier Molekülzentren m_i und m_k , $f(r_{ik})$ die gegenseitige Kraftwirkung, positiv gerechnet, wenn es eine Abstoßung ist. Die horizontalen Striche sollen bedeuten, daß die Mittelwerte zu nehmen sind.

Die Werte der beiden ersten Summanden sind bekannt:

$$\sum m \bar{u}^2 = 3 R \cdot \Theta,$$

$$\sum (x \cdot \bar{X} + y \cdot \bar{Y} + z \cdot \bar{Z}) = -3 p v.$$

Dabei ist angenommen, daß die einzige äußere Kraft ein auf der ganzen Oberfläche gleichmäßig wirkender, normal gerichteter Druck p ist. v ist das Volumen eines Grammoleküls.

Den letzten Summanden zerlegen wir, geradeso wie in 4. die entsprechende Energie in zwei Summanden, indem wir setzen: $f(r) = f_1(r) - f_2(r)$, wo $f_1 = -\partial \Phi_1 / \partial r$, $f_2 = -\partial \Phi_2 / \partial r$. Wir nehmen geradeso, wie in 4. an, daß man genau genug rechnet, wenn man setzt: $\sum f_2(r) \cdot r = \sum f_2(r_0) \cdot r_0$. Nun ist aber das Virial dieser Kräfte schon von van der Waals berechnet worden zu $3 A \cdot v^{-1}$, wir haben also:

$$\sum f(r) \cdot r = \sum f_1(r) \cdot r - 3 A \cdot v^{-1}.$$

In Gasen ist der erste Summand sehr klein (er hat in der genaueren van der Waalsschen Gleichung, wie Boltzmann¹⁾ berechnet, den Wert $3 R \Theta \cdot b/v \cdot (1 + 5 b/8 v)$, wo b die zweite van der Waalssche Konstante bedeutet), in Flüssigkeiten und festen Körpern dagegen nimmt er sehr beträchtliche Werte an. Wir berechnen ihn durch eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned} f_1(r) \cdot r &= f_1(r_0) \cdot r_0 + (f_1(r_0) + r_0 \cdot f_1'(r_0)) \cdot r' \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (2 f_1'(r_0) + r_0 \cdot f_1''(r_0)) \cdot r'^2. \end{aligned}$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie 2. p. 151. 1898.

Nehmen wir, wie in 8. an, daß $\Phi_1(r) = a/r^v$, so ist

$$f_1(r) = v \cdot a/r^{v+1}, \quad f_1'(r) = v \cdot (v+1) \cdot a/r^{v+2},$$

$$f_1''(r) = v \cdot (v+1) \cdot (v+2) \cdot a/r^{v+3},$$

also:

$$\begin{aligned} f_1(r) \cdot r &= v \cdot \frac{a}{r_0^v} - v^2 \cdot \frac{a}{r_0^{v+1}} \cdot r' + \frac{v^3 \cdot (v+1)}{2} \cdot \frac{a}{r_0^{v+2}} \cdot r'^2 \\ &= v \cdot \left(\Phi(r_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_0 \cdot r' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)_0 \cdot r'^2 \right) \end{aligned}$$

$$\sum f_1(r) \cdot r = v \cdot \left(B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} + \frac{3}{2} R \Theta \right),$$

wo B die in Formel (23) und (24) eingeführte Konstante ist.

Wir haben nunmehr die Zustandsgleichung der einatomigen Körper im festen (oder flüssigen) Zustand gewonnen:

$$(28) \quad p \cdot v_F + A \cdot v_F^{-1} - \frac{v}{3} B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} = \frac{v+2}{2} \cdot R \cdot \Theta.$$

Aus der Ableitung dieser Formel geht hervor, daß sie nur so lange gilt, als die spezifische Wärme des Körpers konstant den Wert $3R$ hat. Sobald in den Ausdruck für den Wärmehalt höhere Potenzen von Θ eintreten (also c_F sich mit der Temperatur ändert), müssen auch auf der rechten Seite von (28) höhere Potenzen von $R \Theta$ auftreten.

Wir wollen jetzt einmal (28) nach p differenzieren, indem wir Θ konstant halten. Wir bekommen auf diese Art die Kompressibilität κ des Körpers, deren reziproker Wert der Kompressionsmodul γ ist:

$$(29) \quad -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = \kappa = \frac{1}{\gamma}.$$

Es ergibt sich:

$$(30) \quad \gamma = p + \frac{v^2}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}-1} - A \cdot v_F^{-2}.$$

Da die Drucke, die man bei den Messungen anwendet, auch in den extremsten Fällen ganz verschwindend klein sind gegen γ , so kann man auch einfacher schreiben:

$$(31) \quad \gamma = \frac{v^2}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}-1} - A \cdot v_F^{-2},$$

oder:

$$(32) \quad \gamma = \frac{v \cdot (v-3)}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}-1} - R \cdot \Theta \cdot v_F^{-1}.$$

Wenn wir andererseits (28) nach Θ differenzieren bei konstantem p , so bekommen wir den thermischen Ausdehnungskoeffizienten:

$$(33) \quad \alpha = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \Theta}.$$

Man erhält:

$$\alpha \cdot \left(p + \frac{\nu^2}{9} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}-1} - A \cdot v_F^{-2} \right) = \frac{\nu+2}{2} \cdot R \cdot v_F^{-1},$$

oder mit Rücksicht auf (30):

$$(34) \quad \alpha = \frac{\nu+2}{2} \cdot \frac{R}{\gamma \cdot v_F}.$$

Differenziert man noch einmal nach Θ , so bekommt man:

$$(35) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \Theta} = \frac{2}{\nu+2} \cdot \frac{\alpha^2}{R} \cdot \left(R + \frac{\nu^2 \cdot (\nu-3)}{27} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} \cdot \alpha \right).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nun folgendes:

Erstens, da der Kompressionsmodul γ stets eine positive Größe ist, so zeigt Gleichung (32), daß jedenfalls:

$$(36) \quad \nu > 3.$$

Zweitens, da $\nu > 3$, so liefert (35) stets einen positiven Wert für $\partial \alpha / \partial \Theta$. *Der Ausdehnungskoeffizient der einatomigen Körper nimmt stets mit steigender Temperatur zu und zwar wächst er bei hohen Temperaturen schneller als bei niedrigen.*

Aus diesem gleichförmigen Verlauf der thermischen Ausdehnung ist zu ersehen, daß die Zustandsgleichung (28) die Diskontinuität beim Schmelzpunkt nicht wiedergibt. Sie kann also höchstens bei Temperaturen, die weit unter dem Schmelzpunkt liegen, als genau geltend angesehen werden. Bei höheren Temperaturen stellt sie nur eine rohe Annäherung dar. Dasselbe muß natürlich von den Hypothesen gelten, auf Grund deren die Gleichung (28), sowie überhaupt die ganze hier entwickelte Theorie gewonnen ist.

Ein sehr merkwürdiges Resultat liefert endlich Gleichung (34), wenn wir sie folgendermaßen schreiben:

$$(37) \quad v_F \cdot \alpha \cdot \gamma = \frac{\nu+2}{2} \cdot R.$$

Da höchstwahrscheinlich das Gesetz der Fernwirkung zwischen den Atomen für alle Stoffe dasselbe ist, also ν eine

universelle Konstante darstellt, so können wir (37) durch folgenden Satz wiedergeben:

Das Produkt aus Molekularvolumen, Kompressionsmodul und thermischem Ausdehnungskoeffizient ist für alle amorphen einatomigen Körper ein und dasselbe Multiplum der Gaskonstante.

Eine scharfe Prüfung dieses Satzes ist leider nicht möglich, da der Kompressionsmodul γ der Metalle meist nicht sicher feststeht. Da er nämlich direkt schwer zu messen ist, so berechnet man ihn aus dem Dehnungsmodul ϵ und der Elastizitätszahl μ nach der Formel:

$$\gamma = \frac{\epsilon}{3 \cdot (1 - 2\mu)}.$$

Wären nun die Metalle wirklich amorphe Körper, so müßte sich, wie Poisson gezeigt hat, $\mu = 0,25$ ergeben, also $\gamma = \frac{2}{3} \cdot \epsilon$. Die experimentellen Bestimmungen von μ liefern sehr schwankende Werte, aus denen man aber doch immerhin ziemlich sicher ersehen kann, daß μ im allgemeinen nicht 0,25 ist. Es liegt das daran, daß die Metalle eine fein kristallinische Struktur haben, die auch sonst die Beobachtungsergebnisse trübt. Es scheint, als ob deswegen die Formeln der Elastizitätstheorie überhaupt nicht ohne weiteres auf die Metalle anwendbar sind. Ich habe daher in der folgenden Tab. 2 einfach $\gamma = \frac{2}{3} \cdot \epsilon$ gerechnet, habe aber in Klammern noch den nach der Formel der Elastizitätstheorie berechneten Wert hinzugefügt. Die Zahlen sind von W. Voigt¹⁾ an Stäben ermittelt, die aus dem Innern gegossener Blöcke ausgeschnitten sind.

Ich habe als letztes noch das flüssige Quecksilber hinzugefügt. Man sieht, daß dies einen ganz anderen Wert für $v_F \cdot \alpha \cdot \gamma$ liefert. Die Theorie gibt wahrscheinlich überhaupt für die geschmolzenen Metalle nur ganz rohe Näherungswerte.

Die festen Metalle erfüllen dagegen die Relation

$$v_F \cdot \alpha \cdot \gamma = \text{konst.}$$

ungefähr, und zwar um so besser, je homogener und dichter sie sind, und je näher ihr μ dem Poissonschen Werte 0,25 liegt. Auch wenn man andere Zahlen nimmt, als die Voigtschen, so findet man dieses Resultat im wesentlichen be-

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. p. 177. 1893.

Tabelle 2.

	r_p	$n \cdot 10^6$	$\gamma \cdot 10^{-6}$	$(\gamma \cdot 10^{-6})$	$\nu + \frac{2}{\lambda} \cdot R$	10μ	Material
Kupfer	7,18	51,3	0,727	(0,493)	267	14—20	Dicht, aber scheinbar nicht ganz homogen.
Magnesium	13,4	78,2	0,284	(0,280)	237	23—27	Rein, dicht, sehr gute Übereinstimmung der Einzelmessungen.
Aluminium	10,1	63,2	0,434	(0,483)	303	23—29	Dicht, etwas inhomogen.
Stahl	7,11	34,4	1,353	(1,460)	332	ca. 27	Gute Übereinstimmung der Einzelmessungen.
Nickel	6,68	39,4	1,360	(1,700)	358	26—39	Dicht, gute Übereinstimmung der Einzelmessungen.
Silber	10,3	57,8	0,519	(0,708)	309	30—34	Dicht, anderes Silber gibt andere Werte.
Gold	10,2	42,4	0,506	(0,747)	219	33?	?
Wismut	20,7	41,0	0,213	(0,250)	181	22—35	Grobkristallinisch, starke Schwankungen der Einzelmessungen.
Zink	9,07	73,3	0,688	(1,01)	470	26—38	Grobkörnig, starke Schwankungen der Einzelmessungen.
Kadmium	12,9	74,1	0,472	—	452	41—50	Scheinbar dicht, starke Schwankungen der Einzelmessungen.
Zinn	16,2	66,6	0,361	—	389	49—66	Dicht, scheint durch die mechanische Bearbeitung fründort zu werden. Die Einzelmessungen schwanken stark.
Quecksilber	14,7	181	0,256	—	680	—	Flüssig.

stätigt. Und zwar ergibt sich $(\nu + 2)/2 \cdot R \sim 300$. Nun ist aber $3,5 \cdot R = 297$, wir setzen deswegen:

$$(38) \quad \nu = 5.$$

Die elastische Kraft des Atoms ist ungefähr der sechsten Potenz des Abstandes vom Zentrum umgekehrt proportional.

Der ganz abweichende Wert, den das Quecksilber liefert, wird wohl damit zusammenhängen, daß seine spezifische Wärme schon bei gewöhnlicher Temperatur stark variabel ist, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Tabelle 3.
Spezifische Wärme des Quecksilbers.

	0°	100°	200°	300°
$\frac{c_F}{R}$	3,33	3,26	3,20	3,15
$\frac{c_v}{R}$	2,94	2,70	2,43	2,21

Unsere Theorie setzt stets voraus, daß konstant $c_v = 3 R$ ist.

12. Wir wollen endlich noch Formel (32) benutzen, um die wichtige Größe $B \cdot v_F^{-\nu/3}$, die wir in Formel (27) aus der Dampfspannungskurve zu berechnen wußten, auf einem zweiten gänzlich verschiedenen Wege zu finden. Es ergibt sich:

$$(39) \quad B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} = \frac{9}{\nu \cdot (\nu - 3)} \cdot (R \Theta + \gamma \cdot v_F) = 0,9 \cdot (R \Theta + \gamma \cdot v_F).$$

oder auch:

$$(40) \quad B \cdot v_F^{-\frac{\nu}{3}} = \frac{9}{\nu \cdot (\nu - 3)} \cdot R \left(\Theta + \frac{\nu + 2}{2 \alpha} \right) = 0,9 \cdot \left(R \Theta + \frac{300}{\alpha} \right).$$

Es ist dies in der Tat eine Zahl, die mit der Temperatur nur sehr wenig variiert, weil das nahezu konstante Glied $300/\alpha$ von einer höheren Größenordnung ist als $R \cdot \Theta$.

Kombiniert man (40) mit (35), so erhält man:

$$\partial \alpha / \partial \Theta = (\nu/3 + 2/(\nu + 2)) \alpha^2 = 1,95 \cdot \alpha^2.$$

Die Vergleichung der so berechneten Größe mit den experimentell gefundenen Werten zeigt wiederum, daß die Zustandsgleichung (28) das Verhalten der Metalle in den Details nicht genau wiedergibt:

Tabelle 4.

	berechnet	H. Fizeau	W. Voigt
Kupfer	0,005 · 10 ⁻⁶	0,061 · 10 ⁻⁶	0,121 · 10 ⁻⁶
Magnesium	0,012	0,205	0,192
Aluminium	0,009	0,069	0,183
Stahl	0,002	0,061	0,156
Nickel	0,003	0,021	0,124
Silber	0,007	0,044	0,129
Gold	0,004	0,025	0,072
Wismut	0,003	0,083	0,156
Zink	0,011	-0,038	—
Kadmium	0,011	0,098	—
Zinn	0,009	0,105	—

Beispiele: Zink, Kadmium, Quecksilber.

13. Wir wollen im folgenden, wie es üblich ist, die Dampfspannung p in Millimeter Quecksilber angeben. Bleiben wir im übrigen in dem bisher gebrauchten Maßsystem, so müssen wir Formel (4) folgendermaßen schreiben:

$$p = 735,5 \cdot C \cdot R^{-1/2} \cdot \Theta^{-1/2} \cdot e^{-\frac{Q_0}{R \cdot \Theta} + 1/2}.$$

Wenn wir diese Gleichung logarithmieren, so bekommen wir:

$$\log p + \frac{1}{2} \cdot \log \Theta + \frac{0,4343 \cdot Q_0}{84,8 \cdot \Theta} = \log C + 2,5536.$$

Wir wollen vorübergehend setzen:

$$\frac{0,4343 \cdot Q_0}{84,8} = a, \quad \log C + 2,5536 = \log C'.$$

Ist uns nun die Dampfdruckkurve gegeben, so bestimmen wir zuerst einen Wert a in der Weise, daß die Summe $\log p + 0,5 \cdot \log \Theta + a/\Theta$ einen möglichst konstanten Wert für $\log C'$ ergibt, und berechnen darauf Q_0 und C .

In der folgenden Tab. 5 ist in dieser Weise die Dampfdruckkurve des Zinks zwischen 700° und 900° nach den Messungen von Barus benutzt. Die Dampfdrucke sind von 20° zu 20° aus den von Barus angegebenen Zahlen interpoliert.

Tabelle 5.

Zink.

Θ	p	$\log p$	$0,5 \cdot \log \Theta$	a / Θ	$\log C'$
973	35	1,55	1,50	7,24	10,29
993	49	1,69	1,50	7,10	10,29
1013	65	1,82	1,50	6,96	10,28
1033	102	2,01	1,51	6,82	10,34
1053	133	2,12	1,51	6,69	10,32
1073	163	2,21	1,51	6,56	10,28
1093	215	2,33	1,52	6,44	10,29
1113	269	2,43	1,52	6,32	10,27
1133	356	2,55	1,53	6,21	10,29
1153	456	2,64	1,53	6,10	10,27
1173	557	2,74	1,54	6,00	10,28

Hier ist gesetzt $a = 7040$. Der Mittelwert von $\log C' = 10,29$. Mit diesen beiden Zahlen berechnet sich der Siedepunkt des Zinks ($p = 760$) zu $\Theta = 1200$, d. h. 927° Cels.

Man erhält ferner:

$$Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{r}{3}} = 1,37 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die Zustandsgleichung ergibt:

$$300 \cdot \Theta = A \cdot v_F^{-1} - \frac{1}{3} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{r}{3}} = 0,36 \cdot 10^6 \text{ kg cm,}$$

wenn man setzt $\Theta = 1200$.

Man kann danach ungefähr taxieren:

$$B \cdot v_F^{-\frac{r}{3}} \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm; } A \cdot v_F^{-1} \sim 2,9 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die totale Verdampfungswärme des Zinks ergibt sich in cal/g zu: $492 - \Theta/65,4$, also beim Siedepunkt: 474.

Ferner erhält man:

$$C = 55 \cdot 10^6,$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{r}{3}} = 0,6 \cdot 10^6 \text{ (Formel (27)).}$$

Dabei habe ich das spezifische Gewicht des geschmolzenen Zinks zu ca. 6,6 geschätzt, also $v_F = 10$ gesetzt, ferner habe ich einfach $k = 1$ gesetzt.

Bei gewöhnlicher Temperatur ($\Theta = 300$, $v_F = 9,2$) bekommt man nach (40) den Wert $3,1 \cdot 10^6$, also für $v_F = 10$ umgerechnet: $2,7 \cdot 10^6$. Dieser Wert ist bedeutend größer als der aus der Dampfdruckkurve gefundene. Es liegt das offenbar daran, daß die Zustandsgleichung für das geschmolzene Zink nur eine grobe Annäherung darstellt.

Setzen wir $B \cdot v_F^{-1/3} = 0,6 \cdot 10^6$ in (26) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\lambda_\infty}{r_0} = 0,18 \text{ bei } \Theta = 1200^\circ.$$

Die Ausschläge der Atome sind danach in der Tat schon zu groß, als daß man die höheren Potenzen weglassen darf, während es bei niedrigen Temperaturen (300° , 400°) noch angeht.

Wir diskutieren nun in derselben Weise die Messungen, die Barus am Kadmium gemacht hat. Wir benutzen die Dampfdrucke zwischen 560° und 760° , von 20° zu 20° fortschreitend.

Tabelle 6.

Kadmium.

Θ	p	$\log p$	$0,5 \cdot \log \Theta$	a/Θ	$\log C'$
833	26	1,41	1,46	7,36	10,23
...
893	75	1,87	1,48	6,87	10,22
913	107	2,03	1,48	6,72	10,23
933	143	2,16	1,49	6,58	10,23
953	187	2,27	1,49	6,44	10,20
973	264	2,42	1,49	6,31	10,22
993	330	2,52	1,50	6,18	10,20
1013	455	2,66	1,50	6,05	10,21
1033	624	2,79	1,51	5,93	10,23

Hier ist gesetzt $a = 6130$. Wir haben bekommen $\log C' = 10,22$. Mit diesen beiden Werten berechnet sich der Siedepunkt des Kadmiums ($p = 760$) zu: $\Theta = 1050$, d. h. 777° Cels.

Ferner bekommen wir:

$$Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v^{-\frac{1}{3}} = 1,20 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die Zustandsgleichung gibt für $\Theta = 1050$:

$$300 \cdot \Theta = A \cdot v_F^{-1} - \frac{5}{3} B \cdot v_F^{-\frac{2}{3}} = 0,32 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{2}{3}} \sim 1,3 \cdot 10^6 \text{ kg cm; } A \cdot v_F^{-1} \sim 2,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm.}$$

Die totale Verdampfungswärme des Kadmiums in cal/g ergibt sich aus dem gefundenen Werte von Q_0 zu: $250 - \Theta/112$, also beim Siedepunkt: 241.

Das spezifische Gewicht des geschmolzenen Kadmiums ist von Vicentini und Omodei bestimmt. Es beträgt beim Siedepunkt ungefähr 7,7. Also $v_F = 14,5$. Wir berechnen nun aus C' die mit C bezeichnete Konstante und wenden Formel (27) an, indem wir setzen $k = 1$:

$$C = 47 \cdot 10^6,$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{2}{3}} = 0,68 \cdot 10^6.$$

Bei gewöhnlicher Temperatur ($\Theta = 300$, $v_F = 13,0$) bekommt man nach (40): $2,9 \cdot 10^6$. Multipliziert man nun mit $(13,0/14,5)^{2/3}$, so bekommt man den Wert beim Siedepunkt, nämlich: $2,4 \cdot 10^6$, also wie beim Zink zu groß.

Setzen wir $B \cdot v_F^{-2/3} = 0,7 \cdot 10^6$ in (26) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\lambda}{r_0} = 0,12 \text{ bei } \Theta = 1050,$$

also wieder allzugroße Ausschläge.

Das Quecksilber zeigt schon weit unter seinem Siedepunkt so starke Abweichungen seiner spezifischen Wärme von dem normalen Werte $3 \cdot R$ (vgl. 11.), daß man vermuten sollte, die Formel (4) verlöre hier ihre Gültigkeit. Die Messungen der Dampfspannung bei niedrigen Temperaturen, wo man die Formel noch für anwendbar halten könnte, haben nun aber so unsichere Resultate ergeben, daß man aus ihnen die Größen Q_0 und C nicht gut berechnen kann. Merkwürdigerweise scheinen aber die Untersuchungen von H. Hertz¹⁾ zu zeigen, daß man mit der Formel (4), indem man C und Q_0 konstant hält und dem Exponenten von $R \cdot \Theta$ den Wert 0,5 läßt, weit über das Gebiet hinaus extrapolieren kann, wo diese Zahl 0,5 wirklich

1) H. Hertz, Wied. Ann. 17. p. 193. 1882.

als $(c_F - c_G - R)/R$ gedeutet werden kann. In der folgenden Tab. 7 sind die von H. Hertz angegebenen Werte zwischen 80° und 180° zu Grunde gelegt.

Tabelle 7.
Quecksilber.

Θ	p	$\log p$	$0,5 \log \Theta$	a/Θ	$\log C$
858	0,093	0,97-2	1,27	9,26	9,50
863	0,165	0,22-1	1,28	9,01	9,51
373	0,285	0,45-1	1,29	8,77	9,51
383	0,478	0,68-1	1,29	8,54	9,51
393	0,779	0,89-1	1,30	8,33	9,52
403	1,24	0,09	1,30	8,12	9,51
413	1,93	0,28	1,31	7,92	9,51
423	2,93	0,47	1,31	7,73	9,51
433	4,38	0,64	1,32	7,55	9,51
443	6,41	0,81	1,32	7,38	9,51
453	9,23	0,96	1,33	7,22	9,51

Ich habe hier gesetzt $a = 3270$ und bekomme $\log C = 9,51$. Mit diesen beiden Zahlen berechnet sich der Siedepunkt des Quecksilbers zu: $\Theta = 625$, d. h. 352° Cels.

Man erhält ferner:

$$Q_0 = A \cdot v_F^{-1} - B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} = 0,64 \cdot 10^6,$$

$$300 \cdot \Theta = A \cdot v_F^{-1} - \frac{8}{3} \cdot B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} = 0,12 \cdot 10^6,$$

für $\Theta = 400$, also:

$$B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} \sim 0,8 \cdot 10^6 \text{ kg cm}; \quad A \cdot v_F^{-1} \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm}.$$

Aus Q_0 ergibt sich, unter der Annahme, daß Formel (2) gültig bleibt, wenn man $(c_F - c_G)$ einfach durch $1,5 \cdot R$ ersetzt, für die totale Verdampfungswärme der Wert $75 - \Theta/200$ cal/g. Beim Siedepunkt also: 72 cal/g Gemessen ist von Person: 62.

Ferner erhält man:

$$C = 9,1 \cdot 10^6,$$

$$B \cdot v_F^{-\frac{v}{3}} = 0,235 \cdot 10^6 \text{ nach Formel (27).}$$

Dabei ist als spezifisches Gewicht des Quecksilbers bei $\Theta = 400$ gerechnet: 13,3, also $v_F = 15$.

Bei derselben Temperatur ($\Theta = 400$) ergibt die Formel (40): $1,5 \cdot 10^6$, also einen Wert, der den aus C berechneten ($0,235 \cdot 10^6$) noch mehr übersteigt, als es die analogen Zahlen beim Zink und beim Kadmium taten.

Setzen wir $B \cdot v^{-v/3} = 0,24 \cdot 10^6$ in (26) ein, so ergibt sich: $\lambda_w/r_0 = 0,17$ bei $\Theta = 400^\circ$, und gar 0,22 beim Siedepunkt.

Potentialsprung und Ionisationsenergie.

14. Wenn man das in 13. aufgeführte Zahlenmaterial überblickt, so wird es einem ziemlich wahrscheinlich, daß die dieser Arbeit zu Grunde gelegten Hypothesen wohl genügen dürften, um das thermische Verhalten der Metalle zu erklären, und daß man die Theorie nur in zwei Punkten vervollständigen müßte.

Erstens sind noch die Kräfte einzuführen, die den Schiebungen entgegenwirken, da wir ohne diese Kräfte den in Formel (22) eingeführten Faktor k nicht berechnen können.

Zweitens sind die Potenzreihen für die potentielle Energie und das Virial der elastischen Atomkräfte noch um mehrere Glieder fortzusetzen.

Die Durchführung dieser zweiten Operation würde den Erfolg haben, daß auch die geschmolzenen Metalle in die Theorie miteinbegriffen wären. Denn es scheint, als ob der flüssige Aggregatzustand sich von dem festen eben dadurch unterscheidet, das bei ihm die Glieder höherer Ordnung wegen der starken Ausschläge der Atome wesentlich mit in Betracht kommen, während sie bei diesem noch weggelassen werden können.

Wenn wir die Größen $B \cdot v_F^{-v/3}$ und C nach der Formel (40) berechnen, so dürfen wir immerhin annehmen, daß wir die Größen bekommen, die für die Dampfdruckkurve des festen Metalles charakteristisch sind, wenn auch diese Kurve von der des geschmolzenen Metalles vielleicht ziemlich stark abweicht. Den Faktor k können wir wohl in erster Annäherung gleich 1 setzen. Ehe die Theorie weiter entwickelt wird, schien es mir sehr wünschenswert, dies zu prüfen. In der Tat

geht es ja eine gewisse Art von Dampfspannung fester Metalle, die der Messung zugänglich ist, nämlich ihr elektrolytischer Lösungsdruck im Wasser.

Man kann auf rein thermodynamischem Wege leicht für Lösungsdruck und Ionisationsenergie ganz analoge Formeln herleiten, wie die in 2. hingschriebenen, von denen wir in der Theorie des Dampfdruckes ausgegangen sind. Wir bezeichnen jetzt mit Q die innere Ionisationsenergie, ausgedrückt in Joule, d. h. diejenige Energie, die man *zuführen* muß, um ein Grammatom des Metalles in die Lösung zu hringen, ferner mit ψ den Potentialsprung vom Metall zur Lösung in Volt, mit c_F und c_J die spezifische Wärme des festen und des gelösten Metalles, gerechnet pro Grammatom in Joule/Grad Celsius, mit z die Valenz eines Metallatoms, mit p den osmotischen Druck des gelösten Metalles; R , Θ seien wieder Gaskonstante und absolute Temperatur, endlich $F = 96540$ Coulomb die elektrische Ladung eines Grammäquivalents Ionen. In dem gewählten Maßsystem ist $R = 8,31$, die Druckeinheit ist $10,2 \text{ kg/qcm}$, ferner ist $1 \text{ cal} = 4,19 \text{ Joule}$.

Wir erhalten dann ganz analog den Formeln (2) und (4):

$$(41) \quad Q = Q_0 - (c_F - c_J) \cdot \Theta,$$

$$(42) \quad p = C' \cdot (R \cdot \Theta)^{-\frac{c_F - c_J - R}{R}} \cdot e^{-\frac{Q - \psi \cdot z \cdot F}{R \cdot \Theta}}$$

In Formel (42) tritt in die Exponentialfunktion auch hier diejenige Energie ein, welche der Substanz pro Grammatom von außen zugeführt werden muß, damit sie in den Ionenzustand übergeht. Da jedes Grammatom die Ladung $z \cdot F$ besitzt, und folglich beim Durchgang durch die elektrische Doppelschicht auf der Trennungsfläche Metall-Lösung die Energie $\psi \cdot z \cdot F$ gewinnt, so bleibt als die noch von außen hinzuzufügende Energie: $Q - \psi \cdot z \cdot F$.

Man kann (42) auch noch in mehreren anderen Formen hinschreiben. Es sei P der sogenannte Lösungsdruck des Metalles, dann ist bekanntlich:

$$\psi = \frac{R \cdot \Theta}{z \cdot F} \cdot \ln \frac{P}{P'},$$

also:

$$(43) \quad P = C' \cdot (R \cdot \Theta)^{-\frac{c_F - c_J - R}{R}} \cdot e^{-\frac{Q}{R \cdot \Theta}}.$$

Führt man an der elektrischen Doppelschicht Metall-Elektrolyt den bekannten Helmholtzschen Kreisprozeß aus, so bekommt man die Beziehung:

$$Q = F \cdot z \cdot \Psi - F \cdot z \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \cdot \Theta$$

also:

$$(44) \quad p = C' \cdot (R \Theta)^{-\frac{c_F - c_J - R}{R}} \cdot e^{-\frac{F \cdot z}{R} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}}.$$

Für praktische Rechnungen bekommt man die bequemste Form, wenn man die Konzentration der Lösung η einführt, ausgedrückt in Grammäquivalent pro Kubikzentimeter. Ist v_J das Volumen, welches ein Grammatom Ionen enthält, so ist:

$$\eta = \frac{z}{v_J}.$$

Nun ist aber:

$$p \cdot v_J = R \cdot \Theta,$$

folglich:

$$(45) \quad \eta = z \cdot C' \cdot (R \Theta)^{-\frac{c_F - c_J}{R}} \cdot e^{-\frac{Q - \Psi \cdot z \cdot F}{R \Theta}}.$$

Die Aufgabe der kinetischen Theorie wird es nun sein, für die Größen C' und Q_0 Beziehungen zu anderen Eigenschaften der Metalle und des Wassers zu finden. Es dürfte aber jetzt wohl noch verfrüht sein, den Versuch einer solchen Theorie zu machen. Denn dazu wissen wir über die Lösungen doch noch zu wenig, ist doch nicht einmal der Wert von c_J/R bekannt!

Trotzdem läßt sich schon aus der im vorigen entwickelten kinetischen Theorie der Metalle ein recht interessanter Schluß ziehen. Aus Formel (14) geht nämlich hervor, daß die Größe C' sich jedenfalls als ein Quotient zweier Größen:

$$(46) \quad C' = C_F / C_J$$

ergeben wird, von denen die erste C_F identisch ist mit der in der Dampfspannungstheorie mit C bezeichneten Größe, die wir nach Formel (40) berechnen können. C_J dagegen hängt davon ab, in welcher Weise sich das Ion im Wasser bewegt. Wir werden jedenfalls so viel sagen können, daß C_J für verschiedene Ionen nicht wesentlich verschieden sein kann.

15. Logarithmieren wir die Gleichung (45), so bekommen wir:

$$\frac{\frac{1}{z} \cdot Q - F \cdot \psi}{R \cdot \Theta} = \frac{1}{z} \ln C_F + \frac{1}{z} \cdot \ln \left(\frac{z}{\eta \cdot C_J} \right) - \frac{c_F - c_J}{z \cdot R} \cdot \ln(R \cdot \Theta).$$

Ich habe nun $\ln C_F$ nach (40) für eine ganze Reihe von Metallen berechnet und gefunden, daß sich Unterschiede ergeben, die gegenüber den Fehlern in der Bestimmung von Q und ψ nur unbedeutend sind, es ist nämlich für alle Metalle:

$$\ln C_F = 20,9 \pm 1,2.$$

Nehmen wir ferner an, daß, geradeso wie c_F , auch c_J für alle Metalle denselben Wert hat, und setzen wir im folgenden stets $\eta = 10^{-3}$ (Normallösung), so ist

$$(47) \quad \frac{\frac{1}{z} \cdot Q - F \cdot \psi}{R \cdot \Theta} = \frac{1}{z} \cdot K,$$

wo K eine Größe ist, die bei einer bestimmten Temperatur für alle Metalle, abgesehen von kleinen Änderungen (± 1), denselben Wert hat.

Bekanntlich ist es bisher noch nicht möglich gewesen, auf eine ganz einwandfreie Art Q und ψ absolut zu messen. $1/z \cdot Q$ ist nach den thermochemischen Messungen von J. Thomsen für viele Metalle bekannt, relativ zum Wasserstoff. Wenn man das betreffende Metall in einer verdünnten, starken (d. h. möglichst dissoziierten) Säure auflöst, so ist die Wärmetönung pro Grammäquivalent:

$$Q_H - \frac{1}{z} \cdot Q = - \frac{1}{z} \cdot Q',$$

wenn wir mit Q_H die Ionisationsenergie des Wasserstoffgases bezeichnen.

Ebenso mißt man den Potentialsprung ψ immer relativ zu einer Normalelektrode, deren Potentialsprung man willkürlich gleich Null setzt.

So nimmt beispielsweise N. T. N. Wilsmore¹⁾, dessen Angaben ich den folgenden Rechnungen zu Grunde legen werde, als Normalelektrode ein mit Wasserstoff gesättigtes Platinblech

1) N. T. M. Wilsmore, Zeitschr. f. phys. Chem. 35. p. 291. 1900.

in einer Normalsalzsäurelösung. Nenne ich den Potentialsprung dieser Normalelektrode Ψ_0 , so ist gemessen:

$$\Psi' = \Psi - \Psi_0.$$

Ich führe nun eine weitere Konstante K' ein:

$$(48) \quad K' = (Q_H - F \cdot \Psi_0) / R \cdot Q.$$

Dann ist:

$$(49) \quad \frac{\frac{1}{2} Q' - F \cdot \Psi'}{R \cdot \Theta} = \frac{1}{2} \cdot K + K'.$$

Ich prüfe diese Gleichung zunächst an einer Reihe zweiwertiger Metalle. Die Energien $\frac{1}{2} Q'$ gebe ich in großen Kalorien an, die aufgeführten Zahlen sind also noch mit 4190 zu multiplizieren, damit wir sie in dem in den Formeln benutzten Maßsystem (Joule) bekommen:

Tabelle 8.

	$\frac{1}{2} Q'$	Ψ'	$\frac{1}{2} K + K'$
Mangan	-24,7	-1,075	-0,2
Zink	-17,1	-0,770	+1,0
Kadmium	-9,3 ¹⁾	-0,421	+0,67
Eisen	-10,7	-0,343	-4,7
Kobalt	-8,1	-0,232	-4,6
Nickel	-7,6	-0,228	-3,9
Blei	+1,2 ¹⁾	-0,136	+7,0
Kupfer	+8,0	+0,336	+0,4

Während die ganz verschiedenartigen Metalle Mangan, Zink, Kadmium, Kupfer eine gute Übereinstimmung in ihrem Verhalten zeigen, weicht merkwürdigerweise die Gruppe Eisen, Kobalt, Nickel davon beträchtlich ab, gibt aber wieder unter sich übereinstimmende Zahlen. Ganz abseits von allen übrigen Metallen steht das Blei. Was der Grund für diese Anomalien ist, darüber weiß ich nichts zu sagen. Um den Durchschnittswert von $\frac{1}{2} K + K'$, den die vier zuerst erwähnten Metalle geben, nämlich 0,5, auch beim Eisen und Blei zu erreichen, müßten wir den Potentialsprung des ersteren um -0,13 Volt,

1) Diese Werte, die etwas von den von W. Ostwald (Zeitschr. f. physik. Chem. 11. p. 501. 1893) angegebenen abweichen, habe ich, wie auch die übrigen, direkt aus den Thomsenschen Daten erhalten.

den des anderen Metalles um $+0,16$ Volt ändern. Jedenfalls werde ich rechnen:

$$\frac{1}{2} K + K' = +0,5.$$

Von einwertigen Metallen sind gut bekannt nur Thallium und Silber:

Tabelle 9.

	Q'	Ψ'	$K + K'$
Thallium	$+0,8^1)$	$-0,322$	$13,7$
Silber	$+25,75$	$+0,771$	$13,4$

Wir haben also:

$$K + K' = 13,5.$$

Mithin:

$$K = 26, \quad K' = -12,5.$$

16. Wir wollen nun den so gefundenen Wert von K in Gleichung (47) einsetzen und zugleich beachten, daß

$$\frac{1}{2} \cdot Q - F \cdot \Psi = -F \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial \Theta} \cdot \Theta.$$

Es ergibt sich:

$$(50) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{R \cdot K}{F} = -\frac{1}{\pi} \cdot 0,00224 \text{ Volt}.$$

Und zwar ist nach dem, was wir oben über die Zahl $\ln C_F$ sahen, zu vermuten, daß dieser Wert bei den verschiedenen Metallen höchstens um 5 Proz. vom Mittel abweicht.

Der Temperaturkoeffizient des Potentialsprunges Metall-Elektrolyt ist negativ und hat für alle gleichwertigen Metalle merklich den gleichen Wert. Der Temperaturkoeffizient für verschiedenwertige Metalle verhält sich umgekehrt wie die Valenzzahlen.

Aus diesem Satz erkennt man ohne weiteres, daß alle chemischen Ketten mit zwei gleichwertigen Elektrodenmetallen, deren Lösung ihre Konzentration mit der Temperatur nicht ändert, ganz verschwindend kleine Temperaturkoeffizienten haben müssen. So beträgt er z. B. beim Daniellschen Element $0,000034$ Volt.

1) Vgl. die Anmerkung auf der vorigen Seite.

Obwohl wir im stande sind, den Temperaturkoeffizienten des Potentialsprunges Metall-Elektrolyt absolut anzugeben (und zwar, wenn noch die spezifische Wärme der Ionen c_j bekannt wäre, sogar für alle Temperaturen), so können wir daraus leider den absoluten Wert des Potentialsprunges selber noch nicht ermitteln. Dazu muß noch eine zweite Konstante gegeben sein, z. B. Q_0 , und es ist abzuwarten, ob die kinetische Theorie im stande sein wird, genaueres über diese GröÙe zu ermitteln.

Greifswald, April 1903.

(Eingegangen 21. April 1903.)

2. Zur Oberflächenspannung von polarisiertem Quecksilber; von Gottlieb Kučera.

(Fortsetzung von p. 529.)

(Tafeln hierzu sind dem vorigen Hefte beigelegt.)

V. *Die maximale Oberflächenspannung.* Die Beobachtungs- und Berechnungsmethode ist schon im Abschnitt IV erklärt worden. Hier werden vor allem die Tabellen mit allen Resultaten zusammengestellt, die zur Konstruktion der Elektrokapillarkurven nötig sind; die Zahlen, wie schon erwähnt, geben die Oberflächenspannungen in einer willkürlichen Einheit an. Bei jedem Versuch ist außer dem spezifischen Gewichte σ , jeder Lösung auch die mittlere Versuchstemperatur t mitsamt ihren Schwankungen angegeben.

Auf den beigelegten Taf. II u. III sind die Versuchsergebnisse graphisch dargestellt. Alle Kurven haben das charakteristische Aussehen der bekannten Elektrokapillarkurven, wobei sich die gemessenen Punkte sehr gut in eine glatte Kurve einfügen lassen. Nur bei den Salzen ist hie und da eine merkliche Abweichung; einen möglichen Grund dafür werden wir im folgenden Abschnitt kennen lernen. Zu einem Vergleich meiner Resultate mit den nach einer „statischen“ Methode gewonnenen Kurven habe ich die H_2SO_4 -Kurve, welche Paschen¹⁾ mit seinem „3 mm-Rohr“ beobachtet hatte, benutzt. Er gibt für verschiedene Polarisationen an, um wieviel Prozent der maximalen Erhöhung die Oberflächenspannung über diejenige bei Kurzschluß gestiegen ist. Seine Säure war etwa 26 Proz. Ich habe nun aus meinen Daten für eine 17,1 Proz. und 36,3 Proz. H_2SO_4 bei Kurzschluß und bei maximaler Oberflächenspannung die Mittel bestimmt, die so gewonnenen Zahlen den Oberflächenspannungen 0 und 100 bei Paschen zugeordnet, und seine übrigen Angaben danach umgerechnet. So entstand die Tab. 16, wo unter I. die ursprünglichen, unter II. die berechneten Werte eingetragen sind. Die in Daniell an-

1) F. Paschen, Wied. Ann. **39**. p. 43. u. 51. 1890.

Tabelle 10.
H₂SO₄.

Polarisier. E.M.K. in Volt	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
	$\sigma_{229} = 1,0000$ $t = 18,6^\circ \pm 0,1$	$\sigma_{20,1} = 1,0113$ $t = 18,2^\circ \pm 0,1$	$\sigma_{19,6} = 1,0559$ $t = 18,1^\circ \pm 0,2$	$\sigma_{20,2} = 1,1194$ $t = 18,0^\circ \pm 0,1$	$\sigma_{20,3} = 1,2733$ $t = 18,2^\circ \pm 0,1$	$\sigma_{21,5} = 1,7350$ $t = 20,0^\circ \pm 0,2$	$\sigma_{20,0} = 1,835$ $t = 20,0^\circ$
0	209,15	209,1	204,3	200,4	189,5	151,7	147,6
- 0,100	227,3	226,7	221,3	217,4 _s	206,7 _s	169,7	—
- 0,200	242,25	240,7	235,8	232,0 _s	221,6 _s	185,0 _s	—
- 0,300	254,8 _s	251,8	247,2 _s	243,8 _s	233,9	198,1 _s	—
- 0,400	263,3	260,7 _s	256,5	254,3	244,4	209,6	—
- 0,500	270,5 ^{*)}	267,3 _s	264,0	262,5	253,3 _s	219,5 _s	—
- 0,600	273,3 _s	271,5	269,9 _s	269,0	260,8	228,6 _s	—
- 0,700	275,5	274,4	274,0	274,2	267,1 _s	236,5 _s	—
- 0,800	276,3	275,1	275,6	277,0	272,5	243,3	—
- 0,900	275,8	274,4	275,5	277,4 _s	276,0 _s	250,1	—
- 1,000	273,5 _s	272,2	273,1	274,9 _s	277,7 _s	—	—
- 1,100	270,7	268,6 _s	269,4	271,9	276,9	—	—
- 1,200	267,0 _s	264,2	264,2	267,0	274,0	—	—
- 1,300	261,8	258,4	256,8 _s	258,6	270,6 _s	—	—
- 1,400	255,9	251,3 _s	253,7 [*]	249,3 [*]	—	—	—
- 1,500	248,6	245,1 _s	—	—	—	—	—
- 1,600	241,0 _s	226,9 [*]	—	—	—	—	—
- 1,700	234,2 ^{*)}	—	—	—	—	—	—

*) Bei den mit einem Sternchen versehenen Werten war das Tropfen nicht mehr ganz regelmäßig.

**) Gehört infolge eines Versehens zu 0,520 Volt.

Tabelle 11.
HCl.

Polarisierende	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
E.M.K.	$\sigma_{19,0^\circ} = 1,0006$	$\sigma_{20,5^\circ} = 1,0039$	$\sigma_{20,5^\circ} = 1,0200$	$\sigma_{19,9^\circ} = 1,0633$	$\sigma_{19,0^\circ} = 1,1067$	$\sigma_{18,3^\circ} = 1,1830$
in Volt	$t = 17,9^\circ \pm 0,15^\circ$	$t = 17,8^\circ \pm 0,15^\circ$	$t = 18,1^\circ \pm 0,15^\circ$	$t = 18,2^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,3^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 17,9^\circ \pm 0,1^\circ$
0	241,0 _s	236,2	230,3 _s	224,3 _s	221,7	215,4
- 0,100	256,0 _s	253,4	246,6 _s	240,8 _s	237,7	230,0
- 0,200	265,6	263,0 _s	257,3	251,5	248,1 _s	240,8 _s
- 0,300	272,1	270,4 _s	265,3	259,3	256,0	249,0
- 0,400	276,2 _s	274,9 _s	270,1	264,8	261,6	255,7
- 0,500	278,1	276,8	273,1	268,6	265,4	259,7
- 0,600	278,4	277,0 _s	273,2	269,8 _s	267,4	261,8
- 0,700	277,2	274,8	271,2	268,6	266,8 _s	261,1*
- 0,800	274,8	271,4	267,1 _s	265,3 _s	264,7 _s	—
- 0,900	271,1	266,5	262,5 _s	255,9 _s *	249,8*	—
- 1,000	265,9 _s	260,7 _s	255,7	245,3*	—	—
- 1,100	260,0 _s	253,0 _s	247,1	—	—	—
- 1,200	253,0	244,3	237,9*	—	—	—
- 1,300	243,5 _s	234,0 _s	—	—	—	—
- 1,400	230,3 _s	215,5*	—	—	—	—
- 1,500	209,8 _s *	—	—	—	—	—

Tabelle 12.

Polarisier. E.M.K. in Volt	KOH		NaOH	
	I.	II.	I.	II.
	$\sigma_{19,3^\circ} = 1,0554$	$\sigma_{20,2^\circ} = 1,2146$	$\sigma_{19,8^\circ} = 1,0460$	$\sigma_{20,0^\circ} = 1,2254$
	$t = 18,4^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 18,9^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 18,1^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,0^\circ \pm 0,15^\circ$
0	267,7	267,1	267,9	268,6
-0,100	272,8	273,1	271,3 _s	273,5
-0,200	275,4 _s	274,2 _s	273,9	275,1 _s
-0,300	276,1 _s	273,5 _s	274,5 _s	274,2 _s
-0,400	274,8 _s	270,8 _s	273,5 _s	271,0 _s
-0,500	272,2	267,0 _s	271,5	267,0
-0,600	267,8 _s	261,8 _s	267,7 _s	261,7
-0,700	261,8	255,5 _s	262,3 _s	255,2 _s
-0,800	254,8 _s	248,0	256,2	247,3 _s
-0,900	247,4	239,0	248,7	239,0 _s
-1,000	239,1	229,2	240,3	229,4
-1,100	229,2 _s	217,8	230,5 _s	219,1 _s
-1,200	218,5 _s	205,5	219,9 _s	207,6 _s
-1,300	206,0 _s	192,0	207,7	195,5 _s
-1,400	192,4	176,7	194,7 _s	182,2
-1,500	177,7	160,2 _s	179,6 _s	167,5 _s
-1,600	161,5 _s	143,8	163,3	152,6
-1,700	144,2 _s	132,1	147,3	139,1 _s
-1,800	130,1	123,7	137,2	132,1
-1,900	120,7	119,0 _s	127,4 _s	127,9
-2,000	117,7 _s	116,1	122,8	125,0

gegebenen elektromotorischen Kräfte sind in Volt umgewandelt unter der Annahme 1 Daniell = 1,074 Volt.¹⁾

Die Kurve von Paschen, welche unter den meinigen graphisch dargestellt ist, fügt sich vorzüglich zwischen meine eigenen Beobachtungen ein. Die letzten, mit einem Stern in der Tabelle gekennzeichneten Werte sind von Paschen schon bei sichtbarer Entwicklung von Wasserstoff bestimmt worden, und daher ungenau. Bei meinen Versuchen trat sichtbare Elektrolyse immer etwas später als bei Paschen ein, da sich

1) F. Paschen, Wied. Ann. 41. p. 42. u. 54. 1890.

Tabelle 13

Polarisier. E.M.K. in Volt	KCl		NaCl	
	I.	II.	I.	II.
	$\sigma_{18,0^\circ} = 1,0630$	$\sigma_{16,8^\circ} = 1,1518$	$\sigma_{20,0^\circ} = 1,0370$	$\sigma_{19,1^\circ} = 1,1756$
	$t = 17,0^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 16,4^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 18,2^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,6^\circ \pm 0,1^\circ$
0	286,5	286,8 _s	288,2	228,8
-0,100	252,8	251,0	250,7	244,1
-0,200	264,4	263,7 _s	263,6	255,2
-0,300	275,8	274,9 _s	273,0	265,6 _s
-0,400	282,5	281,9	278,8	273,0
-0,500	287,6	287,8 _s	282,8	277,3
-0,600	288,5	289,0	285,2	277,5
-0,700	285,5	283,9 _s	283,7	272,6 _s
-0,800	278,5	277,5	278,1 _s	266,0
-0,900	270,6	270,0	271,1 _s	259,3 _s
-1,000	261,7 _s	260,6	262,4	252, ¹⁾
-1,100	251,6	249,9	252,8	242,8 _s
-1,200	240,4	238,1	241,9	232,2 _s
-1,300	229,2	226,7	200,9 _s	221,6
-1,400	217,7 _s	214,1	219,5	208,8
-1,500	205,1	199,0	207,9	195,1 _s
-1,600	190,2	182,4 _s	195,0	179,3
-1,700	174,2 _s	—	179,7	163,4 _s
-1,800	157,9	145,8*	163,9	147,8 _s
-1,900	142,4*	—	149,5	136,7
-2,000	130,4*	—	137,7	129,8

beim Tropfen der Polarisation immer eine frische Quecksilberoberfläche darbietet.

Für die weiteren Berechnungen war es nötig, aus den beobachteten Kurven die maximalen Oberflächenspannungen zu bestimmen. Dies geschah auf graphischem Wege, indem ich die Elektrokapillarkurven in großem Maßstabe aufzeichnete, und nach der Ostwaldschen Methode ¹⁾ der gleichen Oberflächenspannungen die Lage und die Höhe des Maximums ermittelte. Den größten möglichen Fehler dieser Bestimmungen

1) W. Ostwald, Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 589. 1887.

Tabelle 14.

Polarisier. E.M.K. in Volt	KCN		KJ		
	I.	II.	I.	II.	III.
	$\sigma_{20,0^\circ} = 1,0098$	$\sigma_{20,6^\circ} = 1,0833$	$\sigma_{19,0^\circ} = 1,0200$	$\sigma_{18,8^\circ} = 1,1914$	$\sigma_{19,2^\circ} = 1,2514$
	$t = 17,8^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 17,0^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 17,2^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 17,2^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 17,0^\circ \pm 0,1^\circ$
+ 0,800	—	267,5*	—	—	—
+ 0,200	269,4s	268,4*	—	—	—
+ 0,170	269,4s	262,1s	—	—	—
+ 0,140	269,5	265,7	—	—	—
+ 0,100	269,4s	267,5	—	—	—
+ 0,060	269,5	—	—	—	—
+ 0,050	—	268,0	—	—	—
+ 0,030	269,8	—	—	—	—
± 0	269,1s	266,1	208,7s	215,6	217,8
- 0,100	267,5s	261,1	243,8	239,7	239,8s
- 0,200	263,7s	254,7	260,8	252,8s	251,6s
- 0,300	258,4	247,4	270,1	261,7s	259,9
- 0,400	253,0s	238,7	271,9s	263,8	262,4s
- 0,500	245,9	229,8s	269,7s	261,6	261,2s
- 0,600	237,6	219,8	264,5	257,0	256,5
- 0,700	228,5s	208,1	257,8	250,1	249,1
- 0,800	218,2	195,5	250,0s	241,1	239,3
- 0,900	207,6s	181,9s	242,1	229,5	227,8
- 1,000	194,2s	164,4	232,7s	217,4s	214,4
- 1,100	179,9	—	221,7s	201,4	199,2
- 1,200	—	—	209,3	187,4	188,8
- 1,300	—	—	195,8	171,3	167,2
- 1,400	—	—	181,5s	154,0s	149,7
- 1,500	—	—	165,8	138,0	135,6
- 1,600	—	—	147,0	125,2	123,7
- 1,700	—	—	135,6	117,8	117,4s

Tabelle 15.

Polarisier. E.M.K. in Volt	Wasser		Äthylalkohol
	I.	II.	$\sigma_{18,5^\circ} = 0,7953$ $t = 1$
	$t = 18,0^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,1^\circ \pm 0,1^\circ$	
+ 1,000	267,8 _s *	—	—
+ 0,600	247,6 _s	—	268,4
+ 0,800	251,7 _s	—	267,3 _s
+ 0,100	260,0	—	—
0	271,9	272,8	268,6 _s
— 0,100	277,2	277,6	268,6 _s
— 0,300	283,3	283,3 _s	270,0
— 0,600	287,5	287,7 _s	269,2
— 1,000	289,1 _s	289,1	269,6
— 1,500	290,3 _s	—	—
— 2,000	290,6	290,4	270,0 _s
— 3,000	288,2	288,4	269,8 _s
— 4,000	unregelmäßig	271,4 **)	—
— 5,000	—	—	265,7 _s
— 6,00	—	—	260,5 _s
— 8,00	—	—	257,1
— 10,00	—	—	252,8

**) Unregelmäßig; andere Werte 267,9 und 270,45.

schätze ich auf 0,01 Volt und 0,1 meiner Oberflächenspannungseinheit. Um nun aber diese letztere auf die gebräuchliche 1 mg/mm zu reduzieren, schlug ich folgenden Weg ein: Die Kurzschluß- und die maximalen Oberflächenspannungen von verschiedenen konzentrierten H_2SO_4 -Lösungen, die Paschen¹⁾ nach der Steighöhenmethode gemessen hatte, trug ich als Funktionen der Konzentration in Kurven auf und entnahm diesen die für meine Konzentrationen gültigen Werte. Es wurden nur mittlere Konzentrationen benutzt und die Dichten der Lösungen auf die gleiche Temperatur bezogen.²⁾

Auf diese Weise bekam ich für den reziproken Um-

1) F. Paschen, Wied. Ann. 40. p. 36. 1890.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik p. 574. 1901.



Tabelle 16.

Polarisierende E.M.K.		I.	II.
in Dau.	in Volt		
-0,002	-0,0054	1,2	196,0
-0,01	-0,011	2,3	196,9
-0,05	-0,054	12,38	205,23
-0,1	-0,107	24,13	214,95
-0,2	-0,215	43,49	231,0
-0,3	-0,322	58,92	243,75
-0,4	-0,43	71,65	254,35
-0,5	-0,54	81,37	262,3
-0,6	-0,645	90,00	269,5
-0,7	-0,751	94,76	273,5
-0,8	-0,858	98,90	276,9
-0,9	-0,966	99,59	277,5
-1,0	-1,074	98,80*	276,0*
-1,15	-1,235	95,55*	274,1*
-1,261	-1,355	93,30*	272,25*
-1,30	-1,398	91,67*	270,9*

wandlungsfaktor von meinen Einheiten auf mg/mm die im folgenden zusammengestellten Werte.

Δ		
$\frac{209,15}{31,83} = 6,571$		+ 0,053
$\frac{209,1}{31,79} = 6,578$		+ 0,060
$\frac{204,3}{31,60} = 6,462$		- 0,056
$\frac{200,4}{30,39} = 6,594$		+ 0,076
$\frac{275,1}{42,07} = 6,539$		+ 0,021
$\frac{275,8}{42,93} = 6,424$		- 0,094
$\frac{277,6}{43,01} = 6,454$		- 0,064
Mittel	6,5175	$\pm 0,0278$

Die Abweichungen Δ vom Mittelwert übersteigen nur in zwei Fällen 1 Proz. des Wertes; eine bessere Übereinstimmung konnte überhaupt nicht erwartet werden, da wie Paschen schreibt, seine Einzelbeobachtungen um etwa 1 Proz. voneinander abwichen. Durch Division mit dem Faktor 6,518 werden also unsere Bestimmungen der maximalen Oberflächenspannung auf die Einheit mg/mm übergeführt. Da es sich dabei um Zahlen handelt, die untereinander um höchstens 8 Proz. variieren, wird durch die Unsicherheit im Umwandlungsfaktor ihr absoluter Wert um ca. $\frac{1}{2}$ Proz. falsch sein können, aber die *Veränderungen* werden dadurch nicht im merklichen Maße berührt.

Die Oberflächenspannungen der benutzten Lösungen wurden unter Zugrundelegung der Volkmannschen Zahl für Wasser ¹⁾ aus den Beobachtungen von Röntgen und Schneider ²⁾ berechnet; einige mit einem Sternchen bezeichnete Werte mußten durch Extrapolation gewonnen werden. Auf die Beobachtungstemperatur, die übrigens von 18° nicht viel abwich, wurden sie mit Hilfe des für reines Wasser (Volkman, l. c.) geltenden Temperaturkoeffizienten reduziert. In dieser Weise bekam ich schließlich die in der Tab. 17 zusammengestellten Zahlen.

Unter α_1 ist die Oberflächenspannung des Elektrolyten bei der Versuchstemperatur, unter α_{12} die maximale Oberflächenspannung Quecksilber-Elektrolyt angeführt, die sich in der Form

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 - 2 A_{12}$$

darstellen läßt. Wie ich schon in der Einleitung hervorgehoben habe, ist bei der Ableitung obiger Formel keine Rücksicht genommen auf die Helmholtzsche elektrische Doppelschicht, welche die Oberflächenspannung stark verkleinert. Unser α_{12} ist nun so beschaffen, daß keine Doppelschicht existiert, und nur in diesem Falle tritt der Einfluß von A_{12} rein zu Tage. In der vorletzten Kolumne der Tab. 17 sind die Differenzen

$$\alpha_{12} - \alpha_1 = \alpha_2 - 2 A_{12}$$

1) P. Volkmann, Wied. Ann. 56. p. 457. 1895.

2) W. C. Röntgen u. J. Schneider, Wied. Ann. 29. p. 165. 1886.
Die Oberflächenspannung von Äthylalkohol nach J. Traube, Journ. f. prakt. Chem. 31. p. 177. 1885.

berechnet; α_2 , die Oberflächenspannung des Quecksilbers, wollen wir nicht in die Rechnung einführen, da die experimentellen Bestimmungen dieser Größe zwischen 40 und 56 mg/mm schwanken.¹⁾ Jedenfalls ist unser $\alpha_{12} - \alpha_1$ immer kleiner als α_2 , und A_{12} daher positiv. Vergleicht man die Werte von A_{12} für Wasser/Quecksilber mit denen für wässrige Lösung/Quecksilber, so wird man a priori erwarten, daß A_{12} im zweiten Falle größer wird, da die eine anziehende Masse dichter geworden ist. In der Fig. 7 habe ich die durch die Lösung

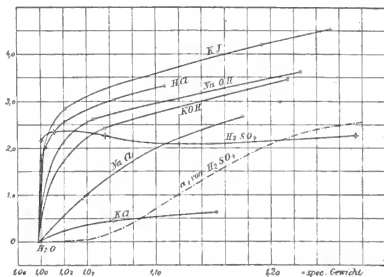


Fig. 7.

bewirkte Veränderung des Wertes $\alpha_2 - 2 A_{12}$ für Wasser als Funktion der spezifischen Gewichte dargestellt. Diese geben die in der letzten Kolonne der Tab. 18 angeführten Werte

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_{12} - \alpha_1)_{\text{Wasser}} - (\alpha_{12} - \alpha_1)_{\text{Lösung}} \\
 & = 2 (A_{12}^{\text{Lösung}} - A_{12}^{\text{Wasser}}) \text{ in mg/mm.}
 \end{aligned}$$

Die Figur zeigt, daß eine vollständig gesetzmäßige Beziehung zwischen A_{12} und der Dichte der Lösungen besteht.

1) Vgl. G. Quincke, Wied. Ann. 61. p. 267. 1897.

Tabelle 17.

Elektrolyt	Spezifisches Gewicht bei der Temperatur	Versuchs-temperatur u. spez. Gew.	σ_1 in $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	Maximum der Elektrokapillarkurve	σ_{12} in $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$	$\sigma_{12} - \sigma_1$	$(\sigma_{12} - \sigma_1)_{\text{Wasser}} - (\sigma_{12} - \sigma_1)_{\text{Lösung}}$
H_2SO_4	1,0000 23,0°	18,6° 1,0012	7,416	276,4	42,409	34,998	2,141
	1,0113 20,1°	18,2° 1,0119	7,423	275,1	42,209	34,786	2,348
	1,0559 19,5°	18,1° 1,0563	7,446	275,8	42,316	34,870	2,264
	1,1194 20,2°	18,0° 1,1200	7,553	277,6	42,598	35,040	2,094
	1,2738 20,3°	18,2° 1,2739	7,766	277,9	42,639	34,873	2,261
	1,0006 19,0°	17,9° 1,0009	7,422	278,5	42,732	35,310	1,824
HCl	1,0039 20,5°	17,8° 1,0047	7,417	277,3	42,547	35,130	2,004
	1,0200 20,5°	18,1° 1,0207	7,391	278,5	41,964	34,573	2,561
	1,0633 19,3°	18,2° 1,0638	7,309°	269,9	41,411	34,102°	3,052
	1,1067 19,0°	18,3° 1,1069	7,226°	267,5	41,043	33,817°	3,317
	1,0554 19,3°	18,4° 1,0557	7,664	276,2	42,378	34,714	2,420
	1,2146 20,2°	18,9° 1,2150	8,427°	274,3	42,087	33,660°	3,474
KOH							

NaOH	1,0460 19,8°	18,1° 1,0465	7,637	274,6	42,193	34,496	2,638
	1,2254 20,0°	18,0° 1,2260	8,708*	275,2	42,225	33,517*	3,617
KCl	1,0630 17,0°	17,0° 1,0630	7,641	288,9	44,327	36,686	0,448
	1,1518 16,8°	16,4° 1,1519	7,918	289,5	44,419	36,501	0,633
NaCl	1,0370 20,0°	18,2° 1,0378	7,577	285,4	43,790	36,213	0,921
	1,1756 19,1°	18,6° 1,1757	8,249	278,3	42,700	34,451	2,683
KJ	1,0290 19,0°	17,2° 1,0206	7,454	272,1	41,750	34,296	2,838
	1,1914 18,8°	17,2° 1,1920	7,602	264,1	40,522	32,920	4,214
Waaser	1,2514 19,2°	17,0° 1,2521	7,664*	262,5	40,276	32,612	4,822
	1,0000 4°	16,0° 0,9990	7,454	290,6	44,588	37,134	—
Aethyl- alkohol	1,0000 4°	18,1° 0,9986	7,424	290,4	44,557	37,134	—
	0,7953 18,5°	18,5° 0,7953	2,288*	270,0	41,435	39,147	— 2,013
KCN	1,0098 20,0°	—	—	269,5	41,850	—	—
	1,0833 20,6°	—	—	268,2	41,151	—	—

Daß sie nicht nur durch das Verhalten der Oberflächenspannungen α_1 bei verschiedenen Konzentrationen bedingt ist, beweist der sehr ähnliche Verlauf der Kurven für die HCl- und KJ-Lösungen, denn α_1 nimmt mit wachsender Konzentration bei HCl ab, bei KJ aber zu. Mit Ausnahme der H_2SO_4 -Lösungen läßt sich folgender Satz aufstellen: *Die Größe A_{12} , welche das Maß für die Adhäsion an der Grenze zwischen Quecksilber und Wasser bildet, wird durch das Auflösen von Salzen im Wasser erhöht und zwar wächst sie mit zunehmender Dichte der Lösung zuerst schneller dann langsamer.*

Nur H_2SO_4 zeigt ein abweichendes Verhalten: A_{12} wächst zuerst sehr schnell, beginnt aber schon bei der Dichte 1,01 zu fallen, erreicht ungefähr bei 1,16 ein Minimum, und steigt dann wieder langsam im weiteren Verlauf. Die Ursachen dieses anomalen Verhaltens sind vielleicht in Veränderungen der Molekularstruktur zu suchen. Die Schwefelsäure zeigt ja bekanntlich auch verschiedene Anomalien in der Beziehung zwischen Dichte und Konzentration (Mendelejeff), Kompressibilität, Oberflächenspannung und Konzentration (Röntgen und Schneider). Die Oberflächenspannung als Funktion der Konzentration ist in der Figur durch die strichpunktierte Kurve in einem willkürlichen Maßstab dargestellt. Diese Kurve und diejenige für A_{12} zeichnen sich durch einen Wendepunkt aus, der ungefähr bei derselben Konzentration liegt. Dagegen fallen die Maxima der beiden Kurven nicht zusammen.

Es scheint, daß zwischen dem Molekulargewicht der gelösten Substanzen und den von ihnen bewirkten Adhäsionserhöhungen eine gesetzmäßige Beziehung besteht, da diese bei ähnlichen Verbindungen wie HCl, NaCl und KCl, oder NaOH und KOH eine umgekehrte Reihenfolge ihrer Größen zeigen, wie die Molekulargewichte. Doch scheint es, daß vom Molekulargewicht nur die Größe der Adhäsionserhöhung abhängt, daß aber ihr Gang im wesentlichen von der Dichte der Lösung bedingt wird und bei allen Substanzen gleich oder wenigstens sehr ähnlich ist. Stellen wir nämlich die Beziehung zwischen Adhäsionserhöhung und Molekulargehalt der Lösungen graphisch dar, so zeigt das Diagramm nicht so einfache Verhältnisse, wie das beigegefügte, und die Kurven für KOH und NaOH werden von derjenigen für HCl geschnitten. Die Adhäsion

zwischen Quecksilber/Alkohol fand ich kleiner, als diejenige zwischen Quecksilber/Wasser, übereinstimmend mit Quincke ¹⁾, der diese beiden Größen allerdings *ohne Rücksicht auf die elektrische Doppelschicht* als erster gemessen hat. Dem erwähnten Umstande ist vielleicht beizurechnen, daß seine Messung der Adhäsion unterschweifligsaures Natron/Quecksilber kleiner als die von Wasser/Quecksilber ausfiel.

Nun wollen wir uns der Frage zuwenden, inwiefern die nach der Tropfenwägungsmethode ermittelten Elektrokapillarkurven sich zur Bestimmung der zur maximalen Oberflächenspannung zugehörigen elektromotorischen Kraft eignen. Ich habe bereits den Einwand angeführt, welcher in dieser Beziehung der angewandten Methode gemacht werden könnte, daß nämlich die beim Tropfen entstehende Gegenpotentialdifferenz die von außen angelegte elektromotorische Kraft verkleinern könnte, wodurch die Maxima nach den höheren Polarisationen hin verschoben erscheinen würden. Diese Frage kann auf Grund der folgenden Tab. 18 entschieden werden.

Unter I. sind die Ergebnisse der Messungen von Paschen ²⁾ mit dem U-Rohr, unter II. die, welche derselbe Forscher mit Tropfelektroden gewonnen hat ³⁾, und unter III. meine eigenen Resultate zusammengestellt, und zwar gibt die erste Kolumne das (auf 18° bezogene) spezifische Gewicht der Lösung, und die zweite die elektromotorische Kraft des Maximums bez der Tropfelektrode in Volt an. Alle Polarisationen sind kathodisch; Paschensche Daniells sind nach seiner Angabe gleich 1,074 Volt angenommen. Die Übereinstimmung unserer Resultate mit den mittels der Tropfelektroden gewonnenen ist in Anbetracht der Unsicherheit der graphischen Methode zur Ermittlung des Maximums und der experimentellen Schwierigkeiten bei der Tropfelektrode als eine sehr gute zu bezeichnen; diese Werte stimmen hier und da sogar besser überein, als die beiden Paschenschen Bestimmungen untereinander. Die Schätzung der Genauigkeit bei meinen Messungen auf $\pm 0,01$ Volt ist daher sicher nicht übertrieben. Von einer Verschiebung des Maximums nach den höheren elektromotorischen Kräften hin ist bei H_2SO_4 und

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 1. 1870.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 40. p. 36. 1890.

3) F. Paschen, Wied. Ann. 41. p. 42. 1890.

Tabelle 18.

I.		II.		III.	
Spez. Gew.	E.M.K.	Spez. Gew.	E.M.K.	Spez. Gew.	E.M.K.
H_2SO_4					
1,000	0,859	—	—	—	—
1,001	0,835	—	—	1,001	0,807
—	—	1,006	0,748	—	—
—	—	—	—	1,012	0,800
—	—	—	—	1,056	0,840
1,066	0,851	—	—	—	—
—	—	1,105	0,850	—	—
—	—	—	—	1,120	0,860
—	—	1,123	0,876	—	—
1,163	0,888	1,169	0,922	—	—
1,189	0,935	—	—	—	—
—	—	1,191	0,986	—	—
1,207	0,958	—	—	—	—
—	—	—	—	1,274	1,02
—	—	1,299	1,021	—	—
1,394	1,030	—	—	—	—
HCl					
1,001	0,494	—	—	1,001	0,569
—	—	—	—	1,004	0,548
—	—	1,010	0,550	—	—
1,015	0,591	1,015	0,553	—	—
—	—	—	—	1,021	0,558
—	—	1,037	0,5585	—	—
—	—	—	—	1,064	0,596
1,080	0,602	—	—	—	—
—	—	1,082	0,589	—	—
1,091	0,612	—	—	—	—
—	—	—	—	1,107	0,627
1,111	0,634	—	—	—	—
—	—	1,121	0,622	—	—
KOH					
—	—	1,038	0,265	—	—
1,044	0,376	—	—	—	—
—	—	—	—	1,055	0,290
—	—	—	—	1,214	0,207
1,357	0,11 ± 0,05	—	—	—	—
—	—	1,477	0,011	—	—

HCl nicht das geringste Anzeichen vorhanden; die KOH-Lösung II hat nach Paschens Angabe $\frac{1}{2}$ Jahr im Glasgefäß gestanden, sodaß die Abweichung zwischen II. und III. nicht ins Gewicht fallen kann. Der plötzliche Anstieg der elektromotorischen Gegenkraft beim Tropfen von Quecksilber entsteht also in dem Momente, wo der Tropfen eben schon abgerissen ist und die zurückbleibende Quecksilbermasse auf einen Augenblick eine frische Oberfläche besitzt. Dadurch werden die Schlüsse von Bernstein¹⁾ vollständig bestätigt, der auf dieselbe bewegte photographische Platte zugleich einen abfallenden Tropfen einer langsam tropfenden Elektrode, und den Quecksilbermaniskus eines Kapillarelektrometers, welches mit dieser verbunden war, aufnahm.

Im folgenden gebe ich eine Zusammenstellung meiner sonstigen Bestimmungen der elektromotorischen Kraft des Maximums.

NaOH	{	vom spez. Gew.	1,0460	bei 19,8°	-0,29 Volt
		" "	1,2254	" 20,0	-0,215
KCl	{	" "	1,0630	" 17,0	-0,573
		" "	1,1518	" 16,8	-0,565
NaCl	{	" "	1,0370	" 20,0	-0,615
		" "	1,1756	" 19,1	-0,553
KJ	{	" "	1,0200	" 19,0	-0,370
		" "	1,1914	" 18,8	-0,385
		" "	1,2514	" 19,2	-0,410
HNO ₃	"	" "	1,0003	" 17,0	-0,322
KCN	{	" "	1,0098	" 20,0	$\approx +0,06$
		" "	1,0833	" 20,6	+0,068
H ₂ O	"	" "	0,9986	" 18,0	-2,0 ²⁾

Die Genauigkeit ist etwa $\pm 0,01$ Volt.

Diese Werte und diejenigen der Kurzschluß- und Maximaloberflächenspannungen wollen wir dazu benutzen um eine Vermutung, die in der Theorie des Kapillarelektrometers öfters auftrat, zu prüfen. Schon Lippmann³⁾ hat den weitgehenden Satz zu beweisen gesucht, daß die Beziehung zwischen der Ober-

1) J. Bernstein, l. c. p. 202.

2) Vgl. im nächsten Abschnitt: Autodepolarisation.

3) G. Lippmann, Ann. de Chim et de Phys. (5) 12, p. 265. 1877.

flächenspannung α einer Quecksilberelektrode und der entsprechenden Potentialdifferenz V unabhängig von der Natur des verwendeten Elektrolyten sei. Später sprach Wiedeburg¹⁾, der eine Modifikation der Helmholtz-Lippmannschen Theorie aufgestellt hat, sogar die Vermutung aus, daß es nicht ausgeschlossen sei, daß eine gewisse, in seiner Theorie auftretende Konstante vielleicht berufen wäre, bei der Polarisierung „für die Vorgänge an den Elektroden dieselbe Rolle einer *universellen Konstanten* zu spielen, wie die „Ladung eines einwertigen Ions“ $\epsilon = 9654 \text{ Coul./g-Äq.}$ für die Vorgänge im Innern des Elektrolyten“.

Diese Konstante $1/c$ spielt die Rolle der halben Kapazität der Flächeneinheit einer polarisierten Elektrode und ist durch die Beziehung

$$\alpha_0 = \alpha_m - \frac{1}{c} \cdot V_m^2$$

gegeben, wobei α_0 und α_m die Kurzschluß- und Maximaloberflächenspannung, und V_m die zu dieser zweiten gehörige elektromotorische Kraft bedeuten.

Ich habe nun aus meinen Versuchen $1/c$ berechnet und zwar ergeben sich in den von mir benutzten willkürlichen Einheiten der Oberflächenspannung die Werte

H_2SO_4	$\left\{ \begin{array}{l} 103,1 \\ 103,1 \\ 101,8 \\ 105,0 \\ 88,4 \end{array} \right.$	HCl	$\left\{ \begin{array}{l} 116 \\ 137,5 \\ 139,2 \\ 128,5 \\ 117,1 \end{array} \right.$	KOH	$\left\{ \begin{array}{l} 101 \\ 168 \end{array} \right.$	NaOH	$\left\{ \begin{array}{l} 80 \\ 132 \end{array} \right.$
Mittel	100,3		128				
KCl	$\left\{ \begin{array}{l} 160 \\ 167 \end{array} \right.$	NaCl	$\left\{ \begin{array}{l} 126 \\ 162 \end{array} \right.$	KJ	$\left\{ \begin{array}{l} 464 \\ 328 \\ 270 \end{array} \right.$	KCN	456
						HNO_3	97,3

Wenn auch die Zahlen, welche bei KOH, NaOH und KCN berechnet wurden, keine große Genauigkeit beanspruchen können, da die Differenz $\alpha_m - \alpha_0$ klein ist, so scheinen mir

1) O. Wiedeburg, Wied. Ann. 54. p. 64. 1895.

hauptsächlich die gut bestimmten Werte bei H_2SO_4 , HCl und KJ zu beweisen, daß $1/c$ weder für alle Elektrolyten, noch für verschiedene Konzentrationen desselben Elektrolyten eine Konstante wäre. Denn, wenn man auch bei der Bestimmung der elektromotorischen Kraft im Falle der verdünnten KJ einen Fehler von 0,03 Volt und bei der Berechnung von $\alpha_m - \alpha_0$ einen solchen von 1,0 w. E. (welche beide ausgeschlossen sind) zulassen würde, ginge der Wert für $1/c$ von 464 erst auf 392 herunter.

In denselben Einheiten, wie sie Wiedeburg benutzt, ist der mittlere Wert von $1/c$ bei H_2SO_4 gleich $100,3/6,52 = 15,4$; dieser stimmt mit dem von Wiedeburg angegebenen 14 Mikrof./cm² ziemlich überein.

Nach dem Bilde, welches uns die Helmholtz-Wiedeburgsche Theorie von den Vorgängen im Kapillarelektrometer entwirft, müßten wir unser Ergebnis in folgender Weise deuten: Wenn auch der Abstand der beiden die Doppelschicht bildenden elektrischen Belegungen bei verschiedenen Konzentrationen einer und derselben Säure keine großen Größenschwankungen zeigen würde, so ist er doch nicht für alle Elektrolyte derselbe, und hängt auch, wenigstens bei einigen Salzen, stark von der Konzentration ab.

An dieser Stelle möchte ich auf die in der Tab. 16 angeführten Resultate der Messungen an Wasser und Alkohol hinweisen. Die beiden ersten Messungen beziehen sich auf frisch eingefülltes, und auf 16 Stunden über Hg abgestandenes Wasser. Ihre Übereinstimmung läßt nichts zu wünschen übrig; die Kurve für Alkohol ist allerdings nicht so glatt, wie diejenige für Wasser. Es sind dies aber die ersten Bestimmungen der Elektrokapillarkurven bei sehr schlecht leitenden Flüssigkeiten. Paschen gelang es nur mit Hilfe seines U-Rohres „mit der elektromotorischen Kraft wachsende, wenn auch sehr langsam erfolgende Ausschläge“ und ihre „Wiederabnahme, welche allerdings erst bei -2 Dan. begann“, nachzuweisen.

VI. *Der aufsteigende Ast. Die Autodepolarisation.* 1. Schon frühere Beobachter wie Paschen und Smith bemerkten, daß bei der Bestimmung des aufsteigenden Astes der Elektrokapillarkurve von Salzen gewisse sonderbare Abweichungen von dem normalen Verhalten, wie z. B. bei der

Schwefelsäure, auftreten. So nennt Paschen in seiner ersten Abhandlung die Art der Einstellung des Kapillarelektrometers bei konzentriertem Na_2SO_4 „langsamer und veränderlich“. Smith¹⁾, der die Kurven für sehr verdünnte KCl , KJ , NaCl u. ä. Lösungen bestimmt hat, schreibt: „Das Verhalten des Meniskus im Kapillarelektrometer ist im allgemeinen im „ansteigenden“ Teile sehr verschieden von demjenigen im absteigenden Gebiete. Im ansteigenden Ast ist das Quecksilber häufig träge und die Oberflächenspannung ist schwierig zu messen. Weiterhin kann die Oberflächenspannung einen gewissen Betrag annehmen, unmittelbar nachdem eine gegebene Potentialdifferenz zwischen die Pole des Elektrometers geschaltet ist und darauf allmählich nach Maßgabe der Berührungsdauer abfallen.“²⁾ Im Gegensatz hierzu ist die Oberflächenspannung im absteigenden Ast der Kurve fast immer sehr bestimmt. Während außerdem die Gestalt des ansteigenden Teiles für Lösungen mit verschiedenen Anionen weitgehend veränderlich ist, und sogar merkliche Unterschiede zeigt für ungleich konzentrierte Lösungen desselben Salzes, ist die Gestalt des absteigenden Teiles während eines beträchtlichen Teiles des Verlaufes (innerhalb der Beobachtungsfehler) für gleich konzentrierte Lösungen von ganz verschiedenen Salzen gleich, und zeigt nur sehr geringe Unterschiede für ungleich konzentrierte Lösungen eines gegebenen Salzes.“

Meine Messungen bestätigen das über den „absteigenden“ Ast Gesagte in vollem Umfange, wie ein Blick auf die beigegebenen Tafeln lehrt. Den Grund für das Verhalten des Kapillarelektrometers im „aufsteigenden“ Aste glaube ich in den Versuchen gefunden zu haben, die ich im folgenden beschreiben will. Zuerst sollen die Resultate der Messungen an K_2SO_4 und Na_2SO_4 tabellarisch zusammengestellt werden (vgl. Tab. 19 u. 20).

Aus der graphischen Darstellung dieser Messungen auf der beigegebenen Tafel III erkennt man sofort das sehr abweichende Verhalten des K_2SO_4 und Na_2SO_4 gegenüber allen im vorigen Abschnitte untersuchten Elektrolyten.

1) S. W. J. Smith, l. c. p. 451.

2) Von mir hervorgehoben.

Tabelle 19.

 K_2SO_4 .

Polarisier. E.M.K. in Volt	I.	II.	III.	IV.	V.
	$\sigma_{18,6^\circ} = 1,0067$	$\sigma_{21^\circ} = 1,0668$	$\sigma_{20^\circ} = 1,040$	$\sigma_{19,5^\circ} = 1,046$	$\sigma_{20,5^\circ} = 1,0682$
	$t = 16,8^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,2^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,0^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 19,6^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 20,1^\circ \pm 0,3^\circ$
0,0	248,5	245,6	263,1 ₅	267,8	218,0
0,100	262,9	261,7	252,3 ₅	273,0	235,4 ₅
0,200	274,3	274,8 ₅	—	275,7 ₅	249,4 ₅
0,300	282,7	284,2	279,7	276,7 ₅	261,4
0,400	283,1 ₅	285,9	287,2	276,1 ₅	269,2 ₅
0,450	—	—	—	—	272,3 ₅
0,500	279,0	276,1	276,2	274,1 ₅	274,9
0,600	278,9	277,9 ₅	277,0	271,3 ₅	277,8
0,700	277,9	279,6	277,4	266,9	277,6
0,800	277,4	280,0 ₅	277,0 ₅	261,1	276,4
0,900	274,8 ₅	279,2 ₅	275,8	253,8	278,4 ₅
1,000	270,3	276,1	273,2 ₅	243,5 ₅	270,5 ₅
1,100	267,2 ₅	271,3	270,9	234,1 ₅	265,7
1,200	262,2	263,6	266,0 ₅	223,2	259,5 ₅
1,300	254,3	254,3 ₅	258,8	—	251,8 ₅
1,400	246,4	242,3	249,6 ₅	197,6	243,6
1,500	235,1 ₅	230,1 ₅	—	—	—
1,600	224,8	217,3	224,9	167,6 ₅	223,0
1,700	213,1	204,2	—	—	—
1,800	200,0	190,0	199,8 ₅	136,3	198,9
1,900	—	174,6 ₅	—	—	—
2,000	170,0	158,2 ₅	168,9 ₅	—	168,4

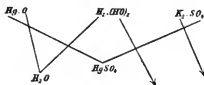
Die Messungsreihen I. und II. der beiden Tabellen sind an „alten“ Lösungen gemacht, die etwa 20 Tage über Quecksilber standen, die Messungen III. an solchen, die frisch bereitet wurden. Das Verhalten aller Lösungen ist sehr ähnlich: sie zeigen insgesamt zwei Maxima, wobei das erste bis auf die konzentrierte „alte“ Lösung von Na_2SO_4 sehr stark ausgeprägt ist, und das zweite, weniger hervortretende, mit demjenigen übereinstimmt, welches mittels „statischer“ Methoden für beide Salze gefunden worden war. Das erste liegt also im aufsteigenden Aste der bisher immer bestimmten Elektrokapillarkurven. Es muß demnach von einer sekundären Reaktion

Tabelle 20.

 Na_2SO_4 .

Polarisier. E.M K. in Volt	I.	II.	III.
	$\sigma_{19,3^\circ} = 1,0094$	$\sigma_{20,6^\circ} = 1,0950$	$\sigma_{19,5^\circ} = 1,0076$
	$t = 17,8^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 18,1^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 17,1^\circ \pm 0,1^\circ$
0,0	249,1	248,6	247,7 _s
0,100	243,6	261,5	263,1
0,200	275,8	270,8 _s	275,4 _s
0,250	—	—	281,3
0,300	284,9 _s	269,1 _s	285,3
0,340	—	—	287,5
0,370	—	—	288,9 _s
0,400	291,3	274,0	290,1
0,420	—	—	290,6 _s
0,440	—	—	276,7 _s
0,460	—	—	276,3
0,480	—	—	276,0
0,500	278,6	277,5	276,5 _s
0,530	—	—	277,5
0,560	—	—	278,5 _s
0,600	282,1	278,4	279,7 _s
0,650	—	—	280,5 _s
0,700	281,1 _s	277,5 _s	280,4 _s
0,750	—	—	280,1
0,800	279,3 _s	276,4 _s	279,2
0,850	—	—	278,1
0,900	275,9	278,4	276,9 _s
0,950	—	—	275,1
1,000	270,6 _s	268,9	273,4
1,100	—	262,2	—
1,200	259,2	254,6	—
1,300	252,5	246,0	—
1,400	244,0	235,6 _s	—
1,500	234,6 _s	224,3	—
1,600	223,7	211,9	—
1,800	199,9	184,7	—
2,000	170,7	154,0 _s	—

herrühren, welche momentan stattfindet, aber keine beständigen Produkte, zwischen denen Gleichgewicht bestünde, liefert. Das naheliegendste Produkt bei den drei Konstituenten Hg , H_2O und K_2SO_4 (bez. Na_2SO_4) wäre KOH (bez. NaOH), deren Maximum bei einer großen Verdünnung auch ungefähr bei 0,3 oder 0,4 Volt liegen muß. Es wurde daher in 150 cm^3 der etwa 5 proz. Lösung von K_2SO_4 ca. 1 g KOH aufgelöst, sodaß sie jetzt außerdem in Bezug auf KOH etwa 0,7 proz. war. Die Elektrokapillarkurve nahm nun die Gestalt IV. an, welche zeigt, daß der Einfluß des K_2SO_4 gegenüber KOH fast vollständig verschwindet, was die aus früheren Messungen entnommene, auf der Tafel mitgezeichnete Kurve VI beweist. Eine weitere Überlegung ergibt, daß, wenn das erste „sekundäre“ Maximum von KOH herrührt, es verschwinden müßte, wenn die K_2SO_4 -Lösung Spuren freier Säure enthielte. Um dies zu untersuchen, wurde die Kurve V einer ziemlich gesättigten frischen Lösung von K_2SO_4 aufgenommen, zu der 2 Proz. einer 0,2 proz. H_2SO_4 -Lösung beigelegt wurden, sodaß sie in Bezug auf H_2SO_4 etwa 0,004 proz. war. Sie zeigt kein sekundäres Maximum, sondern verläuft vollständig normal; ihr bei etwa 0,64 Volt liegendes Maximum wird nach den bisher mitgeteilten Angaben kaum von der verschwindend geringen Menge freier H_2SO_4 beeinflusst, sondern der Hauptsache nach von K_2SO_4 bestimmt werden. Mit Bezug auf die von Warburg¹⁾ und Nernst zur Erklärung der elektrokapillaren Erscheinungen herangezogene Bildung eines Quecksilbersalzes mit Hilfe des in der Lösung vorhandenen Sauerstoffs könnte man vielleicht an die folgende Reaktion denken:



1) E. Warburg, Wied. Ann. 38. p. 321. 1889; 41. p. 1. 1890; G. Meyer, Wied. Ann. 45. p. 508. 1892; 53. p. 845. 1894; 56. p. 680. 1895; U. Behn, Wied. Ann. 61. p. 748. 1897.

wobei, wenn man nach einer „statischen“ Methode die Kurve bestimmt, das Hg-Salz wieder reduziert würde. Allerdings möchte ich dies nur als eine, bisher nicht anders als durch die bereits angeführten Versuche, gestützte vorläufige Vermutung hinstellen. Diese oder eine andere ähnliche Reaktion müßte in außerordentlich kleinen Mengen vor sich gehen. Ein Versuch, das freie Hydroxylion mittels Phenolphthalein nachzuweisen, führte zu einem negativen Resultate. Auch vermag ich vorläufig keinen plausiblen Grund anzugeben, warum die Änderung der Kurve fast sprunghaft erfolgt (vgl. Na_2SO_4 , III. Tafel III).

Ginge die Reaktion nach einem dem obigen ähnlichen Schema vor sich, müßte man etwas Analoges auch bei den KCl- und NaCl-Lösungen erwarten. Dies tritt auch tatsächlich bei verdünnteren Lösungen ein.

In der folgenden Tab. 21 sind die Resultate der Untersuchung einer „alten“ KCl- (I) und je einer frischen verdünnten KCl- (II) und NaCl-Lösung zusammengestellt.

Die auftretenden Anomalien sind zu analog den früher beschriebenen, als daß sie Zufälligkeiten entspringen könnten. Das Verhalten der „alten“ Lösung scheint darauf hinzuweisen, daß sie von der Konzentration des gelösten Quecksilbersalzes abhängen, also eines ähnlichen Ursprunges sind, wie die bei den beiden Sulfaten beschriebenen. Bei 0,7 bez. 0,8 Volt scheint auch eine Anomalie aufzutreten.

Bei allen diesen Versuchen ist der Gang des absteigenden Astes der Kurve ein vollständig regelmäßiger, sodaß meine Messungen mit der von Smith beobachteten Erscheinung im vollen Einklange stehen, und als ihre Erklärung anzufassen sind. Die neuen Erscheinungen sind in voller Reinheit nur an einer sich stets erneuernden Quecksilberoberfläche zu beobachten, und beweisen, daß die Verhältnisse nicht so einfach zu liegen scheinen, wie sie auch bei den neuesten Theorien¹⁾ angenommen werden.

1) J. J. van Laar, Zeitschr. f. phys. Chem. 41. p. 385. 1902.

Tabelle 21.

Polarisier. E.M.K. in Volt	KCl		NaCl
	I.	II.	
	$\sigma_{18,1^\circ} = 1,0025$ $t = 16,2^\circ \pm 0,1^\circ$	$\sigma_{17,8^\circ} = 1,0050$ $t = 18,0^\circ \pm 0,1^\circ$	$\sigma_{20,1^\circ} = 1,0053$ $t = 17,8^\circ \pm 0,2^\circ$
0,0	248,8	252,0	244,2
0,100	265,4 _s	269,3	259,9
0,150	—	—	263,6
0,200	274,2 _s	260,0	260,0
0,240	—	—	257,2
0,300	275,3 _s	271,3 _s	266,4
0,400	280,3 _s	274,0 _s	270,7 _s
0,500	282,6	275,2 _s	269,9 _s
0,600	287,9	274,9	269,6
0,700	292,6 _s	280,2	273,3 _s
0,800	285,6	281,0 _s	271,1 _s
0,900	280,6 _s	272,4 _s	268,0
1,000	273,0	268,2	263,5
1,100	265,3 _s	261,3	257,9
1,200	255,5	253,0	249,9
1,300	244,1	—	—
1,400	233,1	—	—
1,500	221,3	—	—
1,600	209,7	—	—
1,700	197,1	—	—
1,800	183,0 _s	—	—
1,900	167,7	—	—
2,000	144,3 _s	—	—

2. Die Bestimmungen der zur maximalen Oberflächenspannung zugehörigen elektromotorischen Kraft könnten beeinflusst werden durch die Autodepolarisation. Wenn man nämlich die natürliche Potentialdifferenz an der kleinen Elektrode verändert, so muß ein Depolarisationsstrom entstehen, welcher die beständige Tendenz der „polarisierten“ Elektrode vorstellt, die ursprüngliche Potentialdifferenz anzunehmen. Der Einfluß der Depolarisation äußert sich in der Erzeugung eines Potentialgefälles innerhalb des Elektrolyten nach dem Ohmschen Gesetze, und be-

steht in einer langsameren Veränderung der Potentialdifferenz an der kleinen Elektrode, als der zugeschalteten elektromotorischen Kraft. Die Einstellungen eines Kapillarelektrometers erfolgen bei Einschaltung eines sehr großen Widerstandes langsamer, als ohne Widerstand; wenn im Tropfapparat unterdessen ein Tropfen abfällt, so geschah es bei einer gegenüber der eingeschalteten desto kleineren elektromotorischen Kraft, je größerer Widerstand sich im Stromkreis befindet. Diesen Einfluß der Depolarisation untersuchte ich bei HCl, KCl und KOH, indem ich in die Zuleitung zum Potentiometer verschiedene Widerstände W (vgl. Fig. 1) einschaltete. Es waren induktionslose Graphitstriche auf Glastafeln, deren Widerstand innerhalb einer Messung sich nie mehr als höchstens um $\frac{1}{2}$ Proz. änderte.

Die Resultate der Messungen sind in den Tab. 22 und 23 enthalten.

Wie wir aus der graphischen Darstellung auf Taf. II ersehen können, ist der Einfluß der Depolarisation bei fallenden Tropfen ziemlich groß. Das Maximum bei der Chlorwasserstoffsäure verschiebt sich von 0,575 Volt

durch den Widerstand	45 900 Ω	auf 0,815, also um 0,24 Volt
" "	96 700 Ω	" 1,102 " " 0,45 "
" "	372 000 Ω	" 2,7 " " 2,13 "
" "	976 000 Ω	" 6,5 " " 5,93 "

und ähnlich bei KOH durch 92 000 Ω um 0,373 und bei KCl durch denselben Widerstand um 0,305 Volt. Die Beobachtungen bei HCl zeigen, wie sich von vornherein erwarten läßt, eine Proportionalität der Verschiebung mit dem eingeschalteten Widerstand. Diese beträgt bei HCl im Mittel 0,00542 Volt, bei KOH 0,00405 und bei KCl 0,00332 Volt für jedes Tausend Ohm. Diese Verschiebung kann unsere Messungen nicht beeinflussen haben, da das Tropfelektrometer bei der von allen benutzten Lösungen am schlechtesten leitenden verdünnten KJ-Lösung unmittelbar vor dem Tropfenabfall einen inneren Widerstand von nur 400 Ω hatte. Dagegen äußert sich der Einfluß der Autodepolarisation bei sehr schlechten Leitern, wie Alkohol, sogar auch Wasser in einem stark fühlbaren Maße.

Das nähere Studium der beiden in diesem Abschnitte beschriebenen Erscheinungen soll in einer weiteren Arbeit fortgesetzt werden.

Tabelle 22.

HCl, $\sigma_{16,0^\circ} = 1,0320$.

Polarisier. E.M.K. in Volt	$W = 0$	$W = 45\,900\ \Omega$	$W = 86\,700\ \Omega$	$W = 372\,000\ \Omega$	$W = 976\,000\ \Omega$
	$t = 18,6^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,3^\circ \pm 0,1^\circ$	$t = 18,5^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 16,1^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 16,2^\circ \pm 0,1^\circ$
—	227,6 _s	229,9	230,4	234,5 _s	236,6
0,100	243,4	235,5	233,4 _s	—	—
0,200	253,8	243,25	238,1	235,4	—
0,300	261,7 _s	250,9	244,1	—	—
0,400	267,9	257,6	249,5	236,4	—
0,500	272,0	263,6	259,8	—	237,8
0,600	272,8 _s	268,4	256,6	—	—
0,700	271,0 _s	271,6	264,7	—	—
0,800	267,0	273,03	268,8	240,4 _s	—
0,900	261,4	272,4	271,5	—	—
1,000	252,0 _s	269,9	272,9	—	238,7
1,100	239,6*	266,6	272,4	—	—
1,200	229,8*	262,45	270,1	248,7	—
1,300	—	252,1	267,8 _s	—	—
1,400	—	247,75	263,2	251,0	—
1,500	—	244,9*	258,0	—	239,8
1,600	—	—	251,6	255,2 _s	—
1,800	—	—	239,5 _s	258,5	—
2,00	—	—	229,6	263,3	241,1
2,20	—	—	216,2	268,1	—
2,40	—	—	—	272,2	—
2,50	—	—	—	—	244,0
2,60	—	—	—	272,9	—
2,80	—	—	—	272,7	—
3,00	—	—	—	271,5	248,0
3,20	—	—	—	267,1	—
3,40	—	—	—	260,4	—
3,80	—	—	—	245,0	—
4,00	—	—	—	—	255,8
4,20	—	—	—	230,7	—
5,00	—	—	—	206,7*	264,7
6,00	—	—	—	—	272,9
7,00	—	—	—	—	273,3
8,00	—	—	—	—	270,3*

Tabelle 23.

$$W = 92000 \Omega.$$

Polarisierende E.M.K. in Volt	KOH	KCl
	$\sigma_{16,0^\circ} = 1,0430$	$\sigma_{16,8^\circ} = 1,1518$
	$t = 15,8^\circ \pm 0,2^\circ$	$t = 16,4^\circ \pm 0,2^\circ$
—	265,8	234,6
0,100	267,0	237,8
0,200	267,6 _s	243,1 _s
0,300	268,4	251,8 _s
0,400	270,9	260,2 _s
0,500	272,6 _s	268,4
0,600	273,0 _s	275,0
0,700	272,1	281,9
0,800	269,7	286,6
0,900	266,4	287,8 _s
1,000	262,2	284,1 _s
1,100	257,8 _s	278,4 _s
1,200	252,9	271,4 _s
1,300	248,0	264,0 _s
1,400	243,4	256,7 _s
1,500	238,4	248,1
1,600	233,3	241,6
1,700	—	233,2 _s
1,800	222,0 _s	225,2
1,900	—	218,8
2,000	210,8	212,2
2,200	199,3 _s	202,9*

VII. Zusammenfassung der Resultate. Zur Untersuchung der Größe der maximalen Oberflächenspannung wurde die Tropfenwägungsmethode benutzt, über welche einige neue Aufklärungen gegeben werden.

Es wird bewiesen, daß die angewandte Methode sich zur Aufnahme von *Elektrokapillarkurven* eignet, indem sie bei Säuren, eventuell konzentrierteren Salzlösungen richtige — d. h. mit den mittels „statischer“ Methoden gewonnenen übereinstimmende — Werte für die elektromotorische Kraft des Maximums und den Gang der Kurve ergibt.

Aus den maximalen Oberflächenspannungen wird der Satz abgeleitet, daß die Adhäsion zwischen Wasser und Quecksilber durch Lösung von Salzen zunimmt, und zwar mit wachsender Dichte zuerst schneller, dann langsamer; auf einen möglichen Zusammenhang der Größe der Änderung mit dem Molekulargewicht chemisch ähnlicher Salze wird hingewiesen.

Die „Kapazität der polarisierten Elektrode“ hat nicht nur für verschiedene Elektrolyte, sondern auch für verschiedene Konzentrationen desselben Elektrolyten verschiedene Werte.

Beim Kontakt einer frischen Quecksilberoberfläche mit einer Salzlösung kommen Prozesse vor, welche ein „sekundäres Maximum“ auf dem aufsteigenden Ast der Elektrokapillarkurve verursachen können. Dadurch wird das Verhalten des „statischen“ Kapillarelektrometers beim aufsteigenden Ast erklärt. Der Einfluß der Autodepolarisation auf die Angaben eines „Tropfenelektrometers“ wird festgestellt.

Darmstadt, Physikalisches Institut der techn. Hochschule,
Dezember 1902.

(Eingegangen 21. März 1903.)

3. *Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen; von F. Pockels.*

Aus Beobachtungen über die durch einseitigen Druck bewirkten optischen Änderungen kann man für Körper, deren Elastizitätskonstanten vollständig bekannt sind, den Einfluß beliebiger, innerhalb der Elastizitätsgrenzen bleibender Deformationen auf die Lichtfortpflanzung berechnen und kann davon insbesondere Anwendung machen, um die Temperaturkoeffizienten der Brechungsindizes von dem Einfluß der thermischen Dilatation zu befreien, also den *reinen Temperatureinfluß* zu ermitteln. Ich habe diese Untersuchung früher für Quarz und verschiedene reguläre Krystalle, sowie neuerdings für eine Reihe von Glasarten durchgeführt, wobei sich für die letzteren, sowie für den Quarz durchweg eine *Zunahme* der Brechungsindizes durch Temperaturerhöhung ohne Dilatationen herausstellte.¹⁾ Im folgenden will ich über die analoge Untersuchung am Kalkspat berichten, dessen optische Eigenschaften ja von besonderem Interesse sind, und für den genaue Bestimmungen der zu der erwähnten Berechnung nötigen elastischen und thermischen Konstanten vorliegen.

1. Formeln für Krystalle des rhomboedrigen Systems.

Die Gesetze der Fortpflanzung ebener Lichtwellen in durchsichtigen, doppeltbrechenden Kristallen lassen sich bekanntlich am einfachsten mit Hilfe einer, von Fresnel als Elastizitätsfläche, von Senff und F. Neumann als Ovaloid, neuerdings von Voigt als *Polarisationsovaloid* bezeichneten Fläche vierten

1) F. Pockels, Wied. Ann. **37**. p. 144. 269. 372. 1889; Ann d. Phys. **7**. p. 745; **9**. p. 220. 1902.

Grades darstellen, deren Gleichung in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem lautet ¹⁾

$$(1) r^4 = B_{11} x^2 + B_{22} y^2 + B_{33} z^2 + 2 B_{23} y z + 2 B_{31} z x + 2 B_{12} x y.$$

Eine Änderung des optischen Verhaltens wird also durch die Änderungen der Koeffizienten B_{hk} , der *Polarisationskonstanten* nach Voigts Bezeichnung, charakterisiert sein. Sind diese Änderungen durch nicht zu große Deformationen verursacht, so wird man sie gleich homogenen linearen Funktionen der sechs Deformationsgrößen $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ (in der nach Kirchhoff üblichen Bezeichnung) setzen dürfen. Die Form dieser Functionen vereinfacht sich, wenn man ein den Symmetrieverhältnissen des Kristalls angepaßtes Koordinatensystem X^0, Y^0, Z^0 zu Grunde legt. In dem für uns jetzt in Betracht kommenden Falle der *rhomboedrischen* Symmetrie werde die Z^0 -Achse in die dreizählige Symmetrieachse (die optische Achse des nicht deformierten Krystalles), die X^0 -Achse in eine der zweizähligen Symmetrieachsen gelegt und die positive Richtung der Y^0 -Achse so angenommen, daß sie aus einer Fläche des positiven Grundrhomboeders (+ R) austritt. Dann lautet der Ansatz für die veränderten Polarisationskonstanten, wie ich früher ²⁾ gezeigt habe:

$$(2) \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_o^2 + a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{14} y_z, \\ B_{22} = \omega_o^2 + a_{12} x_x + a_{11} y_y + a_{13} z_z - a_{14} y_z, \\ B_{33} = \omega_o^2 + a_{31} (x_x + y_y) + a_{33} z_z, \\ B_{23} = a_{41} (x_x - y_y) + a_{44} y_z, \\ B_{31} = a_{44} z_z + a_{41} x_y, \\ B_{12} = a_{14} z_z + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) x_y. \end{cases}$$

Darin bedeuten ω_o^2, ω_e^2 die ursprüngliche ordentliche und außerordentliche Hauptlichtgeschwindigkeit.

Für die Anwendung auf Beobachtungen, bei denen die Deformation durch *einseitigen Druck* hervorgebracht wird, ist es bequemer, die Größen B_{hk} als Funktionen der auf das

1) Ich behalte hier größtenteils die in meiner ersten, oben zitierten Arbeit gebrauchten Bezeichnungen bei, um die Vergleichung zu erleichtern.

2) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 161. 1889.

Koordinatensystem $X^0 Y^0 Z^0$ bezogenen Druckkomponenten $X_x \dots Y_x \dots$ darzustellen. Solange die letzteren so klein sind, daß Proportionalität zwischen ihnen und den Deformationen besteht, können auch diese Funktionen als lineare angenommen werden. Ihre Form ergibt sich jedoch unter Rücksicht darauf, daß sich $X_x \dots Y_x \dots$ wie $X^3 \dots YZ \dots$, dagegen $x_x \dots y_x \dots$ wie $X^2 \dots 2 YZ \dots$ transformieren, etwas abweichend; man findet für das rhomboedrische System, wenn die neuen Koeffizienten mit $-a_{hk}$ bezeichnet werden:

$$(3) \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_0^2 - [\alpha_{11} X_x + \alpha_{12} Y_y + \alpha_{13} Z_z + \alpha_{14} Y_z], \\ B_{22} = \omega_0^2 - [\alpha_{12} X_x + \alpha_{11} Y_y + \alpha_{13} Z_z - \alpha_{14} Y_z], \\ B_{33} = \omega_0^2 - [\alpha_{31} (X_x + Y_y) + \alpha_{33} Z_z], \\ B_{23} = -[\alpha_{41} (X_x - Y_y) + \alpha_{44} Y_z], \\ B_{31} = -[\alpha_{44} Z_z + 2 \alpha_{41} X_y], \\ B_{12} = -[\alpha_{14} Z_z + (\alpha_{11} - \alpha_{12}) X_y]. \end{cases}$$

Zwischen den Konstanten a_{hk} und α_{hk} bestehen dann die Relationen:

$$(4) \quad a_{hk} = \sum_1^6 \alpha_{hi} c_{ki}, \quad \alpha_{hk} = \sum_1^6 a_{hi} s_{ki},$$

wo die $c_{ki} = c_{ik}$ die Elastizitätskonstanten, die $s_{ki} = s_{ik}$ die Elastizitätsmoduln (nach Voigts Bezeichnung) sind; speziell im vorliegenden Falle gilt:

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = c_{11} \alpha_{11} + c_{12} \alpha_{12} + c_{13} \alpha_{13} + c_{14} \alpha_{14}, \\ \alpha_{12} = c_{12} \alpha_{11} + c_{11} \alpha_{12} + c_{13} \alpha_{13} - c_{14} \alpha_{14}, \\ \alpha_{13} = c_{13} (\alpha_{11} + \alpha_{12}) + c_{33} \alpha_{13}, \\ \alpha_{14} = c_{14} (\alpha_{11} - \alpha_{12}) + c_{44} \alpha_{14}, \\ \alpha_{31} = (c_{11} + c_{12}) \alpha_{31} + c_{13} \alpha_{33}, \\ \alpha_{33} = 2 c_{13} \alpha_{31} + c_{33} \alpha_{33}, \\ \alpha_{41} = (c_{11} - c_{12}) \alpha_{41} + c_{14} \alpha_{44}, \\ \alpha_{44} = 2 c_{14} \alpha_{41} + c_{44} \alpha_{44}. \end{cases}$$

Um die optische Wirkung eines um die Z^0 -Achse symmetrischen Deformations- oder Drucksystems, wie es bei der thermischen Dilatation vorliegt, zu berechnen, ist nur die Kenntnis der Größen $(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, α_{13} , α_{31} , α_{33} oder $(\alpha_{11} + \alpha_{12})$, α_{13} , α_{31} , α_{33}

erforderlich. Doch habe ich die Untersuchung auf die Bestimmung sämtlicher Konstanten ausgedehnt, da es mir im Hinblick auf die mechanische Erzeugung von Zwillingslamellen im Kalkspat auch von Interesse schien, die Änderung der Wellenfläche durch gewisse in Bezug auf die Hauptaxe nicht symmetrische Deformationen berechnen zu können.

Für die experimentelle Bestimmung der Konstanten α_{kk} ist zu beachten, daß von den optischen Symmetrieachsen X , Y , Z des deformierten Krystalles die eine (Z), welche aus der Z^0 -Achse hervorgeht, von dieser immer nur um einen sehr kleinen Winkel abweicht; die Drehungen um die X^0 - und Y^0 -Achse, durch welche sie in die neue Lage übergeht, sind nämlich gegeben durch

$$(6a) \quad \operatorname{tg} 2 \psi_x = \frac{2 B_{13}}{B_{12} - B_{31}},$$

$$(6b) \quad \operatorname{tg} 2 \psi_y = \frac{2 B_{21}}{B_{23} - B_{11}},$$

und hierin sind die Zähler kleine Größen erster Ordnung, d. h. von der Größenordnung der Deformationen, die Nenner dagegen sehr annähernd $= \pm (\omega_o^2 - \omega_e^2)$, d. i. beim Kalkspat $\mp 0,0891$. Was die Richtung dieser Drehung betrifft, so ist aus den Ausdrücken (3) für B_{23} und B_{31} leicht zu erkennen, daß sie im Falle eines zur Hauptachse senkrechten einseitigen Druckes p , dessen Richtung mit der X^0 -Achse den Winkel ψ bildet, um eine Achse erfolgt, die gegen X^0 unter dem Winkel $+ 2 \psi$ geneigt ist; dabei ist die Größe der Drehung von ψ unabhängig und sehr nahe durch

$$(6'') \quad \psi = \frac{\alpha_{41} p}{\omega_o^2 - \omega_e^2}$$

gegeben. Liegt die Druckrichtung irgendwie in einer Symmetrieebene ($Y^0 Z^0$) oder senkrecht zu derselben ($\parallel X^0$), so geschieht die Drehung der Z -Achse natürlich in jener Symmetrieebene.

Berücksichtigt man das vorstehend Gesagte, so folgt aus der bekannten Konstruktion der Wellengeschwindigkeiten mit Hülfe des zur Wellenebene parallelen Schnittes des durch (1) dargestellten Ovaloids, daß für Fortpflanzungsrichtungen, die senkrecht zur Z^0 -Achse sind, die eine Geschwindigkeit bis auf kleine Größen zweiter Ordnung stets durch $\sqrt{B_{33}}$ gegeben ist und die andere sich durch B_{11} , B_{22} und B_{12} bestimmt; ferner,

daß für die Geschwindigkeiten in der Richtung der Z^0 -Achse nur B_{11} , B_{22} , B_{33} maßgebend sind.

Wirkt der Druck speziell parallel der Z^0 -, X^0 - oder Y^0 -Achse, so sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten in der bezeichneten Annäherung direkt durch $\sqrt{B_{11}}$, $\sqrt{B_{22}}$, $\sqrt{B_{33}}$ gegeben, welche Größen dann die Konstanten α_{11} , α_{12} , α_{13} , α_{31} , α_{33} enthalten. Die letzteren können daher durch Beobachtungen über die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten in den Richtungen X^0 , Y^0 , Z^0 , wenn ein einseitiger Druck parallel einer derselben ausgeübt wird, ermittelt werden. Zur Bestimmung der Konstante α_{41} , welche für die erwähnte *Drehung* der Z -Achse maßgebend ist, muß man, da diese Drehung, wie wir unten sehen werden, für die direkte Beobachtung zu klein ist, die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in einer gegen die Z^0 -Achse schiefwinklig geneigten Richtung heranziehen. Für eine Fortpflanzungsrichtung, die im ersten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene mit der Y^0 -Achse den Winkel α bildet, ist nämlich die Geschwindigkeit der senkrecht zur $Y^0 Z^0$ -Ebene polarisierten Welle zufolge der Ovaloidgleichung gegeben durch

$$(7) \quad \omega_a^2 = B_{22} \sin^2 \alpha + B_{33} \cos^2 \alpha - B_{23} \sin 2\alpha,$$

ebenso für die hierzu senkrechte, im zweiten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene gelegene Fortpflanzungsrichtung durch

$$(7') \quad \omega_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^2 = B_{22} \cos^2 \alpha + B_{33} \sin^2 \alpha + B_{23} \sin 2\alpha.$$

Hierin kommt also B_{23} vor, welches bei einem parallel der X -Achse ausgeübten Drucke proportional mit α_{41} ist. Aus der durch einen solchen Druck hervorgebrachten Verzögerung der erwähnten Welle gegen die andere, parallel zur $Y^0 Z^0$ -Ebene polarisierte, deren Geschwindigkeit $\sqrt{B_{11}}$ ist, kann daher α_{41} berechnet werden.

Die Konstanten α_{14} und α_{44} endlich, welche in (3) mit Y_s multipliziert auftreten, kommen zur Geltung, wenn man einen in der $Y^0 Z^0$ -Ebene gegen die Z^0 -Achse (am besten unter etwa 45°) geneigten Druck ausübt, und können aus den relativen Verzögerungen abgeleitet werden, welche man dann in der Richtung der X^0 -Achse und in der zur Druckrichtung senkrechten Richtung in der $Y^0 Z^0$ -Ebene beobachtet. Für erstere Richtung sind nämlich die Geschwindigkeiten durch $\sqrt{B_{22}}$ und $\sqrt{B_{33}}$, für

letztere durch $\sqrt{B_{11}}$ und eine der Formeln (7) gegeben, und in B_{11} oder B_{22} tritt im vorliegenden Falle α_{14} , in B_{23} α_{44} auf.

2. Anordnung und Berechnung der Beobachtungen.

Nach den im vorstehenden entwickelten Gesichtspunkten wurden die nachstehend zusammengestellten Orientierungen der für die Beobachtungen zu verwendenden Prismen (rechtwinkligen Parallelepipeda) gewählt. Wir bezeichnen dabei die Richtung der langen Kanten mit L , diejenige der kurzen mit D_1 bez. D_2 ; die Länge der ersteren betrug 20 mm, die der letzteren 6,0 mm bis auf Abweichungen von 0,01 mm, welche zu vernachlässigen sind. Die Herstellung der Prismen, deren Seitenflächen genau planparallel und fein poliert sein mußten, wurde von der Firma Dr. Steeg & Reuter in vortrefflicher Weise ausgeführt.

Prismengattung I. $L \parallel Z^0$, D_1 und D_2 irgendwie in der $X^0 Y^0$ -Ebene orientiert (wir können annehmen: $D_1 \parallel X^0$, $D_2 \parallel Y^0$).

IIa. $L \parallel Y^0$, $D_1 \parallel X^0$, $D_2 \parallel Z^0$.

IIb. $L \parallel X^0$, $D_1 \parallel Y^0$, $D_2 \parallel Z^0$.

III. $L \parallel X^0$; D_1 senkrecht zur Fläche des Spaltungs-rhomboiders $+R$, also mit Y^0 den Winkel $\alpha = 45^\circ 23'$, mit Z^0 $\pi/2 - \alpha = 44^\circ 37'$ bildend; D_2 im zweiten Quadranten der $Y^0 Z^0$ -Ebene gegen Z^0 unter dem Winkel α geneigt.

IV. L in der $Y^0 Z^0$ -Ebene so gelegen, wie D_2 bei III.; D_1 parallel der Normale von $+R$; $D_2 \parallel X^0$.

Die Abweichungen von den hier angegebenen Orientierungen, welche teils durch Messung der Auslöschungsrichtungen im Polarisationsapparat, teils durch goniometrische Messung der Winkel gegen kleine angespaltene Flächen festgestellt wurden, waren so gering, daß sie im Vergleich mit den sonstigen Fehlerquellen, z. B. der Unsicherheit betreffs der Druckrichtung und Beobachtungsrichtung, nicht berücksichtigt zu werden brauchten.

Um aus den beobachteten Verzögerungen die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten und damit die Konstanten α_{hk} ableiten zu können, muß zunächst derjenige Teil der Verzögerung bekannt sein, welcher von der *Dickenzunahme* des Prismas in der Beobachtungsrichtung (D_1 oder D_2) herrührt. Nach-

stehend sind für die oben bezeichneten Prismen die einem longitudinalen Drucke p entsprechenden Druckkomponenten und die daraus berechneten Dickenzunahmen $D - D^0$ zusammengestellt. Die dabei benutzten Werte der Elastizitätsmoduln s_{hk} sind nach den Bestimmungen von Baumgarten und Voigt¹⁾:
 $s_{11} = 11,14 \cdot 10^{-5}$, $s_{12} = -3,67 \cdot 10^{-5}$, $s_{13} = -4,24 \cdot 10^{-5}$,
 $s_{33} = 17,13 \cdot 10^{-5}$, $s_{14} = 8,98 \cdot 10^{-5}$, $s_{44} = 39,52 \cdot 10^{-5}$,
 wobei, wie im folgenden immer, als Einheit des Druckes 1 kg-Gewicht pro mm² vorausgesetzt ist.

Prisma I. $X_x = Y_y = I_z = Z_x = X_y = 0$, $Z_z = p$.

$$(8) \quad D - D^0 = -p D^0 s_{13} = +4,24 p D^0 \cdot 10^{-5}.$$

Prisma IIa. $X_x = Z_z = I_z = Z_x = X_y = 0$, $I_y = p$.

$$(9) \quad D_1 - D_1^0 = -p D_1^0 s_{12} = +3,67 p D_1^0 \cdot 10^{-5},$$

$$(10) \quad D_2 - D_2^0 = -p D_2^0 s_{13} = +4,24 p D_2^0 \cdot 10^{-5}.$$

Prisma IIb erfährt dieselben Dickenänderungen.

Prisma III. $X_x = p$, $I_y = Z_z = I_z = Z_x = X_y = 0$.

$$(11) \quad \begin{cases} D_1 - D_1^0 = -p D_1^0 (s_{12} \cos^2 \alpha + s_{13} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \\ \quad = -0,53 \cdot p D_1^0 \cdot 10^{-5}, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} D_2 - D_2^0 = -p D_2^0 (s_{12} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \\ \quad = +8,44 p D_2^0 \cdot 10^{-5}. \end{cases}$$

Prisma IV. $X_x = 0$, $I_y = p \sin^2 \alpha$, $Z_z = p \cos^2 \alpha$, $I_z = -\frac{1}{2} p \sin 2\alpha$, $Z_x = X_y = 0$.

$$(13) \quad \begin{cases} D_1 - D_1^0 = -p D_1^0 \{ (s_{11} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \cos^2 \alpha \\ \quad + (s_{13} \sin^2 \alpha + s_{33} \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha \\ \quad - \frac{1}{2} (s_{11} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} s_{44} \sin 2\alpha) \sin 2\alpha \}, \\ \text{oder nahezu} \\ \quad = -\frac{1}{4} p D_1^0 (s_{11} + 2s_{13} + s_{33} - s_{44}) = +4,93 p D_1^0 \cdot 10^{-5}. \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} D_2 - D_2^0 = -p D_2^0 (s_{12} \sin^2 \alpha + s_{13} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} s_{14} \sin 2\alpha) \\ \quad = +8,44 p D_2^0 \cdot 10^{-5}. \end{cases}$$

Die Beobachtungen betrafen die absoluten und relativen Verzögerungen der sich senkrecht zu den Seitenflächen der longitudinal komprimierten Prismen fortpflanzenden Wellen,

1) W. Voigt, Wied. Ann. **39**. p. 412 u. 432. 1890.

sowie in einem Falle die Änderung der Kurven gleichen Gangunterschiedes. Sie wurden ausschließlich mit Natriumlicht ausgeführt. Der Kompressionsapparat, sowie die Methoden zur Messung der absoluten Verzögerungen mittels Interferentialrefraktors, der relativen mittels Babinetschen Kompensators waren dieselben, welche ich bei der schon zitierten Untersuchung über das Verhalten verschiedener Glassorten angewendet und l. c. p. 747—750 beschrieben habe, so daß hier auf die dort gemachten Angaben verwiesen werden kann. Bezüglich der Anwendung des Druckhebels ist nur zu bemerken, daß derselbe hier, um etwaige Verschiebungen des darunterstehenden Kristallprismas sicherer zu vermeiden, nicht ganz abgehoben wurde, sondern immer mit der $\frac{1}{3}$ kg wiegenden Wagschale belastet blieb, auf welche die weiteren Gewichte mit der Hand aufgesetzt wurden. Ans diesen Gewichten G bestimmt sich dann der Druck p , welchem die beobachteten Änderungen entsprachen, gemäß der Relation

$$p = \frac{4,9}{D_1 \cdot D_2} \cdot G.$$

Die Belastung durfte bei einem Teil der Prismen nur relativ gering (gleich 2 kg) genommen werden, da sonst Zwillingslamellen nach der Gleitfläche $-\frac{1}{2}R$ entstanden. Bei diesen kleinen Belastungen wurden als Zwischenlagen zur Druckausgleichung dünne Kautschukplättchen, bei größeren Drucken Bleiplättchen verwendet.

Besondere Schwierigkeiten entstanden jedoch beim Kalkspat durch seine sehr starke Doppelbrechung, welche eine sehr starke Änderung der außerordentlichen Lichtgeschwindigkeit und des Gangunterschiedes mit der Richtung bedingt. Diese machte es notwendig, bei den Kompensatorbeobachtungen den ursprünglich vorhandenen großen Gangunterschied durch ein oder zwei mit dem zu komprimierenden Prisma in passender Weise verbundene andere Prismen größtenteils zu kompensieren. Hierdurch war zugleich der Einfluß von Temperaturschwankungen auf den Gangunterschied in der Hauptsache aufgehoben, welcher für ein einzelnes Kalkspatprisma von der hier benutzten Dicke in den Richtungen senkrecht zur Hauptachse $\frac{1}{6}$ Wellenlänge für 1° betragen und daher sehr störend sein würde. Die Befestigung der Kompensationsprismen vor

oder hinter dem zu untersuchenden Prisma geschah mittels Körnchen von Klebwachs, so daß sie nicht an der Kompression, wohl aber an den etwa durch die Belastung veranlaßten Drehungen des Versuchsprismas teilnahmen und die Änderungen des Gangunterschiedes, welche durch letztere sonst verursacht worden wären, ebenfalls kompensierten. Die Anordnung dieser Kompensationsprismen wird bei Mitteilung der Beobachtungsergebnisse für die einzelnen Fälle angegeben werden. Sie wurden in solcher Lage angeklebt, daß der schwarze Streifen des Babinetschen Kompensators möglichst geradlinig und scharf erschien; allein dies war immerhin nur in sehr viel unvollkommener Weise zu erreichen, als bei isotropen Prismen, so daß auch die Genauigkeit der Einstellung eine erheblich geringere war. Bei den Messungen der absoluten Verzögerungen wurde, ganz ähnlich wie bei den früheren Beobachtungen an Glasprismen, neben dem zu untersuchenden Prisma ein zweites, gleiches, durch einen Metallrahmen mit ihm verbundenes Prisma in solchem Abstände aufgestellt, daß durch jedes der Prismen eines der beiden nachher zur Interferenz gelangenden Strahlenbündel hindurchging. Hierdurch wurde sowohl der sonst zu große ursprüngliche Gangunterschied der letzteren, als auch der Einfluß kompensiert, den andernfalls eine durch die Belastung etwa verursachte Drehung des Versuchsprismas gehabt hätte.

Es ist nun allerdings noch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß das Kompensationsprisma *allein* eine Drehung erfährt, indem das zur Beobachtungsrichtung senkrechte Flächenpaar des zu untersuchenden Prismas infolge der Deformation des letzteren seine Richtung ändert, ohne daß sich das Prisma als ganzes dreht. Dies wird dann eintreten können, wenn sich die Winkel zwischen jenem Flächenpaar und den anderen Seitenflächen oder den Endflächen des Prismas bei dessen Kompression ändern; im ersteren Falle wird eine Drehung der Vorderfläche des Prismas um seine Vertikalachse, im zweiten Falle, da die den Druck erleidenden Endflächen wahrscheinlich sich selbst parallel bleiben werden, eine Neigung gegen die Vertikalrichtung stattfinden. Da es sich hierbei aber um sehr kleine Neigungen handelt, so wird ein merklicher Einfluß derselben auf den Gangunterschied bez. auf die

Differenz der Gangunterschiede im komprimierten und im Kompensationsprisma nur dann vorhanden sein können, wenn die Beobachtungsrichtung einen beträchtlichen Neigungswinkel gegen die optischen Symmetrieachsen besitzt, also nur bei den Prismen III und IV. Der Betrag der schädlichen Drehung ist höchstens gleich der Winkeländerung zwischen den zur X° -Achse parallelen Flächen, welche mit der Y° - und Z° -Achse Winkel von nahe 45° bilden. Dieselbe wird durch $z_x - y_y$ gemessen und beträgt somit

$$\text{bei Prisma III: } 0,57 \cdot p \cdot 10^{-5},$$

oder für die meistens angewandte Belastung $Q = 2 \text{ kg}$:

$$0,15 \cdot 10^{-5} = \text{ca. } \frac{1}{3}'' ,$$

$$\text{bei Prisma IV: } 1,55 \cdot p \cdot 10^{-5},$$

$$\text{d. i. für } Q = 2 \text{ kg: } 0,42 \cdot 10^{-5} = \text{ca. } 1'' .$$

Einer Drehung von $1''$ würde eine Gangunterschiedsänderung von $0,0046 \lambda$ entsprechen, das ist ein Betrag, der innerhalb der Grenzen der direkten Beobachtungsfehler liegt. Es braucht also diese Fehlerquelle in unserem Falle nicht berücksichtigt zu werden; sie könnte aber bei anders orientierten Prismen, z. B. bei einem solchen, welches in der Richtung der Normale von $+R$ komprimiert würde, sehr wohl merklich werden.

Als Fehlerquellen, welche hiernach noch übrig bleiben, kommen hauptsächlich in Betracht: erstens Abweichungen der Druck- und Beobachtungsrichtung von den bei der Berechnung vorausgesetzten Richtungen, zweitens die Ungleichförmigkeit der Kompression. Die Abweichung der Druckrichtung von den Längskanten des Prismas konnte bei dem Verhältnis 20:8 der Längs- zu den Querdimensionen wohl nicht erheblich sein, zumal im mittleren Teile der Prismen, in dem die Beobachtungen zumeist ausgeführt wurden. Auch die Abweichung der Beobachtungsrichtung von der Plattennormale, welche durch Spiegelung kontrolliert werden konnte, betrug wohl nur selten (in solchen Fällen, wo die Beobachtungsrichtung absichtlich etwas geneigt gewählt wurde, um den Interferenzstreifen besser parallel dem Kompensatorspalt zu machen) über 1° und kann daher wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Beobachtungsrichtung eine optische Symmetrie-

richtung war, gegenüber den direkten Beobachtungsfehlern von vornherein vernachlässigt werden. Schlimmer ist die zweite Fehlerquelle, die auch bei sorgfältigster Aufstellung des Prismas nie ganz zu vermeidende Ungleichförmigkeit der Druckverteilung über den Querschnitt. Bei den Kompensatormessungen wurde dieselbe durch Beobachtung an drei symmetrisch gelegenen Stellen (in der Mitte und in der Nähe des linken und rechten Randes der Prismenfläche) und Mittelbildung möglichst eliminiert; man kann annehmen, daß dies um so besser geschehen ist, je weniger das arithmetische Mittel der drei beobachteten Werte von dem in der Plattenmitte gefundenen differiert. Schwieriger war die Ungleichförmigkeit der Kompression bei den Messungen der *absoluten* Verzögerungen zu erkennen und zu eliminieren. Nach Möglichkeit wurde zwar auch dabei das Streifensystem, außer in der Mitte, einmal in der linken, einmal in der rechten Hälfte des Prismas erzeugt, indem das übrige Licht durch einen verschiebbaren Schirm mit schmalem, vertikalem Fenster abgeblendet wurde; doch waren manchmal die Interferenzstreifen in der einen Plattenhälfte zu schlecht, um genaue Einstellungen zu gestatten, und dann war man lediglich darauf angewiesen, die Beobachtung möglichst genau in der Mitte auszuführen und zur Kontrolle nach Neuaufrstellung des Prismas zu wiederholen. Die Genauigkeit der Resultate der absoluten Messungen steht demzufolge hinter derjenigen der Kompensatormessungen zurück. —

Die *absoluten Verzögerungen* konnten wegen der Polarisisation des Lichtes an den Platten des Interferentialrefraktors nur für die senkrecht zur Druckrichtung polarisierte Welle gemessen werden. Bezeichnen wir deren Geschwindigkeit, bezogen auf diejenige im leeren Raume als Einheit, mit ω_* (da der für ihre Geschwindigkeit maßgebende Fresnelsche Schwingungsvektor vertikal ist) und den ihr entsprechenden Brechungsindex $1/\omega_*$ mit n_* , die Wellenlänge in Luft mit λ , so gilt für die in Bruchteilen von λ ausgedrückte Verzögerung, d. i. die beobachtete Streifenverschiebung dividiert durch den Streifenabstand, der Ausdruck:

$$(15) \quad \delta = \frac{D^2 n_*^2}{2 \lambda} \cdot (\omega_*^2 - \omega_e^2) + \frac{D - D^2}{\lambda} \cdot (n_e - 1),$$

wobei der Brechungsindex der Luft = 1 gesetzt ist.

Die *relative Verzögerung* der vertikal polarisierten Welle (die durch den Index h bezeichnet werde) gegen die horizontal polarisierte ist gegeben durch

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_h - \delta_v &= \frac{A}{\lambda} = \frac{D^0}{2\lambda} \{ \omega_h^{02} - \omega_h^2 \} n_h^2 - \{ \omega_v^{02} - \omega_v^2 \} n_v^2 \\ &+ \frac{D - D^0}{\lambda} (n_h - n_v). \end{aligned} \right.$$

Der Index 0 an den Brechungsindizes ist hier fortgelassen, da die Änderungen derselben so klein sind, daß die Werte vor und nach der Kompression hier nicht unterschieden zu werden brauchen. Unter D bez. D^0 ist in den vorstehenden Formeln die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung verstanden; $A = 14,04$ ist der Streifenabstand des Kompensators, gemessen in Umdrehungen der Mikrometerschraube, λ die zur Kompensation des Gangunterschiedes erforderliche Anzahl von Umdrehungen.

Die hiernach bestimmbaren Größen $\omega^{02} - \omega^2$ drücken sich für die einzelnen Prismengattungen, wie nach dem p. 729—730 Gesagten leicht zu ersehen ist, folgendermaßen durch die Konstanten α_{hk} aus.

Prismen I:

$$(17) \quad \omega_v^{02} - \omega_v^2 = \omega_e^{02} - \omega_e^2 = p \cdot \alpha_{33},$$

$$(18) \text{ Beobachtungsrichtung } \parallel Y^0: \omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \cdot \alpha_{13}.$$

Prismen IIa:

$$(19) \quad \omega_v^{02} - \omega_v^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \cdot \alpha_{11},$$

$$(20) \text{ Beobachtungsrichtung } \parallel X^0: \omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_e^{02} - \omega_e^2 = p \cdot \alpha_{31},$$

$$(21) \quad \text{,,} \quad \parallel Z^0: \omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \cdot \alpha_{13}.$$

Die Prismen IIb geben dasselbe bei Vertauschung von Y mit X .

Prismen III:

$$(22) \quad \omega_v^{02} - \omega_v^2 = \omega_o^{02} - \omega_o^2 = p \alpha_{11},$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Beobachtungsrichtung } \parallel D_2: \\ \omega_h^{02} - \omega_h^2 = p (\alpha_{12} \cos^2 \alpha + \alpha_{31} \sin^2 \alpha + \alpha_{41}) = p A_2, \end{array} \right.$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Beobachtungsrichtung } \parallel D_1: \\ \omega_h^{02} - \omega_h^2 = p (\alpha_{12} \sin^2 \alpha + \alpha_{31} \cos^2 \alpha - \alpha_{41}) = p A_1. \end{array} \right.$$

Prismen IV. Beobachtungsrichtung $\parallel D_1$ (Normale von $+R$):

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \omega_e^{o2} - \omega_e^2 &= p \{ \alpha_{11} \sin^4 \alpha + (\alpha_{13} + \alpha_{31}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \alpha_{33} \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin^3 \alpha + \alpha_{41} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha_{44} \sin^2 2\alpha \} \\ \text{oder in genügender Näherung} \\ &= p \{ \alpha_{11} \sin^4 \alpha + \frac{1}{2} (\alpha_{13} + \alpha_{31}) + \alpha_{33} \cos^4 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin^3 \alpha + \alpha_{41} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \alpha_{44} \} \\ &= p A_3, \end{aligned} \right.$$

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \omega_h^{o2} - \omega_h^2 &= \omega_o^{o2} - \omega_z^2 = p (\alpha_{13} \sin^3 \alpha + \alpha'_{13} \cos^2 \alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin 2\alpha) = p A_4. \end{aligned} \right.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel D_2$, d. i. $\parallel X$. Hier sind die Polarisationsrichtungen (nahezu) parallel der Y^0 - und Z^0 -Achse, und für die entsprechenden Wellengeschwindigkeiten ω_y und ω_z gilt:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \omega_y^{o2} - \omega_y^2 &= -B_{22} = p (\alpha_{11} \sin^2 \alpha + \alpha_{13} \cos^2 \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{14} \sin 2\alpha) = p A_5, \end{aligned} \right.$$

$$(28) \quad \omega_z^{o2} - \omega_z^2 = -B_{33} = p (\alpha_{31} \sin^2 \alpha + \alpha_{33} \cos^2 \alpha) = p A_6.$$

Die für die Berechnung der vorstehenden Größen aus (15) und (16) in Betracht kommenden Brechungsindizes n_h und n_e haben folgende Werte:

Prisma I.	$n_e = n_e^0 = 1,4864$,	$n_h = n_h^0 = 1,5584$.
Prisma II.	$n_e = n_e^0$,	n_h bei Beobachtung $\parallel X = n_e^0$.
Prisma III.	$n_e = n_e^0$,	$n_h = 1,5665$ bei Beobachtung $\parallel D_1$.
		$n_h' = 1,563$ „ „ $\parallel D_2$.
Prisma IV.	$n_e = 1,5665$,	$n_h = n_e^0$ bei Beobachtung $\parallel D_1$.
	$n_y = n_e^0$,	$n_z = n_e^0$ „ „ $\parallel D_2$.

Die aus den Beobachtungen der relativen Verzögerung in der Richtung Z^0 an den Prismen II gemäß (19) und (21) zu berechnende Differenz $\alpha_{11} - \alpha_{13}$ läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch aus Messungen der Kurven gleichen Gangunterschiedes ableiten, welche man auf den zur Z^0 -Achse senkrechten Flächen dieser Platten im konvergenten polarisierten Licht beobachtet. Im undeformierten Zustande sind diese Kurven bekanntlich konzentrische Kreise, und der in Luft beobachtete Winkelhalbmesser q , des r^{ten} , zwischen ge-

kreuzten Nicols ganz dunkel erscheinenden Kreises bestimmt sich durch die Gleichung

$$(29) \quad (\omega_e^2 - \omega_o^2) \sin^2 \varphi_r = \nu \cdot \frac{2 \omega_o \lambda}{D}.$$

Durch einen senkrecht zur Z-Achse ausgeübten einseitigen Druck wird der Kristall, wie aus den Grundformeln (3) folgt, optisch zweiachsig, wobei die Ebene der optischen Achsen parallel oder senkrecht zur Druckrichtung ist, je nachdem $\alpha_{12} - \alpha_{11}$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, wie $\omega_o^2 - \omega_e^2$, oder wie der Charakter der Doppelbrechung. Beim Kalkspat liegt erfahrungsmäßig der zweite Fall vor, es *vergrößern* sich also infolge der Kompression die zur Druckrichtung senkrechten (bei unserer Versuchsanordnung *horizontalen* Ringdurchmesser. Wir wollen, um diese Vergrößerung zu berechnen, voraussetzen, die Druckrichtung sei die Y'-Achse, wie es bei den Prismen IIa der Fall ist. Dann gilt für den Gangunterschied der beiden Wellen in einer Richtung, die in der Z⁰X⁰-Ebene einen kleinen Winkel φ_i' mit der ersten Mittellinie und Plattennormale Z⁰ bildet, die Formel

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{D}{\lambda} \cdot \frac{(\omega_e^2 - \omega_o^2)(\sin^2 \varphi_i' - \sin^2 \Omega)}{\omega_x \omega_y (\omega_x + \omega_y)}$$

oder auch, da der halbe Winkel der optischen Achsen Ω durch

$$(30) \quad \sin^2 \Omega = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_e^2 - \omega_o^2}$$

gegeben ist,

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{D}{\lambda} \frac{(\omega_e^2 - \omega_o^2) \sin^2 \varphi_i' - (\omega_y^2 - \omega_x^2)}{\omega_x \omega_y (\omega_x + \omega_y)}.$$

Führt man hierin durch die Relation

$$\sin \varphi_i' = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y) \sin \varphi'$$

den zu φ_i' gehörigen Austrittswinkel in Luft φ' ein, setzt für $\delta_1 - \delta_2$ den dem ν^{ten} dunklen Ringe entsprechenden Wert ν und läßt noch einige Vereinfachungen eintreten, die in Betracht der Kleinheit der für die ersten Ringe hier geltenden Werte von φ_i' zulässig sind, so erhält man schließlich für den horizontalen Winkelhalbmesser des ν^{ten} Ringes in der komprimierten Platte die Gleichung:

$$(31) \quad (\omega_e^2 - \omega_o^2) \sin^2 \varphi_r' = \nu \frac{2 \lambda \omega_o}{D} + \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_o^2}.$$

Die Differenz der Gleichungen (30) und (31) ergibt dann die gesuchte Relation:

$$(32) \quad p(\alpha_{12} - \alpha_{11}) = \omega_y^2 - \omega_z^2 = \omega_o^2 (\omega_e^2 - \omega_o^2) (\sin^2 q_v' - \sin^2 q_v).$$

Dieselbe Bestimmung von $\alpha_{12} - \alpha_{11}$ gestattet natürlich das Prisma IIh.

Die Messung der Ringhalbmesser wurde mit Hilfe desselben, mikrometrisch um eine vertikale Achse drehbaren, für Parallelstrahlen eingestellten Fernrohres ausgeführt, welches zu den Beobachtungen am Interferentialrefraktor benutzt worden war. Dasselbe wurde mit dem Objektiv dicht vor dem unter dem Druckhebel stehenden Prisma aufgestellt und so gedreht, daß der vertikale Faden einen der dunklen Ringe tangierte, welche man bei Anwendung eines Polarisators und Analysators mit unter $\pm 45^\circ$ gegen die Vertikale geneigten Polarisationssebenen wahrnahm (von denen aber bei der starken Fernrohrvergrößerung immer nur ein kleines Stück im Gesichtsfelde erschien). Indem diese Einstellung am linken und rechten Ende des horizontalen Durchmessers der heiden ersten Ringe vor und nach Belastung des Prismas mehrmals gemacht wurde, konnten die Änderungen $q_1' - q_1$ und $q_2' - q_2$ mit großer Genauigkeit (bis auf etwa $10''$) gemessen werden.

3. Beobachtungsergebnisse.

Die im folgenden mitgeteilten Zahlen sind immer bereits Mittelwerte, die aus einer größeren Anzahl (bei den Kompensatorbeobachtungen immer je 5) von einzelnen Einstellungen vor Belastung, bei Belastung und nach Wiederaufhebung derselben abgeleitet sind.

Prismengattung I (Druck $\parallel Z$).

Absolute Verzögerungen δ .

Prisma 1. Belastung $G = 4$ kg.

Mitte	Links	Rechts	
0,157	0,161	0,158	Mittel für $G = 1$: $\delta_s = 0,0395$.

Prisma 2. Mittel aus 28 Beobachtungen genau in der Mitte reduziert auf $G = 1$: 0,0419.

Insgesamt: $\delta_{11} = 0,041$.

Hieraus berechnet nach (15) mit Benutzung von (8) und (17):

$$\alpha_{11} = + 4,4 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerungen.

Zur Kompensation wurde das zweite Prisma derselben Art quer vor das zu komprimierende geklebt, so daß die Z^0 -Achsen beider gekreuzt lagen.

Prisma 1. $G = 2$.			Prisma 2. $G = 2$.		
Links	Mitte	Rechts	Links	Mitte	Rechts
$\Delta = 2,105$	2,17	2,27	$\Delta = 2,21$	2,18	2,01
Mittel: 2,18			Mittel: 2,13		
Prisma 2. $G = 5$.			Prisma 2, nm 180° gedreht.		
Links	Mitte	Rechts	Links	Mitte	Rechts
$\Delta = 4,45$	5,58	6,88	$\Delta = 5,52$	5,52	5,46
Mittel: 5,64			Mittel: 5,50		

Gesamtmittel für $G = 1$: $\Delta_1 = 1,097$, $(\delta_x - \delta_y)_1 = 0,078$.

Hieraus in Verbindung mit δ_{x_1} nach (16), (8) und (18) berechnet

$$\alpha_{13} = 24,8 \cdot 10^{-6}.$$

Prismengattung IIa (Druck $\parallel Y^0$).

Beobachtungsrichtung $X^0 (= D_1)$, absolute Verzögerungen δ_p .

Prisma 1. $G = 5,5$ kg.			Prisma 2. $G = 5,5$ kg.		
Links	Mitte	Rechts	Links	Mitte	Rechts
0,088	0,104	0,080	0,0806	0,0923	0,0886
Mittel für $G = 1$: 0,0165			0,0158		

Zusammen: $\delta_{p1} = 0,0162$.

Daraus nach (15), (9), (19): $\alpha_{11} = -5,5 \cdot 10^{-6}$.

Beobachtungsrichtung $X^0 (= D_1)$, relative Verzögerungen.

Zur Kompensation diente jeweils die andere Platte derselben Art in gekreuzter Lage.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel	Δ_1
Prisma 1.	$Q = 5$	3,52	3,62	3,45	3,55	0,71
"	1. $Q = 3$	1,60	1,925	2,08	1,87	0,623
"	1. $Q = 3$	2,25	1,99	1,76	2,00	0,67
"	1. $Q = 5$	3,39	3,19	2,78	3,12	0,624
"	2. $Q = 3$	2,31	1,93	1,48	1,91	0,637

Zusammen: $\Delta_1 = 0,652$, $(\delta_x - \delta_y)_1 = 0,0464$.

Nach der ersten Beobachtungsreihe an Prisma 1 war in demselben eine feine Zwillingslamelle nach $-\frac{1}{2}R$ entstanden, ebenso gleich von vornherein im Prisma 2; da dieselben parallel zur Beobachtungsrichtung verliefen, so störten sie zwar die

Kompensatorbeobachtungen nicht, erschwerten aber anscheinend die Erzielung einer gleichmäßigen Kompression.

Prismengattung IIb (Druck $\parallel X^0$). Relative Verzögerung $\parallel Y^0$.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$Q = 2$	1,07	1,27	1,42	1,25
" 2.	$Q = 2$	1,20	1,30	1,85	1,28

$$\text{Zusammen: } \delta_1 = 0,68, (\delta_s - \delta_r)_1 = 0,0450.$$

Als Gesamtmittelwert ergibt sich aus den Beobachtungen an den Prismen IIa und IIb:

$$\delta_h - \delta_s = 0,0457$$

und hieraus nach (16) in Verbindung mit (9), (19) und (20):

$$n_s^2 \alpha_{11} - n_r^2 \alpha_{11} = 78,6 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung $\parallel Z^0$, gemessen mit Kompensator.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$Q = 2$	1,30	1,33	1,34	1,32
" 2.	$Q = 2$	1,40	1,33	1,22	1,32

$$\delta_1 = 0,66, (\delta_h - \delta_r)_1 = (\delta_s - \delta_r)_1 = 0,047.$$

Hieraus nach (16), (19) und (21):

$$\frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p} = \alpha_{12} - \alpha_{11} = 14,9 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung $\parallel Z^0$, bestimmt aus Ringdurchmessern bei derselben Aufstellung der Platten, wie bei den Kompensatormessungen.

Prisma 1.

$$\begin{aligned} Q = 2 \quad q_1' &= 132' 46,4'', \quad q_1^0 = 126' 42,4'', \quad \text{daraus nach (31): } \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,30 \cdot 10^{-6} \\ Q = 3 \quad q_1' &= 135' 32,8'', \quad q_1^0 = 127' 1'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 6,12 \cdot 10^{-6} \\ Q = 2 \quad q_3' &= 182' 49,9'', \quad q_3^0 = 178' 40,3'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,12 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{Mittel von } \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p} : 15,23 \cdot 10^{-6}.$$

Prisma 2.

$$\begin{aligned} Q = 2 \quad q_1' &= 132' 15'', \quad q_1^0 = 126' 33'', \quad \text{daraus nach (31): } \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,08 \cdot 10^{-6} \\ Q = 2 \quad q_2' &= 182' 57'', \quad q_2^0 = 178' 39'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,23 \cdot 10^{-6} \\ Q = 2 \quad q_3' &= 182' 54,1'', \quad q_3^0 = 178' 47,6'', \quad \omega_y^2 - \omega_z^2 = 4,08 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\text{Mittel von } \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p} : 15,06 \cdot 10^{-6}.$$

Ringdurchmesserbeobachtungen an den Prismen IIa ergaben ebenso den Mittelwert:

$$14,8 \cdot 10^{-6}.$$

Insgesamt folgt aus den Messungen der Ringe und denen mit Kompensator:

$$\alpha_{12} - \alpha_{11} = 15,0 \cdot 10^{-6}.$$

Prismengattung III (Druck $\parallel X^0$).

Beobachtungsrichtung: die Rhomboedernormale (Richtung D_1).

Absolute Verzögerung δ_z .

Prisma 2.

$Q = 4$ Mittel aus zahlreichen Beobachtungen: $(\delta_z)_4 = -0,093$.

$Q = 5$ Mittel $(\delta_z)_5 = -0,129$ und $-0,1165$.

Insgesamt: $(\delta_z)_{Q=1} = -0,0242$.

Daraus nach (15), (11), (22): $\alpha_{11} = -6,10 \cdot 10^{-6}$.

Das negative Vorzeichen von δ bedeutet, daß die Verschiebung der Interferenzstreifen bei Kompression der einen Platte hier, im Gegensatz zu allen anderen Fällen, in demjenigen Sinne erfolgte, welcher einer *Abnahme* des Gangunterschiedes entsprach. Nun ist zwar für die Richtung der Rhomboedernormale, wie der Wert (11), p. 732 zeigt, auch die *Querdilatation negativ*, allein die daraus resultierende Abnahme der Verzögerung der ordentlichen Welle ist nur etwa der fünfte Teil der beobachteten, so daß tatsächlich eine *Zunahme ihrer Geschwindigkeit* stattgefunden hatte; dem entspricht das *negative* Vorzeichen von α_{11} .

Relative Verzögerung.

Zur Kompensation wurde zunächst an die Vorderfläche ein Prisma der Gattung IV in solcher Lage angeklebt, daß die X^0 -Achse ebenfalls vertikal und die Z^0 -Achse spiegelbildlich zu derjenigen des zu komprimierenden Prismas in Bezug auf dessen Vorderfläche lag; in dieser Kombination ist der Gangunterschied in der Beobachtungsrichtung ein Maximum, ändert sich also durch kleine Drehungen nicht. Um nun den sehr großen absoluten Betrag des Gangunterschiedes in dieser Kombination und dessen Änderung mit der Temperatur aufzuheben, wurde zweitens an der Hinterfläche des Versuchsprismas ein Prisma der Gattung II mit vertikal gestellter Z^0 -Achse befestigt, welches für sich in der zur Z^0 -Achse senkrechten Beobachtungsrichtung nahezu den entgegengesetzten Gangunterschied gibt, wie die beiden ersten Prismen zusammen, in welchen ja die Beobachtungsrichtung Winkel von nahe 45° mit der optischen Achse bildet. Um gute Kompensatorstreifen zu erhalten, war es aber oft zweckmäßig, dem einen Kompensations-

prisma eine kleine seitliche Neigung zu geben. Die Messungen ergaben:

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 2.	$Q = 2$	2,18	2,06	1,90	2,05
"	2. $Q = 2$	2,23	2,03	1,87	2,04
"	1. $Q = 2$	2,10	2,13	2,11	2,11

$$A_{Q=1} = 1,033, (\delta_h - \delta_v)_{Q=1} = 0,0736.$$

Hieraus berechnet nach (16), (11), (22) und (24)

$$n_h^2 A_1 - n_v^2 \alpha_{11} = 105,2 \cdot 10^{-6}$$

oder

$$3,84 A_1 - 4,56 \alpha_{11} = 105,2 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel D_2$.

Absolute Verzögerung δ_z .

Prisma 2. $G = 4$ kg.

Aus 11 Beobachtungen in der Mitte: $\delta_z = 0,238$.

Aus je 3 Beobachtungen am linken bez. rechten Rand: 0,194 bez. 0,271.

Insgesamt: $(\delta_z)_{Q=1} = + 0,0585$.

Hier ist die beobachtete Verzögerung positiv, aber kleiner als die von der Dickenänderung allein herrührende; für α_{11} ergibt sich daher nach (15), (12) und (22) in Übereinstimmung mit den früheren Bestimmungen ein *negativer* Wert und zwar

$$\alpha_{11} = - 5,92 \cdot 10^{-6}.$$

Relative Verzögerung.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$G = 4$	1,23	1,51	1,57	1,43
	$G = 2$	0,66	0,80	0,85	0,77
Prisma 2.	$G = 4$	1,43	1,56	1,66	1,55
	$G = 4$	1,39	1,49	1,65	1,51

Insgesamt: $A_{Q=1} = 0,378, (\delta_h - \delta_v)_{Q=1} = 0,027$.

Hieraus folgt nach (16), (12), (22) und (23):

$$n_h^2 A_1 - n_v^2 \alpha_{11} = 3,82 A_1 - 4,56 \alpha_{11} = 54,74 \cdot 10^{-6}.$$

Für α_{11} wollen wir das Mittel aus den an den Prismen III gefundenen Werten, also

$$\alpha_{11} = - 6,0 \cdot 10^{-6}$$

annehmen, da die Bestimmung an IIa wegen der anscheinend ungleichförmigen Kompression und schlechten Beschaffenheit der Streifen weniger sicher ist.

Dann folgt

$$\alpha_{12} = 9,0 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_{21} = 15,5 \cdot 10^{-6},$$

$$A_1 = 7,15 \cdot 10^{-6}, \quad A_2 = 20,2 \cdot 10^{-6}$$

und hieraus

$$2\alpha_{41} = A_2 - A_1 + (\alpha_{21} - \alpha_{12}) \cos 2\alpha = -13,2 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_{41} = -6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Berechnet man rückwärts mit diesen Werten der α_{hk} die relativen Verzögerungen $\Delta_Q = 1$ für die Prismen III, so findet man

$$\text{für die Richtung } D_1: 0,983 \text{ (beobachtet } 1,033)$$

$$\text{„ „ „ } D_2: 0,322 \text{ („ „ 0,378)}$$

Die Differenzen vom Betrage $\pm 0,05$ zwischen den beobachteten und berechneten Werten sind nicht größer, als bei der Unsicherheit, die den Messungen in diesen Richtungen anhaftete, zu erwarten war.

Prismengattung IV.

(Druck in der YZ -Ebene senkrecht zur Normale von $+R$).

Hier konnten nur die relativen Verzögerungen beobachtet werden.

Beobachtungsrichtung: die Normale von $+R$ (D_1).

Die zur Kompensation des ursprünglichen Gangunterschiedes dienende Plattenkombination war dieselbe wie bei der Gattung III. Damit die Streifen des Kompensators hinreichend parallel den vertikalen Spalträndern erschienen, mußte die Beobachtungsrichtung etwas nach aufwärts oder abwärts geneigt genommen werden, hatte also nicht genau die bei der Berechnung vorausgesetzte, zur Druckrichtung senkrechte Richtung; doch kommt der hierdurch bedingte Fehler gegenüber den Abweichungen der Beobachtungen untereinander kaum in Betracht.

		Links	Mitte	Rechts	Mittel
Prisma 1.	$Q = 2$	3,38	3,05	2,97	3,13
	$Q = 2$	3,21	3,28	3,30	3,26

$$\text{Mittelwert: } \Delta_Q = 1 = 1,60, \quad \delta_h - \delta_v = 0,114.$$

Hieraus nach (16) und (13), (25), (26)

$$n_e^2 A_4 - n_o^2 A_2 = 4,56 A_4 - 3,84 A_2 = 155,2 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungsrichtung: die X -Achse (D_1).

Zur Kompensation diente das zweite Prisma derselben Art, welches mit der X -Achse ebenfalls parallel zur Beobachtungsrichtung, aber in um 90° gedrehter Stellung angeklebt

wurde. Da die Schwingungsrichtungen hier um nahe 45° gegen die vertikale Druckrichtung geneigt waren, so mußte auch der Kompensator aus seiner gewöhnlichen Stellung (mit vertikalem Spalt) um 45° gedreht werden. Der dunkle Streifen verlief dann also schräg über die vordere Prismenfläche, und es konnten daher nicht gut besondere Einstellungen nahe an den Rändern (links und rechts) gemacht werden. Die Gleichmäßigkeit der Kompression konnte jedoch dadurch, daß sich der Streifen in der ganzen Plattenbreite gleichmäßig parallel mit sich selbst verschieben mußte, kontrolliert werden, freilich bei der hier sehr geringen Verschiebung nicht so gut wie sonst; eingestellt wurde dann im mittleren Teil der Platte. Der Kompensatorspalt war bei den folgenden Beobachtungen parallel der Y^0 -Achse gestellt, so daß die Messung, wie sonst $\delta_x - \delta_y$, so hier $\delta_z - \delta_y$ ergab. Da der Kompensator bei Belastung der Platte zurückgedreht werden mußte, so findet sich letztere Größe negativ.

	Prisma 1	Prisma 2	
$Q = 2$	-0,25	-0,27	-0,22
$Q = 4$	-0,52	-0,54	-0,49

Als Mittelwert für $Q = 1$ kann gelten:

$$A_1 = -0,13, \delta_y - \delta_z = +0,0091.$$

Die Dickenzunahme, welche eine relative Verzögerung der senkrecht zur Y^0 -Achse polarisierten Welle bewirkt, ist hier so groß, daß nach Abzug ihres Einflusses sich das Vorzeichen umkehrt. Es folgt nach (16) und (14), (27), (28):

$$n_z^2 A_1 - n_z^2 A_2 = 4,56 A_3 - 3,29 A_4 = -15,9 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Einsetzen der bereits gefundenen Werte von α_{31} , α_{33} , α_{11} , α_{13} wird

$$A_3 = 10,03 \cdot 10^{-6}, \quad A_4 = 9,2 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \alpha_{14},$$

und man findet aus der vorstehenden Gleichung

$$\alpha_{14} = -10,9 \cdot 10^{-6}.$$

Endlich wird $A_4 = 22,7 \cdot 10^{-6}$, $A_3 = 3,5 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \alpha_{14}$ und es folgt aus der Gleichung $4,56 A_4 - 3,84 A_3 = 155,2 \cdot 10^{-6}$ für die letzte noch fehlende Konstante α_{44} der Wert

$$\alpha_{44} = -34 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Zahlenwerte in die Gleichungen (3) erhalten wir schließlich folgende Darstellung der Polarisationskonstanten B_{hk} als Funktionen der Druckkomponenten (wobei letztere in Kilogramm pro mm^2 gemessen, und die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume gleich 1 gesetzt ist):

$$(3') \quad \begin{cases} B_{11} = \omega_o^2 - [-6,0 X_x + 9,0 Y_y + 24,8 Z_z - 10,9 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{22} = \omega_o^2 - [9,0 X_x - 6,0 Y_y + 24,8 Z_z + 10,9 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{33} = \omega_e^2 - [15,5 (X_x + Y_y) + 4,4 Z_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{23} = [6,6 (X_x - Y_y) + 34 Y_z] \cdot 10^{-6}, \\ B_{31} = [34 Z_z + 13,3 X_y] \cdot 10^{-6}, \\ B_{12} = [10,9 Z_z + 15,0 X_y] \cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

4. Anwendungen der gefundenen Resultate.

Von speziellen Folgerungen aus den Formeln (3') seien folgende hervorgehoben.

Allseitig gleicher Druck vermindert sowohl die ordentliche als die außerordentliche Lichtgeschwindigkeit, letztere aber stärker, so daß auch die Doppelbrechung abnimmt; es wird nämlich

$$\begin{aligned} \omega_o^2 - \omega_o'^2 &= B_{11} = B_{22} = -27,8 \cdot 10^{-6} p, \\ \omega_e^2 - \omega_e'^2 &= B_{33} = -35,4 \cdot 10^{-6} p. \end{aligned}$$

Einseitiger Druck parallel der Hauptachse verringert ebenfalls beide Lichtgeschwindigkeiten, verstärkt aber die Doppelbrechung, denn es gilt für solchen:

$$\omega_o^2 - \omega_o'^2 = -24,8 \cdot 10^{-6} p, \quad \omega_e^2 - \omega_e'^2 = -4,4 \cdot 10^{-6} p.$$

Einseitiger Druck senkrecht zur Hauptachse macht den Kalkspat optisch zweiaxig mit der Ebene der optischen Achsen senkrecht zur Druckrichtung und einem Achsenwinkel 2Ω , der nach (30) gegeben ist durch

$$\sin^2 \Omega = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{11}}{\omega_e^2 - \omega_o^2} p \cdot 10^{-6}, \quad \sin \Omega = 0,013 \sqrt{p},$$

woraus z. B. für den Druck 1 kg/mm^2 $2\Omega = \frac{\pi}{2}^\circ$ folgt.

Wie schon p. 729 erörtert wurde, bleibt dabei die erste Mittellinie (die Z -Achse) nicht streng parallel der Hauptachse

Z^0 des Kristalles, sondern dreht sich um eine Achse in der $X^0 Y^0$ -Ebene, welche mit der Druckrichtung P denselben Winkel bildet, wie diese mit der X^0 -Achse. Den Betrag dieser Drehung können wir jetzt nach der Formel (6') numerisch berechnen, er findet sich $= 74 \cdot 10^{-6} p$, d. i. für $p = 1 \text{ kg/mm}^2$ etwa $15''$. Bei den Prismen II a sowohl als II b mußte die Drehung um die Druckrichtung stattfinden und demgemäß bei den Beobachtungen im konvergenten Licht eine geringe seitliche Verschiebung des Zentrums des Ringsystems, oder eine Ungleichheit der bei der Kompression eintretenden Erweiterung der Ringe nach links und nach rechts zur Folge haben. Eine derartige Unsymmetrie war nun in den Messungen nicht zu erkennen, was sich indessen vollkommen dadurch erklärt, daß die Drehung der Mittellinie für die dabei angewandte Belastung $Q = 2 \text{ kg}$ zufolge vorstehender Berechnung nur $4''$ betrug. —

Aus den Größen α_{hk} können wir nun mit Hilfe der von Voigt bestimmten Elastizitätskonstanten:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 13,97 \cdot 10^3, & c_{12} &= 4,65 \cdot 10^3, & c_{13} &= 4,60 \cdot 10^3, \\ c_{33} &= 8,12 \cdot 10^3, & c_{44} &= 3,49 \cdot 10^3, & c_{14} &= -2,12 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

die Konstanten a_{hk} des Ansatzes (2) gemäß den Formeln (5) berechnen und erhalten:

$$\begin{aligned} a_{11} &= +0,095, & a_{12} &= +0,189, & a_{13} &= +0,215, \\ a_{31} &= +0,309, & a_{33} &= +0,178, \\ a_{14} &= -0,006, & a_{41} &= +0,010, & a_{44} &= -0,090. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Werte mit denjenigen, welche ich früher (l. c. p. 303) für die entsprechenden Konstanten des Quarzes bestimmt habe, zeigt, daß ihre Größenordnung für beide Körper übereinstimmt und daß auch in beiden Fällen a_{14} und a_{41} gegen die übrigen Konstanten sehr klein sind. Während aber beim Quarz fast genau $a_{31} = a_{13}$ gefunden wurde, findet diese Gleichheit hier auch nicht annähernd statt.

Das positive Vorzeichen der fünf ersten Konstanten zeigt, daß sowohl eine Dilatation parallel der Hauptachse, als eine solche in irgend einer Richtung senkrecht zu letzterer eine Zunahme der Lichtgeschwindigkeiten zur Folge hat. Das oben

(p. 743) gefundene auffällige Resultat, daß einseitiger *Druck* senkrecht zur Hauptachse eine Beschleunigung der senkrecht zur Druckrichtung polarisierten Welle hervorruft, ist hiernach durch den überwiegenden Einfluß der Querdilatationen zu erklären, welcher durch die gegen a_{11} großen Werte von a_{12} und a_{13} bedingt wird.

Ist die *Deformation rings um die Z^0 -Achse symmetrisch*, also $y_y = x_x$, so bleibt der Kristall natürlich optisch einachsig, und es gilt:

$$(33) \quad \begin{cases} \omega_o^2 - \omega_o^{02} = (a_{11} + a_{12})x_x + a_{13}z_z, \\ \omega_e^2 - \omega_e^{02} = 2a_{31}x_x + a_{33}z_z. \end{cases}$$

Eine Dilatation $\parallel Z^0$ allein bewirkt wegen $a_{33} < a_{13}$ *Abnahme* der Doppelbrechung, eine solche in allen Richtungen $\perp Z^0$ *Zunahme* derselben; letzteres gilt auch von einer *allseitig gleichen* Dilatation.

Die Dilatation, welche durch eine *Temperaturerhöhung* von 1° erzeugt wird, ist charakterisiert durch

$$y_y = x_x = \alpha, \quad z_z = \gamma,$$

wobei die Ausdehnungskoeffizienten α, γ nach Benoît bei Zimmertemperatur die Werte haben

$$\alpha = -5,5 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma = +25,5 \cdot 10^{-6}.$$

Die Einsetzung in (33) ergibt

$$\omega_o^2 - \omega_o^{02} = \left(\frac{d\omega_o^2}{dt} \right) = +3,92 \cdot 10^{-6},$$

$$\omega_e^2 - \omega_e^{02} = \left(\frac{d\omega_e^2}{dt} \right) = +1,15 \cdot 10^{-6},$$

und für die Änderungen der Hauptbrechungsindizes, welche wegen

$$d\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{2\omega^3} d(\omega^2)$$

hieraus durch Multiplikation mit $n_o^2/2$ bez. $n_e^2/2$ erhalten werden:

$$\left(\frac{dn_o}{dt} \right) = -8,9 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\frac{dn_e}{dt} \right) = -1,9 \cdot 10^{-6}.$$

Die wirklichen Temperaturkoeffizienten der (absoluten) Brechungsindizes betragen hingegen:

Nach Vogel ¹⁾ (für eine Mitteltemperatur von 103° gültig):

$$\frac{dn_o}{dt} = + 0,81 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{dn_e}{dt} = + 10,20 \cdot 10^{-6}.$$

Nach Reed ²⁾ (für eine Mitteltemperatur von 18° berechnet):

$$\frac{dn_o}{dt} = + 0,69 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{dn_e}{dt} = + 10,57 \cdot 10^{-6}.$$

Benutzt man die letzteren Werte, so ergeben sich, indem man die oben berechneten Größen (dn_o/dt) und (dn_e/dt) davon subtrahiert, folgende Werte der reinen, d. h. vom Einfluß der Dilatationen befreiten Temperaturkoeffizienten der Brechungsindizes des Kalkspates:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = + 9,6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = + 12,5 \cdot 10^{-6}.$$

Unter Zugrundelegung der Vogelschen Beobachtungen erhält man ebenso:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = 9,7 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = 12,1 \cdot 10^{-6}.$$

Die reinen Temperaturkoeffizienten haben also sehr beträchtliche *positive* Werte, welches Verhalten, da zugleich eine Zunahme der Dispersion mit der Temperatur stattfindet, nach Pulfrich ³⁾ wahrscheinlich durch eine Zunahme der Absorption oder ein Näherrücken der Absorptionsstreifen im Ultravioletten bedingt wird. Hr. Pulfrich hat in der unten zitierten Abhandlung unter anderen auch die reinen Temperaturkoeffizienten $\partial n_o/\partial t$ und $\partial n_e/\partial t$ des Kalkspats in der Weise berechnet, daß er auf die Änderung der beiden Hauptbrechungsindizes durch die Dilatation die Gladstone-Dalesche Regel, wonach $dn = -(n-1)(2\alpha + \gamma)$ wäre, anwandte. Dies ist jedoch, auch abgesehen davon, daß sich die Gladstone-Dalesche

1) G. Vogel, Wied. Ann. 25. p. 87. 1885.

2) J. O. Reed, Wied. Ann. 65. p. 707. 1898.

3) F. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 609. 1892.

Formel auch bei isotropen festen Körpern als unzutreffend erwiesen hat, bei Kristallen schon von vornherein nicht zulässig, da hier die Verschiedenheit der Dilatation nach verschiedenen Richtungen von Einfluß sein muß. In der Tat ist der nach dieser Formel für (dn_e/dt) sich ergebende Wert $-7,04 \cdot 10^{-6}$ ganz verschieden von demjenigen, welchen ich aus meinen Beobachtungen oben abgeleitet habe $(-1,9 \cdot 10^{-6})$, während allerdings bei der ordentlichen Welle eine ziemlich große Annäherung an das Gladstonesche Gesetz stattfindet.¹⁾ So weicht denn auch der zweite der von Hrn. Pulfrich berechneten Werte der reinen Temperaturkoeffizienten:

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = +10,34 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = +17,24 \cdot 10^{-6}$$

ganz erheblich von dem von mir gefundenen $(12,1 \cdot 10^{-6})$ ab.

Es kann verlockend scheinen, die im vorhergehenden gewonnenen Resultate auf diejenige besondere Deformation anzuwenden, welche ein Kalkspatkristall erleidet, wenn er durch mechanische Einwirkung in die *Zwillingsstellung* in Bezug auf eine *Gleitfläche*, d. i. eine Fläche des die Polkanten des Grundrhomboeders abstumpfenden Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$, übergeführt wird. Allerdings handelt es sich bei dieser „Schiebung nach einer Gleitfläche“ um eine Deformation, welche weit über die Elastizitätsgrenzen hinausgeht — es sind ja sogar am Ende der Deformation die elastischen Kräfte wieder Null — und die überdies durch *labile* Zustände hindurchführt. Wir werden also eine quantitative Anwendbarkeit unserer Formeln, die ja für sehr kleine, elastische Deformationen aufgestellt worden sind, nicht erwarten dürfen, sondern höchstens eine Übereinstimmung

1) Beim *Quarz* ist dies auch für die ordentliche Welle nicht der Fall; denn hier sind die aus den α_{λ} und α, γ abgeleiteten Werte:

$$\left(\frac{dn_o}{dt}\right) = -13,3 \cdot 10^{-6}, \quad \left(\frac{dn_e}{dt}\right) = -14,6 \cdot 10^{-6},$$

dagegen die aus der Gladstoneschen Formel berechneten $-18,8 \cdot 10^{-6}$ bez. $-19,2 \cdot 10^{-6}$. Aus ersteren Zahlen und den direkt von Reed beobachteten dn/dt folgt für Quarz

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = +7,6 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} = +7,4 \cdot 10^{-6}.$$

hinsichtlich des *Sinnes* der optischen Änderungen. Letztere bestehen bei der Zwillingsbildung in einer einfachen *Drehung* der Wellenfläche von etwa $52\frac{1}{2}^{\circ}$ um die zu der Zwillingsfläche $-\frac{1}{2}R$ parallele Symmetrieachse X^0 im positiven Sinne (d. h. von der $+Y^0$ -Achse gegen die $+Z^0$ -Achse hin), denn die Z^0 -Achse bildet mit der Normale der Gleitfläche einen Winkel von $26\frac{1}{4}^{\circ}$. Da aber die „Schiebung“ parallel dem Hauptschnitt von $-\frac{1}{2}R$, welche den Krystall in die Zwillingsstellung überführt, keine reine Deformation, sondern die Kombination einer solchen mit einer *Drehung* von ca. 19° um die X^0 -Achse in *negativem* Sinne ist, so erfährt die optische Achse in Bezug auf die im Raume festliegend gedachten Hauptdilationsachsen eine Drehung von $+71\frac{1}{2}^{\circ}$. Unsere Formeln, welche ja die Wirkung einer reinen Deformation darstellen, setzen festliegende Hauptdilationsachsen voraus und müßten also den eben angegebenen Betrag der Drehung ohne Änderungen der Hauptlichtgeschwindigkeiten ergeben, wenn wir die der Schiebung entsprechenden Deformationsgrößen einsetzen. Letztere haben in Bezug auf das ursprüngliche Achsensystem $X^0 Y^0 Z^0$ die Werte:

$$x_z = 0, \quad y_y = -0,27, \quad z_z = +0,39, \quad y_z = +0,218, \quad z_x = x_y = 0.$$

Man erhält so

$$B_{23} = -0,0171, \quad B_{22} = \omega_z'^2 + 0,0591 = 0,4227,$$

$$B_{33} = \omega_z'^2 - 0,0143 = 0,4384$$

und nach Gleichung (6a):

$$2 \Phi_x = \arctg 342/157, \quad \Phi_x = +33^{\circ}.$$

Der *Sinn* der berechneten Drehung stimmt also mit demjenigen der bei der Zwillingsbildung wirklich stattfindenden überein, doch ergibt sich ihr Betrag erheblich zu klein.

Für die neue Hauptlichtgeschwindigkeit ω_z würde sich aus der Gleichung

$$\omega_z' = B_{22} \sin^2 \Phi_x + B_{33} \cos^2 \Phi_x - B_{23} \sin 2 \Phi_x$$

der Wert 0,671 bestimmen, der in der Tat nur sehr wenig von dem ursprünglichen Werte $\omega_z^0 = 0,6729$ abweicht. Für ω_y und ω_x erhielte man aber größere Abweichungen von ihrem

gemeinschaftlichen ursprünglichen Werte $\omega_0 = 0,6030$. — Man kann also nur sagen, daß die Änderung des optischen Verhaltens des Kalkspats, welche durch die bei der Schiebung nach einer Gleitfläche $-\frac{1}{2}R$ stattfindende Deformation bei deren Beginne (solange sie noch innerhalb der Elastizitätsgrenzen liegt) eingeleitet wird, dem Sinne nach geeignet scheint, in ihrem weiteren Verlaufe die mit der Zwillingsbildung wirklich verbundene Änderung der optischen Orientierung herbeizuführen.

(Eingegangen 21. April 1908.)

**4. Der elektrische Widerstand loser Kontakte
und Resonanzversuche mit dem Kohärer;
von Philip Ely Robinson.**

(Auszug aus der Gießener Inaugural-Dissertation.)

Die folgende Untersuchung wurde angestellt, um zu einer besseren Kenntnis der Kohärerwirkung zu gelangen. Sie hat ihren Ausgangspunkt in den Arbeiten von Guthe und Trowbridge.¹⁾ Diese haben gefunden: „1. Die Potentialdifferenz besitzt an den Enden des Kohärrers bei genügender Stromstärke einen konstanten Wert, welcher von einer weiteren Steigerung des Stromes oder einer Änderung der angelegten elektromotorischen Kraft unabhängig ist, für verschiedene Metalle jedoch verschiedene Werte hat. Für mehrere Kontakte ist dieselbe der Zahl derselben proportional. 2. Bei Anwendung einer elektromotorischen Kraft, die kleiner als diese Potentialdifferenz ist, tritt keine Kohärerwirkung ein. Dieser Wert wurde daher die kritische Potentialdifferenz genannt.“²⁾ Diese Ergebnisse wurden zunächst einer Untersuchung unterzogen.

Abschnitt I. Der Widerstand loser Kontakte.

A. Untersuchung mittels eines Gleichstromes.

Versuchsanordnung.

Gebraucht wurde ein einfacher, aus einer einzigen Kontaktstelle bestehender Kohärer, der durch zwei an Seidenfäden

1) A. Trowbridge, Amer. Journ. of Sc. 8. p. 199. 1899; K. E. Guthe u. A. Trowbridge, Phys. Rev. 11. p. 22. 1900; K. E. Guthe, Ann. d. Phys. 4. p. 762. 1901.

2) K. E. Guthe, Ann. d. Phys. 4. p. 767. 1901.

schwebenden Metallstäbchen (vgl. Fig. 1) gebildet war. Ein festes hölzernes Gestell war auf einer schweren eisernen Platte P befestigt und trug auf einem Brett oben zwei mit Blei belastete Holzklötze C_1 und C_2 . An jedem Klotze wurde ein Stäbchen durch vier Fäden gehalten. Diese wurden oben an Haken befestigt, die in den Holzklötz eingeschraubt waren, und unten mit zwei Ringen aus Hartgummi verbunden, die fest an dem Stäbchen saßen. Die Stäbchen s_1, s_1' und s_2, s_2' waren je 6 cm lang und von 6 mm Durchmesser. Die Enden s_1 und s_2 , die zusammen kamen, und die hiernach kurzweg als die Kohärerenden bezeichnet werden, waren kugel-

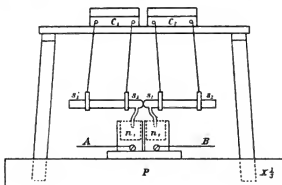


Fig. 1.

förmig abgerundet. Durch Drehen der Haken konnte man die Fäden verlängern oder verkürzen, und hatte dadurch ein Mittel, die Achsen der Stäbchen in dieselbe Linie zu bringen. Durch Verschiebung der Klötze C_1 und C_2 war es möglich den Druck, womit die Stäbchen gegeneinander preßten, zu variieren. Dicht an den Kohärerenden s_1 und s_2 waren zwei kleine Metallstifte in die Stäbchen eingesetzt, die unten in zwei isolierte, mit Quecksilber gefüllte Näpfe n_1 und n_2 eintauchten. Durch die Drähte A und B , die in Verbindung mit den Näpfen standen, war es dann möglich einen Strom durch die Kontaktstelle zu schicken, und deren Widerstand zu messen.

Die gebrauchte Schaltung ist in der nachstehenden Fig. 2 angegeben. Der Kohärer befindet sich bei c . Ein Akku-

mulator e und die Widerstände w_2 und W sind in Reihe mit dem Kohärer geschaltet. Durch Variieren von w_2 und W kann man die Spannung, die an den Kohärerenden angelegt wird, beliebig ändern. Um bequem dieser angelegten Spannung

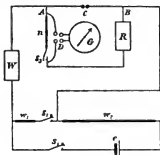


Fig. 2.

kleine Werte zu geben, ist der kleine Widerstand w_1 vorhanden, der durch Schließen vom Stromschlüssel S_1 und durch Variieren von w_2 erlaubt, jeden beliebigen Bruchteil der Spannung e des Akkumulators abzuzweigen. Um die an den Kohärerenden angelegte Spannung — die hier nach mit p bezeichnet wird — zu messen, ist das Galvanometer G mit dem Vorschaltwiderstand R

und mit dem Nebenschluß n parallel zum Kohärer geschaltet. Ein Stromschlüssel S_3 erlaubt die Ausschaltung des Nebenschlusses n ($n = \infty$). Das Galvanometer war ein empfindliches Spiegelgalvanometer, dessen vier Spulen den Gesamtwiderstand von 118Ω hatten. Die Ablenkungen seiner Nadel, die wegen starker Dämpfung völlig aperiodisch schwang, wurden durch Fernrohr und Skala abgelesen. Eine Wippe D ließ die Richtung des Stromes durch das Galvanometer umkehren. Bei jeder Messung wurde der Strom durch das Galvanometer umgekehrt, und das Mittel der Ablenkungen nach beiden Seiten genommen. Das Galvanometer wurde als Voltmeter benutzt, seine Ablenkungen waren geacht.¹⁾

Untersuchungsmethode.

Die Methode der Messung des Kohärerwiderstandes war folgende: Zu Anfang wurde die Spannung e des Akkumulators gefunden, indem ein bestimmter Bruchteil davon gemessen wurde. Diese Messung wurde gewöhnlich zwei- oder dreimal täglich gemacht. Den Kohärer schaltete man nun ein, und, um eine gewisse Spannung an seine Enden anzulegen, gab man, falls S_2

1) Vgl. das Nähere die Dissertation.

geschlossen war, w_1 und w_2 passende Werte, während W einen bestimmten Wert hatte, oder falls S_2 offen war, variierte man w_2 und W . Die angelegte Spannung p ergab sich dann aus dem Ausschlage des Galvanometers. Bedeutet nun w' den Gesamtwiderstand zwischen A und B , und γ den Widerstand des Galvanometerzweiges, so ist c , der Kohärerwiderstand, gegeben durch:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{w'} - \frac{1}{\gamma}}$$

wo

$$w' = \frac{W p}{e \frac{w_1}{w_1 + w_2} - p} \quad (S_2 \text{ geschlossen})$$

oder

$$w' = \frac{(w_2 + W) p}{e - p} \quad (S_2 \text{ offen}).$$

Es ist hierbei angenommen, daß w_1 klein gegen $W + w'$ ist, wofür immer gesorgt wurde.

Die Methode der Untersuchung war folgende: Der Kohärer, der erschütterungsfrei allein auf einer festen Säule stand, wurde justiert, d. h. die Achsen der Stäbchen wurden in eine Linie gebracht, und dem Drucke ein bestimmter Wert gegeben. Nun wurden die Stäbchen getrennt und wieder zusammengebracht, und dann der Widerstand des Kohärsers, d. h. der Kontaktstelle, bei sehr kleiner angelegter elektromotorischer Kraft p_0 , etwa 0,01 Volt, gemessen. Dieser zuerst gefundene Wert wird der Anfangswiderstand genannt und soll mit c_0 bezeichnet werden. Die angelegte Spannung wurde nach und nach vergrößert, und die entsprechenden Werte des Kohärerwiderstandes gemessen; dies wurde solange fortgesetzt, bis der Kohärerwiderstand auf einen ganz minimalen Wert sank. Es erwies sich als vorteilhaft, Messungen in folgender Reihenfolge zu machen: Wird die nach und nach steigende Spannung mit $p_0, p_1, p_2, p_3 \dots$ bezeichnet, so wurde der Kohärerwiderstand zunächst bei der Spannung p_0 (Anfangswiderstand) gemessen, dann mit p_1 , dann wieder mit p_0 , dann mit p_2 , wieder mit p_0 , dann mit p_3 , wieder mit p_0 , dann mit der nächst höheren Spannung, und so weiter, bis der Kohärerwiderstand auf einen ganz minimalen Wert sank.

Resultate mit einem Kohärer von Stahl. Die angegebenen Größen.

Zunächst wurde ein Kohärer, der aus Stahlstäbchen bestand, untersucht. Über den Zustand der Kontaktflächen soll hier nur bemerkt werden, daß sie spiegelglatt waren. Von den verschiedenen Reihen, die gemacht wurden, gebe ich hier

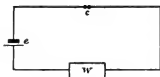


Fig. 3.

vier an, die die Ergebnisse im wesentlichen darstellen. Es stellt sich heraus, daß der Kohärerwiderstand unter Umständen von den anderen Widerständen in dem Stromkreise abhängt. Um aber nicht genötigt zu werden, die Werte von w_1 , w_2 , W , γ

und R (vgl. p. 757) jedesmal anzugeben, rechne ich die Beobachtungsdaten so um, wie sie der in nebenstehender Fig. 3 gezeichneten (ideellen) Schaltung entsprechen würden. Der Widerstand c des Kohärers (in Ohm) und die Potentialdifferenz p an seinen Enden (in Volt) sind den Messungen entnommen. Für den äußeren Widerstand W werden aber Werte angegeben werden, die sich aus den in den Messungen vorkommenden Werten von W , w_1 , w_2 , w' (vgl. p. 757) und e , und für eine Spannung von 2,00 Volt des Akkumulators e ausrechnen lassen. Der Druck D , d. h. die Kraft, womit das eine Stäbchen gegen das andere drückte, wird im Grammgewicht angegeben werden.¹⁾

Die angegebenen Reihen erstreckten sich über mehrere Tage, und die Pausen, die stattfanden, sind beigelegt, um zu zeigen, wie frei der Kohärer von Störungen durch Erschütterung war, und wie er sich verhält, wenn er sich selbst für längere Zeiten überlassen wird.

Die Fehlergrenze in den Messungen war wohl nicht über $\pm \frac{1}{2}$ Proz.

1) Über seine Berechnung vgl. die Dissertation.

Reihe A. $D = 1,25$ g.

W	$p \cdot 10^4$	c	W	$p \cdot 10^4$	c	W	$p \cdot 10^4$	c
104200	102	535,3	65400	108	354,1	235	2040	26,7
100900	98	499,7	686	3888	165,5	196	2080	22,7
10000	893	469,8	63200	104	331,1	3935	111	22,0
9660	554	430,8	Pause: 3 Stunden			Pause: 2 Stunden		
95800	93	449,6	64100	105	338,5	3955	111	22,1
8830	1720	360,6	589	4142	153,8	197	2029	22,3
83900	103	434,2		4064	150,2	158	2064	18,1
3440	1855	351,5	62800	103	325,4	128	2138	15,3
83000	102	425,0	491	4217	131,1	2970	100	15,0
Pause: Nacht			61200	101	310,6	Pause: 12 Stunden		
80500	99	401,9	392	4582	116,5	2970	100	15,0
3440	1722	324,5	61500	102	314,8	99	2072	11,5
79700	97	388,5	Pause: 12 1/2 Stunden			2975	74	11,1
2950	1916	312,6	63000	103	326,0	99	2070	11,5
68700	112	386,7	844,5	4841	110,0	2910	74	11,0
2460	2148	295,7		Pause: 70 Stunden				
66700	111	372,6	845,1	2143	41,4	1990	110	11,0
Pause: 2 Stunden			6600	112	37,1	99,5	2064	11,4
70600	114	404,9	Pause: 2 Stunden			1990	107	10,7
2160	2333	285,0	6710	112	38,0	Pause: 4 Stunden		
68000	112	382,8	294	2400	40,1	1980	108	10,7
1860	2516	268,3	294	2133	35,1	99	2000	11,0
67200	110	371,8	6900	98	34,0	1985	107	10,7
1570	2772	252,4	4930	137	34,0	99	1993	10,9
66400	109	362,6	2960	228	34,0	1985	107	10,6
1270	3008	225,5	Pause: 17 Stunden			Pause: 17 Stunden		
65300	107	351,9	6920	98	34,0	1990	107	10,7
Pause: 2 1/2 Stunden.			4940	187	84,0	50	2041	5,7
65200	108	353,3	2965	227	34,1	995	109	5,5
1077	8256	209,5	1980	340	34,2	50	2058	5,7
64500	106	344,4	986	676	84,5	995	108	5,4
979	3388	199,4	690	957	34,7	20	2305	2,6
64000	106	340,3	394	1640	35,2	399	123	2,5
881	3520	188,1	295	2085	34,4	Pause: 8 Stunden		
63100	105	382,2	690	935	33,8	398	123	2,5
783	3671	176,0	986	660	33,6	20	2205	2,5
62300	103	322,9	2965	221	38,2	398	119	2,4
Pause: 12 Stunden.			6920	96	33,3	10	2431	1,4
68400	111	381,6	Pause: 2 1/2 Stunden:			298	87	1,3
786	3836	186,6	6890	96	33,2	Funken		
65600	107	353,8	981	661	33,6	199	126	1,3
Pause: 3 Stunden			294	2053	33,6	Reihe abgebrochen.		

Reihe B. $D = 1,35$ g.

W	$p \cdot 10^4$	c	W	$p \cdot 10^4$	c	W	$p \cdot 10^4$	c
23650	115	136,5	490	2582	72,7	2315	117	13,6
2269	993	118,1	20350	103	105,0	136	2216	17,0
23350	114	133,4	Pause: Mittag			2395	120	14,4
1093	1687	100,7	450	2814	73,8	Pause: Mittag		
23200	113	132,1	23140	109	126,6	2380	120	14,3
900	1949	97,2	400	2888	67,6	116,5	2190	14,3
23050	112	129,8	20910	102	107,0	1990	103	10,3
760	2151	91,7	350	2453	49,0	97	2064	11,2
23200	112	128,8	16540	77	63,8	1200	120	7,3
Pause: Mittag			250	2323	32,9	77,5	2201	9,6
23420	113	132,7	8457	80	33,9	Pause: Nacht		
700	2269	89,6	Pause: Nacht			78,0	2141	9,4
23070	111	129,2	5865	106	32,5	1080	110	6,0
547	2392	74,3	194,5	2156	23,5	58,5	2128	7,0
20640	101	105,1	4950	82	20,4	720	119	4,3
Pause: Nacht			165,5	2165	20,0	59	2091	6,9
19750	102	101,4	8375	91	16,4	700	117	4,1
437	2685	67,7	136	2248	17,2	41	2130	5,3
20420?	103?	106,1?	2240	114	12,9	630	107	3,4
			Pause: 2 Tage			Schluß.		

Reihe C. $D = 1,45$ g.

W	$p \cdot 10^4$	c	W	$p \cdot 10^4$	c	W	$p \cdot 10^4$	c
9760	122	59,6	9820	113	55,8	3900	84	16,8
232	2813	38,0	176	3212	33,6	97,4	2293	12,6
9800	117	57,7	168	3306	32,8	1950	120	11,8
233	2791	37,6	156	3401	32,0	Pause: 13 Stunden		
9770	115	56,5	9840	109	54,0	1960	121	11,9
222	2839	36,8	Pause: 8 Stunden			97,7	2091	11,4
9770	115	56,5	9855	110	54,5	58,8	1992	6,5
213	2905	36,2	155,5	3343	31,2	993	101	5,0
203	2966	35,4	145,5	3437	30,2	Pause: 8 Stunden		
194	3040	34,7	136,0	3545	29,3	978	101	5,0
9800	112	55,2	v			49,2	2042	5,6
193	3028	34,5	136,0	2496	19,4	978	82	4,0
184	3102	33,7	8795	52	22,9	Durch Funken nicht geändert.		
174	3180	32,9	137	2437	18,9	29,2	2143	3,5
9775	112	54,8	126	2581	18,7	Reihe abgebrochen.		
Pause: 12 $\frac{1}{2}$ Stunden			117	2419	17,4			
				2453	16,3			

Reihe D. $D = 1,77$ g.

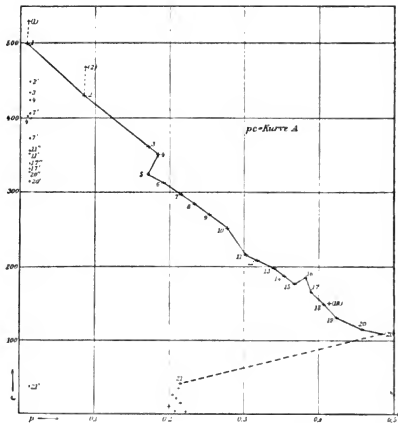
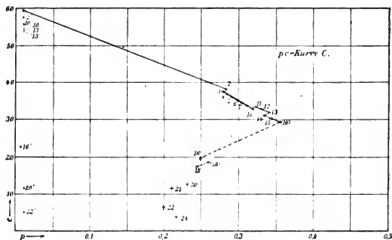
W	$p \cdot 10^4$	c
3350	89	17,6
977	348	17,3
2940	115	17,0
165,5	1643	14,3
156,5	1686	14,4
137,0	1794	13,5
2925	97	14,3
Pause: 13 $\frac{1}{2}$ Stunden		
2455	127	15,7
137,5	1811	13,7
117,5	1980	12,9
98,2	2161	11,9
2446	103	12,6
98,2	2161	11,9
78,3	2413	10,9
▼		
78,3	2248	9,92
1970	101	9,97
58,9	2232	7,38
1472	96	7,1

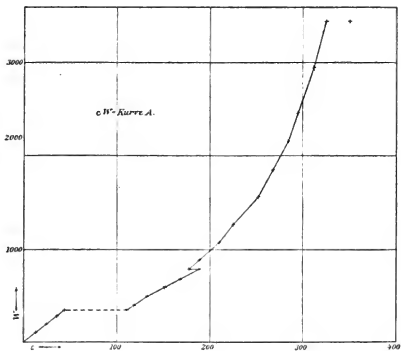
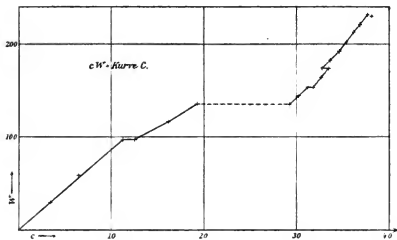
Reihe abgebrochen.

Der Leichtigkeit der Übersicht wegen sind die Reihen A und C auch als Kurven aufgestellt (vgl. p. 762 u. 763); in dem einen Falle sind die Abszissen Werte von p , und die Ordinaten Werte von c , im anderen Falle stellen die Abszissen Werte von c , und die Ordinaten Werte von W dar. In den cW -Kurven sind alle Messungen bei sehr kleiner Spannung und noch dazu einige der ersten Messungen der Reihen weggelassen, um innerhalb bequemer Grenzen zu bleiben. Ebenso in den $p c$ -Kurven sind viele Messungen bei kleiner Spannung weggelassen. In den $p c$ -Kurven sind die nacheinander folgenden Messungen bei steigender Spannung numeriert, und die Kurven durch diese Punkte gezogen. Die nach jeder

solchen Messung bei kleiner Spannung gemachte Messung (vgl. oben p. 757) ist durch ihren entsprechenden Punkt, der mit derselben Zahl, aber gestrichen, versehen ist, angedeutet. Falls zwei solche Messungen bei kleiner Spannung folgen, ist der zweite Punkt mit einer zweimal gestrichenen Zahl versehen.

Aus den Beobachtungen und den Kurven geht deutlich hervor, daß mit wachsender Spannung p der Kohärerwiderstand c abnimmt, daß diese Abnahme bei einer bestimmten Spannung plötzlich eine sehr starke wird. Hier setzt die eigentliche Kohärerwirkung ein. Sie ist in den Beobachtungsreihen an den betreffenden Stellen durch Pfeile ▼ markiert, in den Kurven kennzeichnet sich das Einsetzen der Kohärerwirkung durch plötzlichen Sprung der $p c$ - und cW -Kurven nach links. Demnach fällt die Diskussion der Ergebnisse in zwei Teile, nämlich 1. das Verhalten des Kohärrers vor dem Eintreten der Kohärerwirkung, und 2. sein Verhalten nach deren Eintritt.





Verhalten des Kohärers vor dem Eintritt der Kohärerwirkung.

Der Anfangswiderstand und der äußere Druck.

Wird zunächst eine sehr kleine Potentialdifferenz an die Kohärerenden angelegt (etwa $\frac{1}{100}$ Volt) und mit Hilfe derselben der Widerstand c des Kohärers gemessen (Anfangswiderstand c_0), so kann man im allgemeinen bemerken, daß c_0 mit wachsendem Druck D kleiner wird. Doch ist der Druck nicht allein maßgebend, denn der Anfangswiderstand c_0 variiert bei jedem Druck innerhalb sehr breiter Grenzen. Es waren daher mittlere Anfangswiderstände in den angegebenen Reihen ausgewählt. Die Stäbchen wurden (nach Feststellung des gewünschten Druckes) getrennt, dann wieder in Berührung gebracht, und darauf der Anfangswiderstand gemessen. Dieses Verfahren wurde 10—20 mal wiederholt, und dann eine Reihe mit einem Anfangswiderstand angefangen, der ungefähr dem Mittel dieser Messungen entsprach. Wir werden später einen anderen Grund für Verschiedenheiten des Anfangswiderstandes kennen lernen. Es ist auch zu bemerken, daß es unmöglich war, die Achsen der Stäbchen jedesmal nach einer Trennung derselben genau in dieselbe Lage zurückzubringen, sodaß sowohl die Stelle des Kontaktes als auch der Druck D etwas variierte.

Elastische Eigenschaft des Kohärerwiderstandes.

Wird nun die Potentialdifferenz p vergrößert, so vermindert sich bei jeder auch noch so kleinen Vergrößerung der Kohärerwiderstand; wird nun wiederum die Potentialdifferenz auf den kleinen Anfangswert gebracht, so ist der Kohärerwiderstand zwar wieder größer geworden, jedoch ist er noch kleiner als der Anfangswiderstand c_0 (vgl. z. B. Zeile 5 und Zeile 2 in Reihe A; in der p - c -Kurve A liegt z. B. der Punkt 2' höher als 2, aber niedriger als 1). *Der Kohärerwiderstand bietet in diesem Gebiete das Bild eines unvollkommen elastischen Körpers mit zeitlicher Nachwirkung.* Man bemerkt nämlich, daß sich der Kohärerwiderstand bei der Anlegung einer bestimmten Spannung nicht sogleich auf einen bestimmten Wert einstellt, sondern daß er sich erst rasch, dann langsamer und langsamer einem bestimmten Wert nähert. Dieses Verhalten machte sich in den Messungen folgenderweise sichtbar. Eine gewisse Spannung

wurde an die Kohärerenden angelegt. Das Galvanometer zeigte einen Ausschlag, der nicht konstant war, sondern langsam abnahm. Dadurch zeigte sich, daß der Kohärerwiderstand und die Spannung an den Kohärerenden (denn sie wurde durch jenen bestimmt), abnahmen. Dieser Prozeß kam nicht schnell zu Ende, sondern er konnte sogar mehrere Stunden dauern, bevor vollkommenes Gleichgewicht erreicht wurde. Nach einigen Minuten aber war das Gleichgewicht so nahe erreicht, daß es nicht nötig war, länger zu warten. Die in den Tabellen angegebenen Messungen gelten nur für dieses unvollkommene, aber nahezu erreichte Gleichgewicht. In Reihe A sind drei Beispiele dieses Prozesses angegeben. Die Spannung, die das Galvanometer anfangs zeigte, und die Spannung, die später erreicht wurde, sind mit Klammern { verbunden. Bei der ersten Messung also sank der Kohärerwiderstand von $535,3 \, \Omega$ bei einer Spannung von $0,0102$ Volt in 22 Min. auf $499,7 \, \Omega$ ($= c_0$) bei einer Spannung von $0,0098$ Volt. Bei der zweiten Messung dieser Reihe sank der Widerstand von $469,3 \, \Omega$ bei $0,0893$ Volt in 28 Min. auf $430,8 \, \Omega$ bei $0,0854$ Volt, und im dritten Beispiele (in zweiter Kolonne Zeilen 6 und 7) von $153,8 \, \Omega$ bei $0,4142$ Volt in 30 Min. auf $150,2 \, \Omega$ bei $0,4064$ Volt.¹⁾ Wie man aus den Tabellen sieht, kehrt der Widerstand nach einer Messung bei größerer Spannung zurück zu einem großen Werte bei kleiner Spannung. Zeit ist auch hier erforderlich und man sieht, daß der Kohärerwiderstand sich während der langen Pause noch mehr erholte. Er gewann aber nie seinen ursprünglichen großen Wert wieder. Wird dieselbe hohe Spannung wieder angewandt, so sinkt der Widerstand auf denselben Wert wie früher, oder noch weiter, wenn der frühere Wert nicht der Gleichgewichtslage entsprach.

Lineare Beziehung zwischen c und p .

Die p - c -Kurven sind ungefähr gerade Linien, d. h. der Kohärerwiderstand c ist eine lineare Funktion von der angelegten

1) In den zwei ersten Beispielen scheint der äußere Widerstand W auch abgenommen zu haben. Diese scheinbare Abnahme von W ist aber auf die Umrechnung für die einfache Schaltung (vgl. p. 758) zurückzuführen, denn in der wirklich gebrauchten Schaltung (vgl. p. 755) fand keine Änderung von κ_1 , κ_2 , oder W statt.

Spannung p. Von den p - c -Kurven wurden die wahrscheinlichsten Lagen dieser Geraden angenommen, und ihre Gleichungen in der Form

$$\frac{p}{a} + \frac{c}{b} = 1$$

ausgerechnet. Es bedeutet a also die Spannung, die, an die Kohärerenden angelegt, den Kohärerwiderstand c auf den Wert Null bringen würde, falls Kohärerwirkung nicht einträte, b dagegen den Anfangswiderstand bei unendlich kleiner Spannung. Die folgende Tabelle bietet einen Überblick über die Resultate dar. In der ersten Kolumne ist der äußere Druck D , in der zweiten und dritten die Werte von a und b , in der vierten der Anfangswiderstand c_0 angegeben und zuletzt folgen Bemerkungen über die Deutlichkeit der linearen Beziehung in den betreffenden Reihen.

D	a	b	c_0	Bemerkungen
1,25 g	0,674	506	500	Reihe A oben
1,35	0,596	8490	7800	Ziemlich gut
1,35	0,744	8590	2853	Nicht sehr gut
1,35	0,605	1435	1360	Gut
1,35	0,871	401	640	Ziemlich gut
1,35	0,593	140	137	Reihe B oben
1,45	0,793	70	60	Reihe C oben
1,77	0,497	21	18	Reihe D oben

Wie man sieht, hat a , roh gesagt, den konstanten Wert 0,6, und b ist im allgemeinen etwas größer als der Anfangswiderstand c_0 , wie natürlich scheint. Auch nimmt b im allgemeinen ab, wenn der Druck D wächst, wie der physikalischen Bedeutung von b entspricht.

Wenn eine lineare Beziehung zwischen c und p besteht, so sind c und W durch eine Gleichung zweiten Grades verbunden, d. h. die c - W -Kurven sind Kegelschnitte. Ist nämlich

$$\frac{p}{a} + \frac{c}{b} = 1, \text{ oder } p = a \left(1 - \frac{c}{b}\right),$$

so folgt aus der Beziehung zwischen p , c und W , nämlich

$$p = \frac{ce}{W+c} \quad (\text{vgl. p. 758}),$$

daß

$$a \left(1 - \frac{c}{b}\right) = \frac{ce}{W+c},$$

oder

$$c^2 + c(W - ab + cb) - abW = 0.$$

Die kritische Spannung.

Wird nun die angelegte Potentialdifferenz immer größer, so tritt plötzlich (etwa bei $p = 0,5$ Volt bis $p = 0,25$ Volt, je nach dem Kohärerzustande) die spezifische Kohärerwirkung ein, d. h. der Widerstand sinkt plötzlich sehr stark. Der hierzu nötige Wert der anzulegenden Potentialdifferenz p soll die *kritische Spannung* genannt werden. Ist die angelegte Spannung gleich der kritischen Spannung oder nur wenig größer, etwa (um 0,02 Volt), so tritt die Kohärerwirkung erst nach einiger Zeit ein. Die Größe der kritischen Spannung ist nicht konstant, wie man aus den angegebenen Reihen sieht. Die kritische Spannung liegt in Reihe A ungefähr bei 0,484 Volt, in Reihe B ist sie über 0,289 Volt, in Reihe C ist sie ungefähr 0,354 Volt, und in Reihe D ungefähr 0,244 Volt. Ihre Größe hängt zum Teil vom äußeren Druck ab, gerade wie der Anfangswiderstand. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die hier gefundenen Verhältnisse.

Anfangswiderstand	Kritische Spannung	Druck D
563 Ω	0,48 Volt	1,25 g
670	$0,49 < p_c < 0,56$ „	1,25
739	0,30 „	1,25
108	$0,39 < p_c < 0,47$ „	1,35
137	$0,29 < p_c$ „	1,35
416	$0,36 < p_c < 0,48$ „	1,35
60	0,35 „	1,45
83	0,37 „	1,45
17	0,24 „	1,77

Es wird später gezeigt, daß der Anfangswiderstand und die kritische Spannung von der Dicke der den Kohärer bedeckenden Oxydschicht abhängen.

Verhalten des Kohärrers nach dem Eintritt der Kohärerwirkung.

Abhängigkeit der eintretenden Wirkung von dem Widerstande des Stromkreises. Versuch mit einer Thermosäule.

Ist eine Potentialdifferenz, die größer als die kritische Spannung ist, an die Kohärerenden angelegt, so tritt Kohärerwirkung ein, und der Kohärerwiderstand wird plötzlich kleiner, und zwar um so viel, daß sich die Spannung p ungefähr auf einen bestimmten Wert, der etwa 0,2 Volt beträgt, einstellt (Gleichgewichtsspannung).

Wie weit daher der Kohärerwiderstand dann sinkt, hängt vom äußeren Widerstande der gebrauchten Schaltung ab. Ist dieser sehr klein, so muß auch der Kohärerwiderstand bei Überschreitung der kritischen Potentialdifferenz auf einen ganz minimalen Wert fallen. Um dies zu zeigen wurde die folgende Methode benutzt. Statt des Akkumulators der früheren Methode

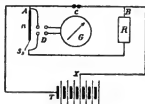


Fig. 4.

wurde eine Gölchersche Thermo-
säule gebraucht, die sich bei T in
der nebenstehenden Fig. 4 befindet.
Die einzelnen Elemente der Thermo-
säule hatten eine Spannung von
ungefähr 0,06 Volt; durch Ab-
zweigung bei X konnte eine belie-
bige Anzahl derselben eingeschaltet
werden. Der übrige Teil der Schal-

tung, mit Weglassung der Widerstände w_1 , w_2 und W' , entspricht vollkommen der Schaltung auf p. 756. Weil der Widerstand W hier fehlt, kann der Widerstand c des Kohälers nicht gemessen werden. Es war aber möglich durch eine einfache Einrichtung, die hier nicht gezeigt wird, zu der Schaltung auf p. 756 überzugehen, und so den Widerstand des Kohälers zu messen. Ein einziges Resultat genügt, um das Ergebnis dieser Beobachtung darzulegen; es ergab sich zunächst:

$$D = 1,35 \text{ g}, \quad c_0 = 110 \, \Omega \text{ bei } p = 0,0106 \text{ Volt.}$$

Nun wurde die Spannung 0,3936 Volt für 3 Minuten angelegt. Sodann wurde $c = 106 \, \Omega$ bei $p = 0,0104$ Volt gemessen d. h. der Kohärereffekt war durch Anlegen der früheren Spannung $p = 0,39$ Volt noch nicht erreicht. Nun wurde die Spannung 0,4684 Volt angelegt, die aber sogleich zu fallen anfang und am Ende von 3 Minuten den Wert $p = 0,2700$ Volt erreichte.

Eine Messung des Kohärerwiderstandes mit p gleich 0,0038 Volt ergab dann

$$c = 0,02 \, \Omega.$$

Die vollkommene Einstellung auf die Gleichgewichtsspannung nimmt eine lange Zeit in Anspruch, sogar mehrere Stunden, und wurde daher niemals abgewartet. Ein Beispiel dieses Prozesses ist in Reihe C, zweite Kolumne, Zeile 2 und 3 von unten angeführt (Punkt 18 in der p - c -Kurve C). Hier fiel die angelegte Spannung von dem Wert 0,2581 Volt in 17 Min.

auf 0,2419 Volt, und damit sank der Kohärerwiderstand von 18,7 Ω auf 17,4 Ω . Die Gleichgewichtsspannung hat für einen Kohärer aus Stahl ungefähr den Wert 0,20 Volt. *Sie ist vom Drucke an der Kontaktstelle und von anderen Umständen unabhängig.*

Über das Verhalten des Kohälers nach Eintritt der Kohärerwirkung ist noch folgendes zu hemerken. Wird die Kohärerwirkung abgebrochen, bevor die Gleichgewichtsspannung sich eingestellt hat, so kann eine Spur der Elastizität des Kohärerwiderstandes vor dem Überschreiten der kritischen Spannung noch vorhanden sein. Beispiele hiervon bieten die Reihen C und D hei den ersten Messungen unter kleiner Spannung nach Eintritt der Kohärerwirkung. Ist aber die Gleichgewichtsspannung des Kohälers ganz oder nahezu erreicht, so ist der Kohärerwiderstand annähernd konstant, auch wenn man ihn mit wechselnden Spannungen mißt, die nur die Gleichgewichtsspannung nicht überschreiten. *Die vor dem Überschreiten der kritischen Spannung beobachtete Elastizität des Kohärerwiderstandes ist jetzt vollständig verschwunden, sie hat sich sogar scheinbar umgekehrt, denn nun werden kleinere Werte des Kohärerwiderstandes bei kleineren Spannungen gefunden.* Beispiele sind in der Reihe A in der zweiten Kolumne in den sieben Messungen, die nach der 17-stündigen Pause folgen, und in den letzten Kolumnen von Reihen B und C zu sehen. *Ebenso zeigt jetzt der Kohärerwiderstand keine zeitliche Nachwirkung mehr.* Zeitliche Nachwirkung tritt erst wieder ein, wenn durch die angelegte Spannung die Gleichgewichtsspannung überschritten wird, wodurch dann, wie oben gesagt wurde, der Kohärerwiderstand weiter zu einem Werte sinkt, der aus der Gleichung

$$p_g = \frac{c}{W + c} e$$

oder

$$c(e - p_g) = W p_g$$

einfach aus W zu berechnen ist. In der Tat sind die cW -Kurven für den Zweig, der den Kohäreffekt entspricht, gerade Linien, die durch den Koordinatenanfang gehen.

Die Gleichgewichtsspannung hat auch Aschkinass¹⁾ hemerkt, aber in einer anderen Weise gefunden. Er definiert

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 66. p. 303. 1898.

sie als die kleinste Spannung, die, wenn sie an den Kohärerenden angelegt wird, verhindert, daß der Kohärerwiderstand durch Klopfen auf große Werte wieder zurückgebracht werden kann, und bemerkt, daß sie ungefähr die Hälfte der kritischen Spannung beträgt. Dieser Wert ist also ungefähr übereinstimmend mit dem Werte, den ich hier als Gleichgewichtsspannung definiert und gemessen habe.

Theorie des Kohärrers

Das Verhalten des Kohärrers von $p = 0$ bis zur kritischen Spannung p_c läßt sich durch Annahme einer elastischen schlecht leitenden Schicht zwischen den Kohärerenden veranschaulichen. Der Kohärerwiderstand ist danach von $p = 0$ bis $p = p_c$ der Widerstand dieser Zwischenschicht. Die Dicke dieser Zwischenschicht, die auch durch den äußeren Druck beeinflußt wird, bestimmt den Anfangswiderstand. Wird eine Spannung an die Kohärerenden angelegt, so findet eine elektrostatische Anziehung zwischen denselben wegen ihrer Potentialdifferenz statt, und die Dicke der Zwischenschicht, und damit der Kohärerwiderstand, werden verkleinert.¹⁾ Bei Verminderung der Spannung wird die Anziehungskraft kleiner und die Zwischenschicht dehnt sich wegen ihrer Elastizität wieder aus, sodaß der Kohärerwiderstand wieder groß wird. Daß er nicht ganz zu seinem ursprünglichen Werte zurückkehrt, ist durch die unvollkommene Elastizität der Zwischenschicht erklärlich.

Wird nun die kritische Potentialdifferenz p_c erreicht, so tritt eine mechanische Beanspruchung der Zwischenschicht ein, der gegenüber sie nicht mehr genügende mechanische Festigkeit besitzt. Die schlecht leitende Schicht wird daher zerdrückt, sodaß sich die inneren metallisch leitenden Kohärerteile berühren, und zwar wird die Zwischenschicht in einem derartigen Umfang zersprengt, d. h. die metallische Berührungsfläche der Kohärerteile stellt sich auf eine derartige Größe ein, daß die Gleichgewichtsspannung p_g zwischen den Kohärerenden erreicht ist. Bei dieser Spannung p_g kann die Zwischenschicht gerade noch weiterer Zertrümmerung widerstehen. Wird eine größere Potentialdifferenz als p_g plötzlich an die

1) Der Kohärerwiderstand muß daher annähernd eine lineare Funktion von p sein.

Kohärerenden angelegt, so wird die Zwischenschicht weiter zertrümmert, d. h. der Kohärerwiderstand nimmt weiter ab, und zwar so weit, daß wieder die Gleichgewichtsspannung p_g zwischen den Kohärerenden sich einstellt, der die Zwischenschicht gerade noch das Gleichgewicht halten kann. Daß nun, wenn einmal der Kohäreffekt, d. h. wirkliche metallische Berührung erreicht ist, größere Werte des Kohärerwiderstandes bei Spannungen in der Nähe der Gleichgewichtsspannung als bei kleineren Spannungen gefunden werden, ist auf die Erwärmung der metallisch sich berührenden Teile durch die größeren Stromstärken zurückzuführen.

Die Zwischenschicht.

Eine schlechtleitende Zwischenschicht des Kohärrers kann man künstlich herstellen (z. B. durch Petroleum, vgl. weiter unten); ohne besondere Behandlung spielt Oxydierung die Rolle der schlechtleitenden Zwischenschicht, wie schon von mehreren Autoren ¹⁾ ausgesprochen wurde. Als der Kohärer aus Kupfer hergestellt war, wurden die Kontaktflächen mit feinem Schmirgelpapier (Nr. 000) glatt abgeschmirlgelt. Der Anfangswiderstand bei einer Spannung unter 0,004 Volt gemessen ergab sich kleiner als 0,1 Ω . Nach Ablauf von 3 Tagen war er immer noch so klein. Die Stäbchen wurden nun 5 Min. lang in einem Luftbad bei ungefähr 230° erhitzt. Nun lag der Anfangswiderstand zwischen 25 Ω und 100 Ω . Die kritische Spannung war zu 0,23 Volt bestimmt. Nach mehreren Wochen wurde die kritische Spannung wieder untersucht. Ihr Wert war einmal 0,93 Volt, und in zwei anderen Fällen lag sie über 1,0 Volt. Die Kontaktflächen wurden nun leise abgeschmirlgelt, mit dem Resultat, daß die kritische Spannung fiel und zwischen 0,17 Volt und 0,23 Volt lag. An dem nächsten Tag lag sie zwischen 0,63 Volt und 0,68 Volt. Zunächst wurden die Kontaktflächen abgeschmirlgelt, bis der Anfangswiderstand sehr klein wurde. Die Stäbchen wurden nun erhitzt, bis eine sichtbare Oxydschicht vorhanden war, und dann die kritische Spannung bestimmt. Ihr Wert war ungefähr 0,50 Volt. Die Stäbchen wurden dann weiter erhitzt. Die kritische Spannung war nun auf 0,70 Volt gestiegen. Es ergibt sich somit, daß die

1) Vgl. O. Lodge, *Electrician* 40. p. 91. 1897; P. Drude, *Wied. Ann.* 65. p. 485. 1898. — Etwas Einfluß hat auch die Gasschicht nach E. Dorn, *Wied. Ann.* 66. p. 159. 1893.

kritische Spannung mit der Dicke der Oxydschicht wächst, die die Rolle der Zwischenschicht spielt.

Mit Zink war die Sache dieselbe. Der Kohärerwiderstand war sehr klein, wenn die Kontaktflächen glatt abgeschmirgelt waren, und nach 4 Tagen bestand noch der kleine Wert. Die Stäbchen wurden in befeuchteter Luft bei 100°—110° erhitzt, bis der Anfangswiderstand groß geworden war. Die Untersuchung der kritischen Spannung ergab:

Anfangswiderstand	Kritische Spannung
464 Ω	$0,58 < p_c < 0,64$ Volt
316	0,58 „
427	$p_c < 0,52$ „

Die Kontaktflächen wurden leise abgeschmirgelt mit den Resultaten:

740 Ω	$p_c < 0,53$ Volt
605	$p_c < 0,46$ „
517	0,36 „
540	$p_c < 0,36$ „
363	$0,29 < p_c < 0,36$ „

Die Stäbchen wurden weiter erhitzt mit dem Resultate:

2860 Ω	0,47 Volt
2170	0,46 „

Die Untersuchung mit einem Stahlkohärer — zum Teil wurde der schon (p. 755) beschriebene Kohärer und zum Teil der später benutzte Kohärer (vgl. p. 786) benutzt — lieferte ähnliche Resultate. Das Wachsen des Anfangswiderstandes mit der Dicke der Oxydschicht ließ sich hier leicht beobachten. Sobald wie möglich nach dem Abschmirgeln der Kontaktflächen wurde der Kohärer in Ordnung gebracht, und sein Widerstand gemessen. Es währte immer ein paar Minuten, um den Kohärer zu justieren, und dieser Zeitraum genügte für das Zustandekommen einer dünnen Oxydschicht. Demzufolge war der Anfangswiderstand bei solchen Versuchen, obwohl klein, immer noch merklich. Der kleinste gefundene Wert war 0,1 Ω . Der Galvanometeraussschlag war aber nicht konstant, sondern änderte sich beständig mit plötzlichen Sprüngen, indem er bald größer, bald kleiner, aber so, daß er mit der Zeit immer größer und konstanter wurde. Hierdurch war die Bildung einer Oxydschicht sichtbar. Nun wurden die Kontaktflächen glatt abgeschmirgelt, und dann der Anfangswiderstand und die kritische Spannung von Zeit zu Zeit gemessen. Das Resultat ist nachfolgend angegeben.

Zeitraum nach dem Abschmiegeln		Anfangswiderstand Ohm	Kritische Spannung Volt
	13 Minuten	$c_0 < 150 \Omega$	$0,24 < p_c < 0,31$
	19 "	134 Ω	$0,24 < p_c < 0,31$
	34 "	223	0,32
1 Stunde	20 "	562	0,43
1 "	27 "	823	0,37
1 "	33 "	562	$p_c < 0,37$
1 "	40 "	560	$p_c < 0,37$
1 "	48 "	547	0,40
3 Stunden	9 "	591	$p_c < 0,42$
3 "	15 "	1230	$0,50 < p_c$
18 "		1747	$0,48 < p_c < 0,54$
18 "		1630	0,43
18 "		2100	0,42

und von einem zweiten Versuche

7 Tage	3130	$0,45 < p_c < 0,51$
7 "	1450	$0,40 < p_c < 0,46$
7 "	1970	0,40
7 "	2520	0,42
7 "	1340	$0,44 < p_c < 0,51$

Der äußere Druck D blieb während der Untersuchung ungeändert. Der zweite Versuch wurde angestellt, weil es später wahrscheinlich schien, daß das Wachsen der kritischen Spannung schließlich eine Grenze erreicht. Die kritische Spannung erreicht, wie man sieht, einen Grenzwert in ungefähr drei Stunden. Auch ist der Galvanometeraus Schlag nun konstant geworden. Wenn man bedenkt, daß die Oxydschicht nicht überall dieselbe Dicke zu haben braucht, und daß die Kontaktflächen einander nicht immer in denselben Stellen berühren, so sind die verschiedenen Werte des Anfangswiderstandes und der kritischen Spannung unter demselben äußeren Druck leicht verständlich.

Es ist zunächst von Interesse zu erfahren, ob die Zwischenschicht notwendigerweise aus einem Metalloxyd bestehen muß. Die Kontaktflächen des Kupferkohärsers — der wegen der schweren Oxydierbarkeit des Kupfers an der Luft benutzt wurde — waren glatt abgeschmiegelt, und es wurde versucht eine solche Einstellung zu treffen, daß die Luft zwischen den Kontaktflächen als Zwischenschicht diene. Dies gelang nicht. Es schien einmal erreicht zu sein. Das Ergebnis war aber nicht sehr befriedigend; auch konnte es nicht wieder gefunden

werden. Es wäre vielleicht möglich dies zu erreichen, wenn die Einrichtung des Kohärers eine solche wäre, daß sehr kleine Änderungen der Distanz zwischen den Kontaktflächen mit Sicherheit vorgenommen werden könnten, wie z. B. dies der Fall in einigen der Versuche von Aschkinass war.¹⁾ Sodann stellte ich ein Zwischenschicht aus Petroleum her, indem die Kontaktflächen damit benetzt wurden. Wenn der äußere Druck einen passenden Wert, der schwer zu finden war, hatte, so funktionierte der Kohärer. Messungen der kritischen Spannung ergaben

$$p_c = 0,86, < 0,86, < 0,86, = 0,75 \text{ Volt.}$$

Aschkinass²⁾ hat auch Kohärerwirkung mit Methylalkohol als Zwischenschicht erreicht. Aus diesen Versuchen ist klar, daß andere schlechtleitende oder isolierende Substanzen die Rolle der Zwischenschicht spielen können. Daß diese Versuche der Lodgeschen Theorie widersprechen, wie Aschkinass behauptet, ist mir nicht klar.

**Verhalten eines Kohärers, der aus mehreren Kontaktstellen
hintereinander bestand.**

Um diese Versuchsbedingung zu ermöglichen, wurden zwischen die zwei Stäbchen des Stahlkohärers noch zwei Stahlstäbchen von ungefähr derselben Größe und mit kugelförmig abgerundeten Enden in derselben Weise wie früher aufgehängt. Dadurch entstanden drei Kontaktstellen *A*, *B* und *C* (Fig. 5). Die



Fig. 5.

mittleren Stäbchen trugen auch kleine Stifte — *N* und *O* — die in Quecksilbernäpfchen eintauchten. Dadurch war es möglich, jede Kontaktstelle für sich zu untersuchen. Die kritischen Spannungen der Stellen *A*, *B* und *C* wurden bestimmt und dann die kritische Spannung des ganzen Kohärers, d. h. die größte Potentialdifferenz, die dauernd zwischen *M* und *P* bestehen kann, ohne das Eintreten der Kohärerwirkung zu verursachen. Sie ergab sich im allgemeinen kleiner als die Summe der kritischen Spannungen der einzelnen Kontaktstellen, und hatte

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 66. p. 294. 1898.

2) l. c. p. 294.

keinen bestimmten Wert. Eine Potentialdifferenz, die zwischen M und P besteht, teilt sich zwischen den Stellen A , B und C je nach den Verhältnissen der Widerstände derselben. Wenn nun die Gesamtspannung zwischen M und P so groß wird, daß die Teilspannung an einer Stelle größer als die kritische Spannung derselben wird, so tritt Kohärerwirkung dort ein, und der Widerstand derselben sinkt. Die Gesamtspannung wird von neuem zwischen den einzelnen Stellen geteilt. Dieser Prozeß dauert entweder bis die Gleichgewichtsspannung sich an der einen Stelle einstellt, oder bis die Teilspannung an einer der anderen Stellen die kritische Spannung derselben überschreitet, sodaß Kohärerwirkung auch dort eintritt. In diesem Falle fällt fast die ganze Gesamtspannung der dritten Stelle zum Teil, ihre kritische Spannung wird auch wahrscheinlich überschritten werden, und der Widerstand des ganzen Kohärrers sinkt auf einen sehr kleinen Wert. Die Ergebnisse eines solchen Versuches sind in folgender Tabelle angegeben. In der ersten Kolumne steht die Gesamtspannung zwischen M und P , die in jedem Falle für anderthalb Minute angelegt war. Die Teilspannung an den Stellen A , B und C ist in den drei folgenden Kolumnen angegeben.

Gesamtspannung	Teilung derselben			Bemerkungen	
	A	B	C	Anfangswiderstände	Kritische Spannung
Volt				A 1860 Ω	$0,64 < p_c < 0,87$
				B 1210	0,52
				C 446	$0,61 < p_c < 0,68$
0,590	0,260	0,220	0,110		
0,709	0,219	0,250	0,140		
1,022	0,456	0,328	0,238		
1,200	0,710	0,112	0,378	Der Kohärerereffekt ist wahrscheinlich bei B eingetreten.	
1,278	0,776	0,116	0,386		
1,384	0,834	0,128	0,422		
1,504	0,894	0,146	0,462	Der Kohärerereffekt tritt hier bei A ein	
und die Spannungen fielen auf					
0,760	0,204	0,178	0,378	und die Endwiderstände waren A 0,65 Ω , B 0,75 Ω , C 0,61 Ω ,	

Bei der Messung der Endwiderstände war keine Rücksicht auf den Widerstand der Zuleitung genommen. Die Gesamtspannung am Ende ist daher scheinbar nicht nach den Verhältnissen der Endwiderstände geteilt. *Die Gleichgewichtsspannung ist der Anzahl der Kontaktstellen proportional.*

Die Resultate von Guthe und Trowbridge.¹⁾

Die Verfasser haben die folgenden „kritischen Potentialdifferenzen“ gefunden: für Eisen 0,222 Volt, für Kupfer 0,094 Volt und für Zink 0,096 Volt. Diese Werte sind viel kleiner als die von mir gefundenen kritischen Spannungen (vgl. p. 767 und 770), dagegen stimmen sie auffallend überein mit den von mir gefundenen Gleichgewichtsspannungen (Eisen etwa 0,2 Volt) Kupfer unter 0,14 Volt). Ich möchte behaupten, daß die Potentialdifferenzen, die die Verfasser gefunden und als „kritische Potentialdifferenzen“ bezeichnet haben, in Wirklichkeit Gleichgewichtsspannungen gewesen sind.

Wenn man eine Spannung, die größer als die kritische Spannung ist, an die Kohärerenden anlegt, so fällt der Kohärerwiderstand beim Eintreten der Kohärerwirkung *sogleich* auf einen Wert, den ich *den Sturzwert* nennen werde, und sinkt dann allmählich weiter, bis er endlich den Wert erreicht hat, der zur Einstellung der Gleichgewichtsspannung nötig ist (Gleichgewichtswert). Je mehr die unsprünglich angelegte Spannung die kritische Spannung überschreitet, je mehr nähert sich der Sturzwert dem Gleichgewichtswert, und schließlich fallen bei genügend hoher angelegter Spannung Sturz- und Gleichgewichtswert zusammen. Nun war die von Guthe und Trowbridge angewandte Methode eher geeignet Sturzwerte und die dazu gehörigen Spannungen zu bestimmen, als die kritischen Spannungen selbst. Aus dem eben Gesagten geht folgendes hervor: 1. Die steigenden Teile der von den Verfassern angeführten Kurven entsprechen Werten der angelegten Spannung²⁾, wobei Sturz- und Gleichgewichtswerte nicht zu-

1) L. c. (vgl. p. 754).

2) Die Werte der wirklich angelegten Spannungen sind von den Verfassern nicht angegeben worden. Auch ist man nicht im stande, sie annähernd zu berechnen, denn die Verfasser gehen nicht die Anfangswiderstände des Kohärrers und die anderen Widerstände im Stromkreise

sammen fallen. 2. Die horizontalen Teile der Kurven entsprechen solchen Werten der angelegten Spannung, wofür der Sturzwert mit dem Gleichgewichtswert zusammenfällt. 3. Die den horizontalen Teilen gehörige Spannung ist eben die Gleichgewichtsspannung.

Folgende Übereinstimmung wäre noch hervorzuheben. Die Verfasser finden für ihre „kritische Potentialdifferenz“¹⁾ wie ich für meine Gleichgewichtsspannung, daß die betreffenden Werte für jedes Metall einen konstanten Wert haben, und daß für mehrere Kontakte diese Potentialdifferenz der Zahl der Kontaktstellen proportional ist. Die von mir gefundene kritische Spannung dagegen hängt ab vom äußeren Drucke, von der Dicke, und von der Natur der Zwischenschicht, und für mehrere Kontakte ist sie nicht notwendig der Zahl der Kontaktstellen proportional.

Daß die Verfasser keine zeitliche Nachwirkung gefunden haben, ist meiner Ansicht nach auf die von ihnen angewandte Untersuchungsmethode zurückzuführen.

B. Untersuchung mittels elektrischer Wellen.

Natur der Wirkung.

Es fragt sich, inwieweit die Wirkung der elektrischen Wellen auf den Kohärer und die schon beschriebene, die durch Anlegung einer Potentialdifferenz an die Kohärerenden mittels eines Gleichstromes hervorgerufen war, ähnlich sind. Der Widerstand des Kohärrers wurde durch einen Funken in seiner Nähe auf einen nicht sehr kleinen Wert gebracht, und dann in derselben Weise wie früher untersucht. Das Verhalten des Kohärrers war dasselbe, als ob sein Widerstand durch Anlegung einer Potentialdifferenz, die größer als seine kritische Spannung wäre, teilweise herumgetrieben worden sei. Wenn eine Spannung, die größer als seine Gleichgewichtsspannung war, angelegt wurde, so sank sein Widerstand noch weiter, bis die Gleichgewichtsspannung sich eingestellt hatte. Es ist zunächst zu bemerken, daß im allgemeinen die elektrischen Wellen den

an. Jedenfalls waren die angelegten Spannungen bedeutend größer als die kritischen Spannungen, denn die Verfasser verlangten, daß Kohärerwirkung sogleich bei Anlegung derselben eintreten sollte (vgl. p. 769).

1) Vgl. p. 754.

Kohärerwiderstand nicht auf einen minimalen Wert herunterzutreiben vermögen, obwohl sie beliebig lang darauf einfallen.¹⁾ Vielmehr fällt der Kohärerwiderstand in dem ersten Moment der Bestrahlung auf einen gewissen Wert, der gewöhnlich durch die weitere Bestrahlung nicht geändert wird. Wenn er aber eine Änderung erfährt, so kann diese sowohl eine Vergrößerung als eine Verkleinerung sein. Der Wert, worauf der Kohärerwiderstand fällt, entspricht vermutlich den Sturzwerten des mit Gleichstrom behandelten Kohärrers, wobei ich unter Sturzwert denjenigen Widerstand bezeichne, welchen der Kohärer im ersten Momente nach Anlegung einer Spannung zeigt, welche zum ersten Male die kritische Spannung überschritten hat (vgl. oben p. 776). Einfallende elektrische Wellen können eine Potentialdifferenz zwischen den Enden des Kohärrers hervorrufen, die bedeutend größer als die kritische Spannung ist, wie aus folgendem hervorgeht. Die kritische Spannung des Kohärrers der später angegebenen Reihe III (eine Beschreibung dieses Kohärrers ist auf p. 786 zu finden) war einmal so groß geworden, daß die Anlegung einer Potentialdifferenz von 0,8 Volt eine Minute lang Kohärerwirkung nicht hervorrief. Der Widerstand des Kohärrers fiel aber sogleich, als die elektrischen Wellen von dem 9 m entfernten Erreger — der später beschrieben wird — auf den Kohärer wirkten. In gleicher Weise rief die Anlegung einer Spannung von 0,6 Volt für 1 Min. an den Kohärer der Reihe IV (Beschreibung auf p. 788) keine Kohärerwirkung hervor, die aber sogleich bei Bestrahlung eintrat. Man sieht daher, daß die elektrischen Wellen im stande waren, eine Potentialdifferenz, die größer als 0,8 Volt bez. 0,6 Volt war, zwischen den Kohärerenden hervorzurufen.

Ermüdung des Kohärrers.

Eine Erscheinung, die erst in den späteren Versuchen mit elektrischen Wellen bemerkt wurde, soll zunächst besprochen

1) Am Schlusse der Reihen A und C (p. 759 u. 760) wurde es versucht, den Kohärerwiderstand durch Funken zwischen den Elektroden einer Influenzmaschine in der unmittelbaren Nähe des Kohärrers noch weiter heruntorzutreiben. In diesen, sowohl wie in anderen Fällen waren die Funken ohne Einfluß.

werden, nämlich die Ermüdung des Kohärers. Es wurde bemerkt, daß, obwohl die Wirksamkeit der Funken des Erregers dieselbe blieb, und obwohl keine Änderung an dem Erreger oder an dem Kohärer — dessen Kontaktflächen aus Stahl bestanden — gemacht wurde, die Werte des Kohärerwiderstandes, die am Anfang klein waren und ziemlich nahe zusammen lagen, nach wiederholten Bestrahlungen unregelmäßig zu werden anfangen, und endlich bedeutend größer wurden. Der Kohärer reagierte am Ende nicht mehr so stark noch so regelmäßig; er war, sozusagen, müde geworden. Wenn man nun die Kontaktflächen abschmirgelte und eine neue Oxydschicht anlaufen ließ, so fand man wieder die kleinen regelmäßigen Werte; der Kohärer war nun wieder „frisch“. Eine Untersuchung dieser Erscheinung wurde in folgender Weise ausgeführt. Die Kontaktflächen des benutzten Kohärers — desjenigen der Reihen IV und V, der auf p. 788 beschrieben ist —, die aus Stahl bestanden, waren kugelförmig und hatten einen Radius von ungefähr 1 mm. Sie waren zuerst glatt abgeschmirgelt, der Kohärer dann in Ordnung gebracht, und die kritische Spannung wurde bestimmt, nachdem sie ihren Endwert erreicht hatte. (Diese Bestimmung ist auf p. 773 angegeben.) Durch wiederholte Bestrahlung wurde der Kohärer znnächst ermüdet, und die kritische Spannung des müden Kohärers wurde zuletzt bestimmt. In der ersten Kolumne der folgenden Tabelle sind zehn Endwerte (aus Reihe V, vgl. p. 789, bei einer Erregerlänge von 50 cm entnommen) des Kohärerwiderstandes angegeben, die unter gleichen Umständen, während der Kohärer frisch war, gefunden wurden. In der zweiten Kolumne sind Beispiele der kleinen Werte, die immer noch gelegentlich vorkamen, während der Kohärer ermüdet wurde. In der dritten Kolumne sind acht hintereinander folgende Messungen, die gemacht wurden, als der Kohärer schon ziemlich müde geworden war. Zunächst folgen zwei Werte, als der Kohärer noch müder war, und zuletzt sind die Resultate der Bestimmung der kritischen Spannung am Ende angegeben. Es ist noch zu erwähnen, daß es sich als vorteilhaft erwies, um regelmäßige Werte des Endwiderstandes zu bekommen, den Anfangswiderstand weder zu groß noch zu klein zu wählen. Nun war es ziemlich leicht, einen Anfangswiderstand auf einen passenden Wert zu bringen, solange der

Kohärer noch frisch war. Je mehr aber der Kohärer ermüdete, um so schwieriger wurde dies. Man konnte somit aus der Leichtigkeit der Einstellung des Anfangswiderstandes den Zustand des Kohärrers beurteilen, und damit auch mit einiger Sicherheit voraussagen, ob die elektrischen Wellen den Kohärerwiderstand weit heruntertreiben würden oder nicht. Das so gewonnene Urteil über den Zustand des Kohärrers ist bei den Bestimmungen der kritischen Spannung des müden Kohärrers angegeben. *Gut* bedeutet, daß es leicht war, einen passenden Anfangswiderstand zu bekommen, *schlecht* das Umgekehrte.

Kritische Spannung am Anfang.

1. $0,48 < p_e < 0,54$ Volt	3. 0,42 Volt
2. 0,48 „	4. $0,42 < p_e < 0,48$ „

Endwerte des Kohärerwiderstandes.

Kohärer frisch	Im Laufe der Ermüdung	Kohärer müde	Kohärer noch müder
1,88 Ω	2,16 Ω	3,48 Ω	8,07 Ω
1,63	1,49	3,47	8,70
1,96	2,42	1,47	
1,88	2,02	2,69	
2,34	1,98	2,36	
2,27	1,46	2,02	
2,02	2,06	2,78	
2,16	1,58	3,41	
1,96	2,56	2,71 Ω = Mittelwert	
2,18			
2,03 Ω = Mittelwert			

Untersuchung der kritischen Spannung am Ende.

Zustand	Kritische Spannung Volt	Zustand	Kritische Spannung Volt
1. Ziemlich gut	0,47	5. Ziemlich gut	$0,42 < p_e < 0,48$
2. Schlecht	0,54	6. Schlecht	1,03
3. Schlecht	0,54	7. Schlecht	0,55
4. Ziemlich gut	$0,42 < p_e < 0,48$	8. Ziemlich gut	$0,48 < p_e < 0,54$

Am Schluß dieser Messungen wurde 15 Min. lang vergeblich versucht, dem Kohärer einen passenden Anfangswiderstand zu geben. Man sieht, daß die kritische Spannung größer

ist für den müden Kohärer als für den frischen. Ein frischer Kohärer gewinnt nicht im Laufe der Zeit eine so hohe kritische Spannung, wenn er sich selbst überlassen wird, wie hier der ermüdete Kohärer, wie aus dem auf p. 773 angegebenen Versuche hervorgeht.

In dem eben besprochenen Versuche waren die Kontaktflächen kugelförmig mit einem Radius von ungefähr 1 mm. In frischem Zustand konnte der Kohärer 40—50 mal bestrahlt werden, bevor die Ermüdung sich merklich machte, mit Ausnahme der gelegentlich vorkommenden großen Werte. Nun wurden aber in anderen Untersuchungen Kohärer benutzt, worin eine Nadelspitze und eine Kugelfläche (von derselben Größe wie vorher) die Kontaktstelle bildeten. Es wurde gefunden, daß der Kohärer schon nach 15—20 maligem Heruntertreiben seines Widerstandes durch Bestrahlung müde war. Die Nadelspitze bildet hier eine viel kleinere Kontaktfläche als die Kugelfläche. Jene muß daher viel eher als diese müde werden. In der Tat konnte man den Kohärer wieder frisch machen, indem man die Nadelspitze allein abschmirgelte. Nun wurde vielleicht die Nadelspitze noch einmal müde, ehe die Kugelfläche wegen ihrer Ermüdung abgeschmirgelt werden mußte.

Eine Ermüdung des Kohärrers in anderem Sinne, d. h. so, daß seine Oxydschicht immer geringer wird und sein Anfangswiderstand kleiner, ist zu erwarten, wenn man den Kohärer in sauerstofffreier Umgebung wiederholt auf Kohärerereffekt beansprucht. In der Tat hat Lodge¹⁾ dies beobachtet, indem er den Kohärer in einer Atmosphäre von Wasserstoff einschloß.

Die Ermüdung des Kohärrers bei Benutzung mit Gleichstrom wurde nicht bemerkt, aber es wurde auch bei diesen Versuchen der Kohärer nicht so oft auf Kohärerereffekt beansprucht, wie bei den Versuchen mit elektrischen Wellen. Wenn sich herausstellen sollte, daß tatsächlich eine Ermüdung des Kohärrers, die wesentlich in einer Verdickung der Oxydschicht zu bestehen scheint, nur bei elektrischen Wellen und nicht bei Gleichstrom eintritt, so liegt die Vermutung nahe,

1) O. Lodge, *Electrician* 40. p. 90. 1897.

daß die bei kräftigen elektrischen Wellen auftretenden Fünkchen ¹⁾ zwischen den Kohärerenden diese Verstärkung der Oxydschicht und damit die Ermüdung des Kohärers bewirken.

Abschnitt II. Resonanzversuche mit dem Kohärer.

Für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie ist es wichtig zu prüfen, ob man deutliche Resonanz in einer Drahtleitung beobachten kann, welche einen Kohärer enthält. Versuche in dieser Richtung hat Kiebitz ²⁾ angestellt, aus denen zu folgen scheint, daß der von ihm benutzte (Schranben-)Kohärer sehr große (∞ -große) Kapazität besitzt. Da aber Kiebitz einen Kohärer mit sehr vielen Kontaktstellen benutzt hat, während meine Kohärer nur eine Kontaktstelle besaßen, so war zu hoffen, daß diese Kohärer sowohl eine andere Kapazität besaßen als auch, daß sie für Resonanzversuche noch geeigneter seien. Für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie ist es jedenfalls wichtig, Kohärer von möglichst kleiner Kapazität anzuwenden, weil dann die Potentialdifferenz zwischen den Kohärerenden durch einfallende Wellen um so höher getrieben wird.

Versuchsanordnung.

Die Einrichtung zur Erregung der elektrischen Wellen ist in Fig. 6 gezeichnet. Der Erreger ist mit E bezeichnet. I ist ein Induktorium mit einem Deprezunterbrecher. Der Strom von vier Akkumulatoren wurde für die Primärspule gebraucht. Bei U befindet sich ein Stromunterbrecher ³⁾, wodurch der Primärstrom für eine bestimmte kurze Zeit geschlossen werden konnte. Von den Polen der Sekundärspule führten zwei dünne

1) Bei Gleichstrom ist das Auftreten von Fünkchen weder beobachtet, noch wahrscheinlich, noch notwendig, um den Kohärereffekt zu erklären. Im Gegensatz dazu behauptet G. Schlabach (Physik. Zeitschr. 2. p. 382. 1901) daß, „wie es jetzt fast allgemein geschieht, der Funkenwirkung, die man doch nicht entbehren kann, von vornherein die Hauptrolle zuzuschreiben sei“. Dieser Meinung kann ich mich durchaus nicht anschließen.

2) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. 6. p. 741. 1901.

3) Eine Beschreibung desselben findet man bei F. Kiebitz, l. c. p. 743.

Drähte, die etwas über einen Meter lang waren und einander parallel und in kleinem Abstand zum Erreger hinliefen. Die Konstruktion des Erregers ist in Fig. 7. angegeben. Eine Glasröhre *C*, in einen Holzklotz befestigt, trug oben ein Näpfchen *N* aus Hartgummi. Die gleich langen, horizontal gestreckten geraden Erregerstäbe *D* und *D'* aus 3 mm dickem Kupferdraht waren durch gegenüberliegende, sie eng klemmende Löcher in das Näpfchen eingeführt, und ihre Enden, die etwas abgerundet waren, wurden fast zusammengebracht. Der eine Draht *B*

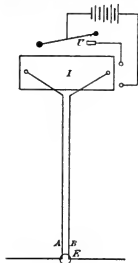


Fig. 6.

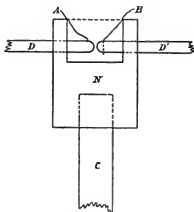


Fig. 7.

vom Induktorium paßte in ein kleines Loch, das dicht an dem Ende des Stabes *D'* war. Zwischen den Enden des zweiten Drahtes *A* und des anderen Stabes *D* blieb in den ersten Versuchen eine kleine Nebenfunkensstrecke. Veränderungen in der Länge dieser Nebenfunkensstrecke waren aber schwer zu vermeiden und verursachten Störungen. Deshalb wurde sie später weggelassen und die Verbindung zwischen *A* und *D* in derselben Weise, wie die zwischen *B* und *D'* hergestellt. Das Näpfchen — Fig. 8 stellt es in natürlicher Größe dar — war mit Petroleum gefüllt. Spätere Versuche zeigten, daß eine größere Regelmäßigkeit in der Wirksamkeit der Funken durch Wechseln des Petroleums in dem Näpfchen

von Zeit zu Zeit herbeigeführt wurde. Ein beständiges aber langsames Wechseln des Petrolenms wurde deshalb durch zwei Heber, der eine zum Füllen, der andere zum Leeren, zu stande gebracht. Die Länge der Funkenstrecke betrug 0,2 mm und wurde von Zeit zu Zeit kontrolliert, indem die Stellung der Erregerstäbe, wenn nötig, so geändert wurde, daß man einen blanken Draht von 0,2 mm Durchmesser gerade zwischen ihre Enden stecken konnte.

Methode der Untersuchung.

Die Methode der Untersuchung war folgende. Die Länge des Erregers, d. h. die doppelte Länge der einzelnen Stäbe, war anfangs bedeutend größer als die Länge des Empfängers, die ebenfalls der doppelten Länge der einzelnen Stäbchen entspricht. Der Erreger und der Empfänger wurden parallel in einem gewissen Abstand aufgestellt. Der Kohärer wurde nun auf einen hohen Anfangswiderstand gebracht und der Primärstrom durch den Unterbrecher U für eine bestimmte Zeit — weniger als eine Sekunde — geschlossen, wodurch elektrische Wellen von dem Erreger ausgesandt wurden. Zunächst wurde der Endwiderstand des Kohärrers gemessen. Dieses Verfahren wurde 10mal wiederholt. Der Mittelwert der Messungen des Endwiderstandes lieferte dann ein Maß für den Einfluß der Wellen der betreffenden Wellenlänge auf den Kohärer; die halbe Wellenlänge ist hier gleich der Erregerlänge anzunehmen. Nun wurde die Länge des Erregers nach und nach verkürzt, indem man gleiche Längen von jedem Stab abkniff; für jede Länge wurden zehn Messungen gemacht. Dies wurde fortgesetzt, bis die Erregerlänge bedeutend kürzer als die Empfängerleitung geworden war. Dann stellte ich eine Kurve an, worin die Abszissen Längen des Erregers, und die Ordinaten die Mittelwerte der Endwiderstände für die verschiedenen Erregerlängen darstellen. Wenn nun der Empfänger auf eine bestimmte Wellenlänge anspricht, so sollte diese Kurve für die entsprechende Länge des Erregers ein Minimum des Kohärerwiderstandes zeigen, und je deutlicher dieses Minimum hervortritt, desto größer ist die Ausbildung der Resonanz zwischen Erreger und Empfänger.

Die Einrichtung zur Messung des Widerstandes des Kohärrers und zur Bestimmung der kritischen Spannung ist in Fig. 8

angegeben. Der Kohärer c stand allein auf einer festen Unterlage. Zwei möglichst kurze Drähte, die entweder vertikal oder in der Fortpflanzungsrichtung der elektrischen Wellen verliefen, führten von den Quecksilbernäpfchen des Kohäriers (vgl. p. 755) zu zwei anderen A und D auf einem kleinen Tische. Durch eine Wippe konnten die Näpfchen A und B bez. D und E , wenn nötig, bequem verbunden werden. Die Stromquelle war die Thermosäule T , wovon durch Abzweigung bei X im allgemeinen bloß ein Element gebraucht wurde, um sicher zu sein, daß die Spannung, die an Kohärerenden während der Messung des Widerstandes angelegt wurde, die Gleichgewichtsspannung niemals überschritt. Ein Millivoltmeter G von Keiser

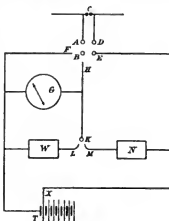


Fig. 8.

& Schmidt mit einem Widerstand von $161 \, \Omega$ diente zur Messung der Spannungen. Die Messung des Kohärerwiderstandes geschah folgenderweise. Der Widerstand N wurde gleich $161 \times 9 = 1449 \, \Omega$ gemacht, und das Drahtende M in das Quecksilbernäpfchen K eingetaucht. Der Ausschlag des Voltmeters gab somit $1/10$ der Spannung e_1 des gebrauchten Elementes. Nun wurde das Drahtende L statt M in K , und das Drahtende H in B eingetaucht, und die Verbindungen zwischen A und B bez. D und E wurden hergestellt. Zunächst änderte man den Widerstand W bis der Ausschlag e_2 , wenn möglich, wenigstens 40 Skt. betrug. Der Widerstand c des Kohäriers ist dann gegeben durch

$$c = w' \frac{e_1 - e_2}{e_2}, \quad \text{wo} \quad w' = \frac{1}{\frac{1}{W} + \frac{1}{161}}.$$

Die Bestimmung der kritischen Spannung erfolgte so. Die Spannung e des Elementes der Thermosäule wurde gerade so wie früher abgelesen, indem man das Drahtende M in K eintauchte. A und B bez. D und E waren schon in Verbindung,

und man tauchte nun das Drahtende F in B für 1 Min., wodurch die ganze Spannung e an die Kohärerenden angelegt wurde. War die Spannung e größer als die kritische Spannung p_c , so merkte man eine plötzliche Verkleinerung des Ausschlages des Voltmeters. Wenn $e < p_c$ war, so schaltete man noch ein Element der Thermoskule durch Änderung von X ein und verfuhr in ähnlicher Weise. Man schaltete nunmehr und mehr Elemente der Thermoskule ein — zugleich war es nötig, den Widerstand N entsprechend zu vergrößern — bis schließlich Kohärerwirkung eintrat, was sich durch die plötzliche Verkleinerung des Ausschlages deutlich bemerkbar machte. Wenn diese Verkleinerung erst einige Zeit nach der Anlegung einer gewissen Spannung erfolgte, so wurde diese Spannung als gleich der kritischen Spannung angenommen. Wenn sie aber gleich beim Eintauchen von F in B erfolgte, so lag die kritische Spannung zwischen der eben angelegten Spannung und der zuletzt angelegten. Diese Methode zur Bestimmung der kritischen Spannung war sehr bequem, und war in der Tat für die Messungen auf p. 772—775 und p. 780 benutzt.

Versuche.

Für kurze Erregerlänge — 12 cm — konnte ich keine Resonanz finden, die Länge wurde daher auf 50 cm vergrößert. Um die Vorteile von Kupfer und von Stahl zugleich zu haben, bestanden die Stäbchen aus 25 cm langem und (fast auf der ganzen Länge) aus 2 mm dickem Kupferdraht, und trugen am Ende kurze Stahlkuppen, die kugelförmig — Radius etwa 1 mm — abgerundet waren und die die Kontaktflächen bildeten. Zuführungsstifte waren wie früher dicht an den Kontaktflächen eingesetzt, wo sie am wenigsten die elektrischen Schwingungen in den Stäbchen stören konnten. Die Aufhängung erfolgte durch Seidenfäden.¹⁾ Der so gebildete Empfänger hatte des Kupfers wegen möglichst wenig Dämpfung. Weil die Kontaktflächen aus Stahl bestanden, konnte man leicht den störenden Einfluß der Ermüdung vermeiden, indem man nach 30—50 Messungen die Kontaktflächen glatt ab-

1) Vgl. die Dissertation hinsichtlich der genaueren Beschreibung.

schmirgelte, eine neue Oxydschicht (von selbst) anlaufen ließ und so den Kohärer wieder in frischen Zustand brachte. Es war gerade diese Schwierigkeit, Oxydschichten von bestimmter Dicke und somit von bestimmter kritischer Spannung leicht herzustellen, die das Kupfer für Kontaktflächen ungünstig machte.

Die Stäbe des Erregers erhielten nun eine Länge von 8 cm. Wenn eine größere Erregerlänge als 16 cm nötig wurde, so befestigte man an diesen kurzen Stäben gleichlange Stäbchen von Kupferdraht von passender Länge mittels feinem blanken Kupferdraht.

Fünf Reihen, jedesmal mit einer anderen Anordnung, wurden nun gemacht, und in jeder tritt Resonanz deutlich hervor. Wie groß die Regelmäßigkeit der Resultate war, zeigt folgendes Beispiel. In der ersten Reihe war der Mittelwert von zehn Messungen des Endwiderstandes bei der Erregerlänge 49,5 cm $2,10 \Omega$. Die einzelnen Werte lagen zwischen $1,35 \Omega$ und $2,69 \Omega$. Vier Tage später, nachdem mehrere Messungen bei anderen Erregerlängen inzwischen gemacht worden waren, wurden wieder 15 Messungen bei der Länge 49,5 cm gemacht. Der Mittelwert war $2,09 \Omega$, der kleinste einzelne Wert $1,61 \Omega$, der größte $2,52 \Omega$.¹⁾

Resultate.

Es folgt eine Beschreibung der Anordnung in jeder der fünf Reihen, und danach eine Tabelle der Resultate der Messungen.

Reihe I.

Empfänger und Erreger geradlinig. Beide Kontaktflächen kugelförmig; Kugelradius ungefähr 1 mm. Empfängerlänge 50 cm.

Reihe II.

Empfänger und Erreger geradlinig. Eine Kontaktfläche kugelförmig wie früher. Die Stahlkuppe des anderen Stäbchens war durch eine Nähnadelspitze ersetzt. Die Nadelspitze war etwas stumpf. Die Nadelspitze und die Kugelfläche bildeten also die Kontaktstelle. Empfängerlänge 50 cm.

1) Ein Beispiel von zehn solchen Messungen ist schon in der ersten Kolonne an p. 780 gegeben worden.

Reihe III.

Anordnung dieselbe wie in Reihe II. Die Nadelspitze war hier ganz fein abgeschliffen.

Reihe IV.

Erreger geradlinig. Empfängerlänge 50 cm. Empfänger kreisförmig. Radius des Kreises ungefähr 8 cm, sodaß die Enden der Empfängerstäbchen, die die Kontaktstelle nicht bildeten, 7 mm voneinander entfernt waren. Ebene des Empfängerkreises horizontal. Der Erreger lag in dieser Ebene. Kontaktstelle dem Erreger zugekehrt. Aufhängung durch Fäden in einer ähnlichen Weise wie früher. Kontaktflächen kugelförmig wie in Reihe I.

Reihe V.

Empfänger kreisförmig, gerade wie in Reihe IV. Kontaktflächen immer noch kugelförmig. Erreger auch kreisförmig. Die Erregerstäbe waren ganz dicht an dem Hartgumminäpfchen abgeschnitten und in ihre Enden waren Löcher von 1 mm Durchmesser gebohrt. In diese Löcher wurden Stücke aus 1 mm dickem Kupferdraht von der gewünschten Länge und Krümmung eingesteckt und durch Reibung gehalten. Wie im Empfänger kamen die freien Enden nicht zusammen, sondern waren 7 mm voneinander entfernt. Sie waren mit Paraffin überdeckt, um das Überspringen von Funken an dieser Stelle zu vermeiden. Die Ebene des Erregers war die des Empfängers. Die Funkenstrecke war dem Kohärer zugekehrt. Versuche ergaben, daß kleine Änderungen in der Entfernung — 7 mm — der freien Enden des Erregers bez. des Empfängers ohne bedeutenden Einfluß waren. Dagegen war es schwer, bei der angegebenen Methode der Änderung der Erregerlänge Änderungen in der Länge der Funkenstrecke zu vermeiden, und dadurch waren Unregelmäßigkeiten der Resultate hineingebracht. Überhaupt waren die Messungen in dieser Reihe nicht so befriedigend wie in den anderen.

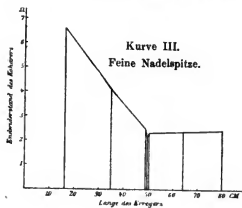
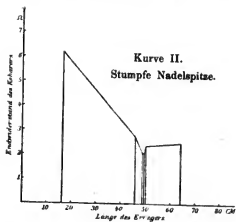
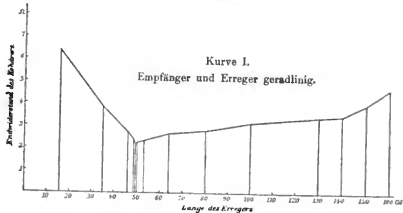
In allen fünf Reihen war der Abstand zwischen Kohärer und Erreger 8 m.

In der ersten Kolumne der Tabelle ist die Länge des Erregers angegeben, in den nächsten fünf Kolumnen folgen

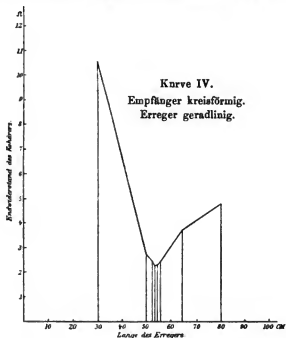
die Mittelwerte der Messungen des Endwiderstandes für die gegebene Länge. Im allgemeinen waren in jedem Falle zehn Messungen gemacht. Wo es anders war, ist die Anzahl der Messungen in Klammern beigefügt. Das Resultat der Bestimmung der kritischen Spannung des betreffenden Kohärers ist am Anfang der Kolonnen gegeben.

	Reihe I	Reihe II	Reihe III	Reihe IV	Reihe V
Kritische Spannung	$0,29 < p_c < 0,35$	$0,34 < p_c < 0,35$	$p_c = 0,40$	$0,38 < p_c < 0,42$	$0,48 < p_c < 0,47$
Länge des Erregers	Mittelwerte des Endwiderstandes. Ohm.				
cm					
160	4,64	—	—	—	—
150	3,94	—	—	—	—
140	3,45	—	—	—	—
130	3,34	—	—	—	—
100	3,10	—	—	—	11,4
83,3	—	—	—	—	10,7
80	2,76 ₍₃₀₎	—	2,40 ₍₁₈₎	4,94	9,2
65	—	—	—	—	7,88 ₍₂₀₎
64	2,66	2,44 ₍₁₇₎	2,32	3,78	—
55	—	—	—	2,41	2,62 ₍₂₀₎
54	—	—	—	2,33	—
53	2,31	—	—	2,30	2,26 ₆
52	—	—	—	2,44	—
51	—	—	—	—	2,20 ₍₂₀₎
50	2,24	2,32	2,26	—	2,17 ₍₂₀₎
49,5	2,09 ₍₂₈₎	1,84 ₍₁₈₎	2,10 ₍₂₀₎	2,76	—
49	2,32	2,13	2,42	—	2,33 ₍₂₀₎
46	2,71	2,73	—	—	—
45	—	—	—	—	4,75 ₍₂₀₎
35	3,82	—	4,09	—	14,9 ₍₂₀₎
30	—	—	—	10,58	—
16	6,24 ₍₈₎	6,16	6,53	—	—

Die Kurven I—V stellen diese Resultate in leicht übersichtlicher Weise dar. Man sieht, daß die Resonanzstelle in Kurven I—III bei 49,5 cm liegt, in Kurve IV bei 53 cm oder



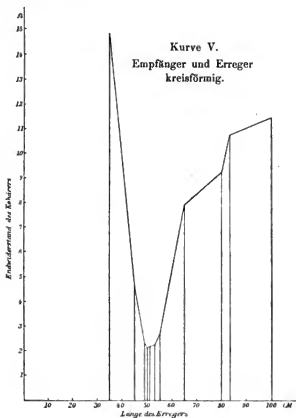
54 cm¹⁾ und in Reihe V bei 50 cm. Die Kurven I—III sind sehr ähnlich. Dagegen ist der Unterschied zwischen diesen Kurven und den Kurven IV und V, die einander gleich sind, sehr auffallend. Die Resonanz war viel ausgeprägter in der Anordnung der Reihen IV und V. Die äußeren Enden der Stäbchen sind in den Fällen IV und V nahe zusammen gebracht. Die Ausstrahlung des Empfängers selbst und dem-



gemäß die Dämpfung seiner Eigenschwingungen sind damit kleiner als bei geradliniger Anordnung (Reihen I, II, III). In der Tat kann man diese kleinere Dämpfung in der ausgeprägteren Resonanz der Reihen IV und besonders V erkennen. Merkwürdig

1) Daß der kreisförmig gebogene Empfänger auf eine langsamere Erregerperiode resoniert, als ein geradliniger Empfänger von gleicher Länge, stimmt sehr gut mit dem in anderer Weise von Drude gefundenem Resultat (P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 609. 1902), daß der kreisförmig gebogene Empfänger eine um $6\frac{1}{2}$ Proz. größere Eigenperiode hat, als ein gleichlanger geradliniger Empfänger.

ist, daß die Endwiderstände in Reihe V nicht größer als in Reihe IV sind, obwohl man zu erwarten hat, daß der kreisförmige Erreger weniger stark als der geradlinige auf den Kohärer wirken werde.



Nebenbei ist zu bemerken, daß ein Vergleich der gefundenen kritischen Spannungen der Kohärer der Reihen I—III zeigt, daß ein Einfluß der Krümmung der Kontaktflächen auf den Wert der kritischen Spannung nicht zu konstatieren ist.

Aus diesen Versuchen ergibt sich, daß die scheinbare Kapazität auch des von mir benutzten Kohärens (selbst bei Anwendung einer Nadelspitze) immer noch eine sehr große ist,

da annähernd der Kohärer einfach als leitende Brücke wirkt (d. h. scheinbare Kapazität unendlich groß), weil die Empfängerlänge im Resonanzfall annähernd mit der Erregerlänge übereinstimmt.

Abschnitt III. Der akustische Effekt.

Wirkung des Schalles.

Zuletzt ist der akustische Effekt zu besprechen, der schon von anderen Beobachtern bemerkt worden ist, und worauf Auerbach ¹⁾ eine Theorie der Kohärerwirkung aufbauen möchte. Dieser Effekt kam mit den Kohärern der Reihe I—III deutlich zum Vorschein, und war größer für die Kohärer mit einer Nadelspitze. Durch scharfe Rufe in dem Zimmer konnte man den Kohärerwiderstand heruntertreiben. Mittels der Stimme wurde also der Widerstand des 2 m entfernten Kohäfers mit kugelförmigen Kontaktflächen einmal auf ungefähr 70 Ω heruntergebracht. In dem Falle des Kohäfers mit stumpfer Nadelspitze wurde der Widerstand auf 8,8 Ω heruntergebracht. In beiden Fällen waren sehr starke Rufe nötig. Die Kohärer mit einer Nadelspitze waren überhaupt so empfindlich gegen Schall, daß ihre Widerstände oft durch Sprechen in dem Zimmer oder durch Geräusche, wie z. B. Hammerschläge, in dem Gebäude vermindert wurden. Diese Wirkung des Schalles ist der Verminderung des Widerstandes durch Erhöhung des Druckes, womit die Kohärerstäbchen gegeneinander drücken, ähnlich. Es war beobachtet, daß einige Töne der Stimme wirksamer waren als andere, und daß im allgemeinen hohe Töne viel eher als tiefe Töne eine Verminderung des Widerstandes verursachten. Die Vermutung war nicht weitliegend, daß ein Oberton der Stimme den longitudinalen Schwingungen der Kohärerstäbchen entsprach, daß dadurch die Stäbchen in Schwingung versetzt wurden, und daß die Kohärerenden näher zusammengedrängt wurden. Eine Spitze konnte die Oxydschicht leichter durchdringen, und die Kohärer mit Nadelspitze waren deshalb empfindlicher gegen Schall. Daß eine solche mechanische Wirkung immer im Sinne einer Verminderung des Widerstandes

1) F. Auerbach, Wied. Ann. **64.** p. 611. 1898.

allein wirken sollte, wird nach der folgenden Tatsache nicht merkwürdig erscheinen. Es war nämlich bei der Einstellung des Kohärers auf den gewünschten Wert des Anfangswiderstandes (vgl. p. 779) gefunden, daß durch Klopfen an das Holzbrett der Kohärerwiderstand größer, und durch Klopfen an die Glasröhre oder noch besser an die Schraubenzwingen, die die Glasröhre fest hielten, kleiner gemacht werden konnte. Der Widerstand konnte in dieser Weise ebensoweit herunter wie durch Schall gebracht werden. Man konnte in dieser Weise den Kohärerwiderstand, wenn der Kohärer frisch war, annähernd auf einen beliebigen Wert zwischen 50Ω und $25\,000 \Omega$ einstellen. Die gebrauchten Werte des Anfangswiderstandes in den Reihen I—V lagen zwischen 850Ω und $25\,000 \Omega$ (in Reihe I allein über 8000Ω), und wurden in dieser Weise bekommen. Die Leichtigkeit dieser Einstellung, wie schon hervorgehoben worden ist, erlaubte ein Urteil über den Zustand des Kohärers.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Vor dem Eintritt der Kohärerwirkung besteht der Widerstand eines Kohärers in dem Widerstand einer zwischen den Kohärerenden liegenden, schlecht leitenden und unvollkommen elastischen Zwischenschicht, die zeitliche Nachwirkung zeigt. Die Zwischenschicht besteht gewöhnlich aus einer die Kontaktflächen bedeckenden Oxydschicht.

2. Legt man eine Potentialdifferenz, die kleiner als die kritische Spannung ist, an die Kohärerenden an, so findet eine elektrostatische Anziehung zwischen den Kohärerenden statt. Hierdurch wird die Dicke der Oxydschicht und damit der Kohärerwiderstand verkleinert. Wird die Potentialdifferenz weggenommen, so dehnt sich die Oxydschicht wegen ihrer Elastizität wieder aus, und der Kohärerwiderstand kehrt fast zu seinem ursprünglichen Wert zurück. In diesem Gebiete besteht eine lineare Beziehung zwischen der angelegten Spannung und dem Kohärerwiderstand.

3. Ist die angelegte Potentialdifferenz größer als eine gewisse Spannung, die *kritische Spannung*, so erfolgt Kohärerwirkung, d. h. eine mechanische Beanspruchung der Zwischen-

schicht tritt ein, der gegenüber sie nicht mehr genügende mechanische Festigkeit besitzt, und die inneren metallisch-leitenden Kohärerteile werden in Berührung gebracht. Der Kohärerwiderstand fällt daher auf einen kleinen Wert, den er dauernd behält. *Die Größe der kritischen Spannung hängt ab vom Druck der Kontaktstellen aufeinander, von der Natur und von der Dicke der Zwischenschicht.* Beim Eisen z. B., mit Oxydschicht an der Kontaktstelle, variierte die kritische Spannung zwischen 0,25 Volt und etwa 1 Volt.

4. Bei Versuchen mit einem Gleichstrom e fällt der Kohärerwiderstand beim Eintreten der Kohärerwirkung auf einen solchen Wert, daß die Spannung an den Kohärerenden sich auf einen ganz bestimmten Wert, *die Gleichgewichtsspannung*, einstellt. Dieser Prozeß wird erst nach einiger Zeit vollendet. Die Anlegung einer größeren Spannung bewirkt ein weiteres Sinken des Kohärerwiderstandes, sodaß die Gleichgewichtsspannung sich wieder einstellt. *Die Gleichgewichtsspannung hat für jedes Metall einen charakteristischen konstanten Wert.*

5. Besteht der Kohärer aus mehreren hintereinander liegenden Kontaktstellen, so ist die entsprechende Gleichgewichtsspannung der Zahl derselben proportional, die kritische Spannung dagegen nicht.

6. Einfallende elektrische Wellen verursachen eine Kohärerwirkung, die in ihrer Natur der durch einen Gleichstrom hervorgerufenen Wirkung vollkommen gleich ist.

7. Durch wiederholte Beanspruchung des Kohärens auf Kohärerereffekt mittels elektrischer Wellen wird der Kohärer ermüdet, d. h. der Kohärer reagiert weder so regelmäßig noch so stark wie am Anfang. Diese Ermüdung liegt vermutlich in einer Verstärkung der die Kontaktflächen bedeckenden Oxydschicht.

8. Eine Empfängerleitung, die einen Kohärer enthält, hat eine bestimmte Eigenschwingung. Der Kohärer wirkt dabei als Leiter, oder als sehr große Kapazität, selbst wenn er nur eine sehr kleine Kontaktfläche (Nadelspitze-Kugelkalotte) hat. Es ist danach möglich, Erreger- und Empfängerleitung in Resonanz zu bringen. *Die Resonanz wird um so schärfer, je kleiner die Dämpfung der Eigenschwingungen des Empfängers und des Erregers ist.*

9. Kohärerwirkung kann auch durch Schall und auf mechanischem Wege hervorgerufen werden, nicht aber in so starkem Maße wie auf elektrischem Wege.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Drude, für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützung im Verlaufe derselben meinen herzlichen Dank auszusprechen.

(Eingegangen 6. April 1903.)

**5. Über Volumenänderung
von Gasen durch dielektrische Polarisierung;
von Richard Gans.**

(Habilitationsschrift.)

I. Einleitung und Geschichtliches.

Die Frage, ob Gase die Erscheinung der Elektrostriktion zeigen, d. h. ob dieselben ihren Druck bez. ihr Volumen ändern, wenn sie in ein elektrisches Feld gebracht werden, ist schon Gegenstand experimenteller wie theoretischer Untersuchungen gewesen.

Zuerst griff Hr. Quincke¹⁾ das Problem experimentell an; er kam zu dem Resultate, daß, „wenn eine elektrische Volumenänderung bei Luft vorhanden ist, sie weniger als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-9}$ des ursprünglichen Luftvolumens betragen müsse“. Bei Kohlensäure beobachtete Hr. Quincke eine relative Volumenverkleinerung im Betrage von $5 \cdot 10^{-10}$ für eine Potentialdifferenz von ca. 73 elektrostatischen Einheiten, „doch legt er bei der geringen Größe der Volumenänderung und der Schwierigkeit, zufällige Fehler auszuschließen, auf das Resultat dieser einen Versuchsreihe kein zu großes Gewicht“.

Theoretisch wurde der Fall von Hrn. Lippmann²⁾ behandelt. Dieser fand auf Grund des Energieprinzips und des von ihm formulierten Prinzips von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge, daß in einem gleichförmigen Felde von der Feldstärke E und der Dielektrizitätskonstante ϵ beim Drucke p die relative Volumenänderung

$$\frac{\Delta v}{v} = - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \frac{E^2}{p}$$

ist, ein Ergebnis, das, wie wir sehen werden, richtig ist.

Gegen diese Ableitung wendet sich Hr. Bos³⁾; er erklärt dieselbe für falsch und konstruiert einen Kreisprozeß, aus dem sich ergibt, daß das Volumen eines Gases von der elektrischen Feldstärke unabhängig ist. Ebenfalls zeigt Hr. Drude⁴⁾, daß

1) G. Quincke, Wied. Ann. 10. p. 513. 1880.

2) G. Lippmann, Ann. de chimie et phys. (5) 24. p. 145. 1881.

3) D. Bos, Groninger Inaugural-Dissertation 1888.

4) P. Drude, Physik des Äthers p. 301. Stuttgart 1894.

auf Grund der thermodynamischen Hauptsätze und der Maxwellschen Theorie bei Gasen keine Elektrostriktion auftreten kann; er hält das Lippmannsche Resultat für fehlerhaft, ohne den Fehler selbst anzugeben. Tatsächlich haben nun Hr. Bos und Hr. Drude bei den von ihnen konstruierten Kreisprozessen nicht alle Energieumsetzungen berücksichtigt, wodurch ihr Endresultat von dem meinigen abweicht; auf diesen Punkt werden wir später zurückkommen.

Hr. Pockels¹⁾ behandelt in einer sehr ausführlichen theoretischen Arbeit über Elektrostriktion auch den Fall der Gase und kommt durch Ableitung der Druckspannungen nach der Maxwellschen Theorie zu demselben Resultat, welches Lippmann durch direkte Behandlung des Problems mit Hilfe des Energieprinzips gewonnen hat, nämlich, daß die Druckänderung

$$\Delta p = - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2$$

beträgt.

Wir sehen also, daß die theoretischen Ableitungen nicht miteinander übereinstimmen, und daß nur eine einzige experimentelle Versuchsreihe vorliegt, auf die ihr Autor selbst keinen allzugroßen Wert legt.

Bei dieser Lage der Dinge scheint es angebracht, das Problem noch einmal aufzunehmen und die Fragen zu stellen, ob nach der Maxwellschen Theorie eine Volumenänderung der Gase durch dielektrische Polarisierung stattfindet, und ob die Versuche mit der Theorie übereinstimmen.

II. Theoretischer Teil.

Um die Kräfte im elektrostatischen Felde zu berechnen, wollen wir versuchen, die Abnahme der elektrischen Energie W bei einer unendlich kleinen virtuellen Verschiebung δs in der Form darzustellen

$$-dW = \int f \cdot \delta s \cdot d\tau \quad ^2)$$

1) F. Pockels, Grunerts Archiv (2) 12. p. 57. 1894.

2) Wir werden hier und im folgenden uns der Schreibweise der Vektoranalysis bedienen, über die Näheres z. B. in H. Weber, Partielle Differentialgleichungen 1. p. 207. ff. zu finden ist.

Dann müssen wir f als die auf die Volumeneinheit wirkende Kraft ansprechen, wenn $d\tau$ das Volumenelement des Feldes ist.

Wir setzen das Feld als vollständiges voraus, d. h. an der Oberfläche des betrachteten Raumes soll die Feldintensität Null sein.¹⁾

Bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung wird sich im allgemeinen in einem bestimmten Volumenelement $d\tau$ sowohl die Dielektrizitätskonstante ϵ ändern, als auch die in demselben vorhandene unendlich kleine Elektrizitätsmenge de .

Die Gesamtänderung dW der elektrischen Energie wird sich also darstellen lassen als die Summe der Änderung bei konstanter Dielektrizitätskonstante dW_ϵ und der Änderung bei konstanter Elektrizitätsverteilung dW_e .

Wir betrachten zuerst die Änderung der elektrischen Energie dW_ϵ bei konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ .

Ist die Elektrizitätsverteilung e und die Potentialverteilung φ im Felde vorhanden, so ist die Energie

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi e;$$

ist eine andere Elektrizitätsverteilung e' und die dazu gehörige Potentialverteilung φ' vorhanden, so ist die Energie

$$W' = \frac{1}{2} \sum \varphi' e'.$$

Also ist

$$W' - W = \frac{1}{2} \sum (\varphi' e' - \varphi e) = \frac{1}{2} \sum (\varphi + \varphi') (e' - e),$$

denn bei unveränderter Dielektrizitätskonstante ist ²⁾

$$\sum e \varphi' = \sum e' \varphi$$

und folglich

$$dW_\epsilon = \sum \varphi \cdot \partial e = \int \varphi \cdot \partial \rho \cdot d\tau,$$

wo ρ die räumliche Dichte der Elektrizität bedeutet.

Wir kommen zur Berechnung der Energieänderung bei konstanter Elektrizitätsmenge, wir setzen also voraus

$$\rho = \rho',$$

d. h.

$$\operatorname{div} \epsilon \mathfrak{E} = \operatorname{div} \epsilon' \mathfrak{E}.$$

1) Wegen der Art der Ableitung vgl. man E. Cohn, Das elektromagn. Feld p. 83. Leipzig 1900.

2) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 55

Nun ist

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \varrho \, d\tau = \frac{1}{2} \int \varphi \varphi' \, d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \epsilon' \mathcal{E}' \, d\tau,$$

$$W' = \frac{1}{2} \int \varphi' \varphi' \, d\tau = \frac{1}{2} \int \varphi' \varrho \, d\tau = \frac{1}{8\pi} \int \varphi' \operatorname{div} \epsilon \mathcal{E} \, d\tau.$$

Durch partielle Integration erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß das Feld als vollständiges vorausgesetzt wird,

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon' \mathcal{E}' \mathcal{E}' \, d\tau,$$

$$W' = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon \mathcal{E} \mathcal{E}' \, d\tau,$$

also

$$W' - W = - \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon' - \epsilon) \mathcal{E}' \mathcal{E}' \, d\tau$$

und

$$dW_\epsilon = - \frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 \cdot \partial \epsilon \cdot d\tau.$$

Die Gesamtänderung wird also

$$dW = \int \varphi \cdot \partial \varrho \cdot d\tau - \frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 \cdot \partial \epsilon \cdot d\tau.$$

Nun können wir aber annehmen, daß bei der Verschiebung die Elektrizitätsmengen auch auf den Leitern fest an der Materie haften¹⁾, also wird

$$\partial \varrho = - \operatorname{div} (\varrho \cdot \delta s).$$

Die Änderung der Dielektrizitätskonstante $\partial \epsilon$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen, erstens aus dem Anteil wegen der Verschiebung der Materie

$$\operatorname{grad} \epsilon \cdot \delta s,$$

zweitens hänge die Dielektrizitätskonstante von der relativen Volumenänderung $\Delta v/v$ ab, und es sei

$$\Delta \epsilon = - \alpha \frac{\Delta v}{v},$$

also kommt noch das Glied

$$- \alpha \operatorname{div} \delta s$$

hinzu, sodaß wir haben

$$\partial \epsilon = \operatorname{grad} \epsilon \cdot \delta s - \alpha \operatorname{div} \delta s.$$

1) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 59.

Setzen wir diese Ausdrücke für $\partial \varrho$ und $\partial \varepsilon$ in den Wert von dW ein, so erhalten wir

$$dW = - \int \varrho \operatorname{div} (\varrho \delta s) d\tau - \frac{1}{8\pi} \int \mathbb{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \delta s d\tau \\ + \frac{1}{8\pi} \int \mathbb{E}^2 \alpha \operatorname{div} \delta s d\tau.$$

Durch partielle Integration, angewandt auf den ersten und letzten Term, ergibt sich

$$-dW = \int \varrho \mathbb{E} \delta s d\tau + \frac{1}{8\pi} \int \mathbb{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \delta s d\tau \\ - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} (\alpha \mathbb{E}^2) \delta s \cdot d\tau.^1)$$

Es ist also die Kraft auf die Volumeneinheit

$$f = \varrho \mathbb{E} + \frac{1}{8\pi} \mathbb{E}^2 \cdot \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} (\alpha \mathbb{E}^2)$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$f_x = \varrho E_x - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \alpha E^2,$$

$$f_y = \varrho E_y - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \alpha E^2,$$

$$f_z = \varrho E_z - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \alpha E^2.$$

Im homogenen, nichtgeladenen Dielektrikum ist

$$\varrho = 0$$

und

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0,$$

also

$$f_x = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \alpha E^2,$$

$$f_y = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \alpha E^2,$$

$$f_z = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \alpha E^2,$$

d. h. im Felde besteht ein Druck

$$p = p_0 - \frac{1}{8\pi} \alpha E^2,$$

wenn p_0 der Gasdruck außerhalb des Feldes ist.

1) Man vergleiche auch die Abhandlungen J. D. Korteweg, Wied. Ann. 9. p. 48. 1880; H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 885. 1881.

Zur Bestimmung von α benutzen wir Beobachtungen von Hrn. Boltzmann¹⁾ und Hrn. Klemenčič²⁾, nach welchen bei Gasen $\epsilon - 1$ sich proportional dem Druck ändert, was übrigens auch aus der Lorentz-Lorenzschen Gleichung folgt, die ausagt, daß $\epsilon - 1/\epsilon + 2$ dem Druck proportional ist. Da aber ϵ sehr wenig von 1 abweicht, können wir $\epsilon + 2$ konstant setzen.

Es ist also:

$$\epsilon - 1 = Cp,$$

d. h.

$$\frac{d(\epsilon - 1)}{\epsilon - 1} = \frac{dp}{p}.$$

Nach unserer obigen Definition ist aber

$$\Delta \epsilon = \Delta(\epsilon - 1) = \alpha \frac{dp}{p},$$

also ist

$$\alpha = \epsilon - 1,$$

und es ergibt sich

$$p = p_0 - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von Hrn. Lippmann.

Um die Abweichung des Drudeschen Resultates genau übersehen zu können, wollen wir die Formel aus einem Kreisprozeß ableiten, den bereits Hr. Drude³⁾ benutzt hat.

Das Gas vom Volumen v werde von einem Orte mit der Feldstärke E zu einem Orte mit der Feldstärke $E + dE$ gebracht, und zwar unter konstantem Volumen; dabei gewinnen wir die Arbeit⁴⁾

$$\frac{\epsilon - 1}{8\pi} v dE^2.$$

Sodann dehne man das Gas bei konstanter Feldstärke $E + dE$ um dv aus, dabei leistet der Gasdruck die Arbeit

$$(p + dp)dv,$$

da wir annehmen wollen, daß im Felde $E + dE$ der Druck $p + dp$ herrscht.

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) 69. p. 795. 1874.

2) I. Klemenčič, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) 91. p. 712. 1885.

3) P. Drude, Physik des Äthers p. 301. Stuttgart 1894.

4) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 104 oder P. Drude, l. c. p. 294.

Der elektrische Druck an der Oberfläche des Gases leistet die Arbeit¹⁾

$$\frac{\epsilon - 1}{8\pi} (E^2 + dE^2) dv.$$

Jetzt werde das Gas bei konstantem Volumen $v + dv$ an den ursprünglichen Ort mit der Feldstärke E zurückgeschafft; dabei müssen wir die Arbeit leisten

$$\left[\frac{\epsilon - 1}{8\pi} v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\epsilon - 1}{8\pi} v \right) dv \right] dE^2.$$

Beim Komprimieren auf das ursprüngliche Volumen leisten wir schließlich die Arbeit:

$$p dv + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 dv.$$

Also ist

$$\begin{aligned} p dv + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 dv + \left[\frac{\epsilon - 1}{8\pi} v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\epsilon - 1}{8\pi} v \right) dv \right] dE^2 \\ = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} dE^2 \cdot v + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} (E^2 + dE^2) dv + (p + dp) dv. \end{aligned}$$

Die Glieder erster Ordnung heben sich fort; ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial v} (\epsilon - 1) v = 0,$$

da nach Boltzmann und Klemenčič die Größe $\epsilon - 1$ sich dem Druck proportional ändert, also bleibt übrig

$$\frac{\epsilon - 1}{8\pi} dE^2 dv + dp dv = 0,$$

d. h.

$$p = p_0 - \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2,$$

also dasselbe Resultat, welches wir auf dem ersten Wege gefunden haben. Hr. Drude berücksichtigt nicht den elektrischen Druck an der Grenzfläche des Gases gegen das Vakuum.

Um dies Resultat auf eine bestimmte Versuchsanordnung anzuwenden, wollen wir einen Kugelkondensator annehmen, dessen äußere Kugelschale vom Radius r_2 auf das Potential φ_2 geladen sei, während die innere Kugelschale vom Radius r_1 das Potential φ_1 besitze.

1) Vgl. z. B. E. Cohn, l. c. p. 93.

Dann ist die elektrische Feldintensität

$$E = \frac{q_1 - q_2}{r_2 - r_1} \frac{r_1 r_2}{r^2}.$$

Da diese im Kondensatorhohlraum mit dem Radius variiert, so müssen wir die Volumenänderung einer unendlich kleinen Kugelschale vom Radius r und der Dicke dr berechnen und durch Integration die Gesamtänderung bestimmen.

Die unendlich kleine Volumenänderung ist

$$\frac{\Delta dv}{dv} = - \frac{\epsilon - 1}{8 \pi p} \left(\frac{q_1 - q_2}{r_2 - r_1} \right)^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^4},$$

wo p den Gasdruck bedeutet, also

$$\Delta dv = - \frac{\epsilon - 1}{2 p} \left(\frac{q_1 - q_2}{r_2 - r_1} \right)^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} dr$$

und durch Integration zwischen den Grenzen r_1 und r_2

$$\Delta v = - \frac{\epsilon - 1}{2 p} \frac{(q_1 - q_2)^2}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

III. Experimenteller Teil.

„Die theoretisch berechnete Volumenänderung ist nun viel größer, als Hr. Quincke bei Kohlensäure gefunden hat und fällt sicher innerhalb der Grenze, die Hr. Quincke für die Wahrnehmbarkeit der Volumenänderung angibt.“¹⁾

Unter diesen Umständen schien es angebracht, die Quinckeschen Experimente zu wiederholen und festzustellen, ob entgegen der Maxwellschen Theorie die Kontraktion durch dielektrische Polarisation nicht vorhanden ist, oder die Gründe aufzufinden, aus welchen der Effekt Hrn. Quincke verborgen geblieben ist, zumal da ich glaubte, in einigen Punkten die Versuchsanordnung noch verbessern zu können, wozu hauptsächlich beitrug, daß ich im Besitze der Formel war, die mir gestattete, die Bedingungen so zu wählen, daß der zu erwartende Effekt möglichst groß würde.

Im wesentlichen behielt ich die Quinckesche Versuchsanordnung²⁾ bei, da dieselbe viele Vorteile gegenüber anderen möglichen Anordnungen aufwies.

1) Vgl. D. Bos, l. c. p. 92.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 10. p. 513. 1880.

Der Apparat, den der Tübinger Institutsmechaniker G. Schurr angefertigt hat, war folgendermaßen konstruiert (vgl. Fig. 1).

Aus Kupferblech von 0,9 mm Dicke war eine Kugel von 15 cm Durchmesser hergestellt; diese war konzentrisch umgeben von einer ebenso dicken Kugelschale von 20 cm Durchmesser, welche von zwei Halbkugeln gebildet wurde wie bei den Magdeburger Halbkugeln. Die Ränder der Halbkugeln waren nach außen umgebogen und durch darangelötete Messingringe verstärkt. Die umgebogenen Ränder wurden aufeinander geschliffen, sodaß sie mit etwas Fett vollkommen dicht hielten.

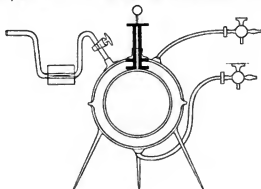


Fig. 1.

Die innere Kugel hing an einem 5,7 mm dicken Messingdraht von 10 cm Länge, auf den oben eine polierte Messingkugel von 3 cm Durchmesser aufgesetzt war; dieser Draht durchsetzte die Kuppe der oberen Halbkugel, in welche ein Loch von 11 mm Durchmesser gebohrt war. Von außen war eine Messinghülse von demselben Durchmesser um das Loch herumgelötet, ihre Länge betrug 2,6 cm. In diese konnte ein Hartgummirohr von 8,3 cm Länge mit Schellack eingekittet werden. Das Rohr reichte bis auf die innere Kugel, sodaß der durch dasselbe hindurchgeführte und mit Schellack eingekittete Draht der inneren Kugel von der äußeren Kugel vollständig isoliert war.

In die obere Halbkugel war ferner ein Loch von 1 mm Durchmesser gebohrt; außen war um das Loch herum eine Messinghülse von 8 mm Durchmesser aufgelötet. In diese konnte das Manometer eingekittet werden, welches unten be-

schrieben werden wird. Außerdem waren diametral einander gegenüber in die obere und die untere Halbkugel 8 mm weite Löcher gebohrt, an die von außen Messingrohre eingesetzt waren, die in Gashähne endigten. Dieselben dienten dazu, Gase in den Kondensator hineinzuleiten.

Das Manometer. Mit dem Hohlraum verbunden war ein Glasapparat, wie ihn Fig. 2 darstellt.

BC ist ein weiteres Glasrohr mit einem Glashahn *H*, an dieses ist eine U-förmig gebogene Kapillare mit dicker Wand *BEA* angeschmolzen, bei *A* ist wieder ein weiteres Glasrohr *AD* angesetzt. Der Querschnitt der Kapillaren wurde durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt, er betrug $0,341 \text{ mm}^2$.

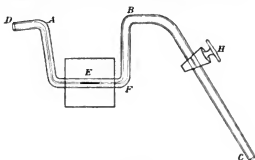


Fig. 2.

Um eine gute Beweglichkeit zu gewährleisten, war die Kapillare mit heißer konzentrierter Schwefelsäure, der ein paar Tropfen Salpetersäure zugesetzt waren, gründlich ausgespült, sodann wurde mit destilliertem Wasser nachgespült und getrocknet.

Dann wurde ein Tropfen Toluol in die Kapillare gebracht, dessen Länge zwischen 3 und 10 mm differierte. Vor der eigentlichen Messung wurde dieser Tropfen ein paarmal durch die Kapillare getrieben, damit gute Benetzung stattfand.

Die Verschiebung des Tropfens wurde mit einem Horizontalmikroskop mit Okularmikrometer beobachtet; 1 Skt. des Okularmikrometers betrug $0,0132 \text{ mm}$.

Damit die Tropfenkuppe deutlich durch das Mikroskop beobachtet werden konnte und die zylindrische Wölbung der dicken Kapillare die optische Abbildung nicht störte, wurde

bei *E* (Fig. 2) eine planparallele Glasplatte mit Kanadabalsam angekittet, wodurch das Bild tadellos scharf erschien. Um die Kapillare bei *E* horizontal stellen zu können, stand der ganze Kondensator auf einem Tischchen mit drei Stellschrauben.

Dichtung. Wie schon erwähnt, wurden die beiden Halbkugeln mit etwas Fett aufeinandergesetzt, wodurch dort vollkommene Dichtung erreicht wurde, und zwar wurde nach Hrn. Röntgen ein Gemisch von Wachs und Vaseline genommen, welches den Vorteil hat, wenig Dämpfe abzugeben.¹⁾

Um sicher zu sein, daß die verschiedenen Lötstellen dicht waren, wurden dieselben mit Kopallack bestrichen und dann der Kondensator teilweise evakuiert; wären undichte Stellen vorhanden gewesen, so wäre der dickflüssige Lack dort hineingesogen worden und hätte beim Festwerden die Poren verstopft.

Um die beiden Halbkugeln starr miteinander zu verbinden, wurden ihre umgebogenen Ränder mit drei kleinen Messingschraubzwingen zusammengehalten.

Elektrische Ausstrahlung und Isolation. Damit im Innern des geladenen Kondensators keine elektrische Ausstrahlung stattfände, wodurch Temperaturerhöhungen erfolgt wären, wurde das Metall innen poliert und die Kanten der Löcher sorgfältig abgerundet. Nach verschiedenen Versuchen habe ich es so weit gebracht, daß keine Spur von Ausstrahlung stattfand, die man durch die Bewegung des Manometertropfens sofort konstatieren konnte.

Um die äußere Kugel von dem Messingdraht an der inneren Kugel zu isolieren, wurde nach Quinckes Vorgang ein gutisolierendes Glasrohr auf beiden Seiten mit geschmolzenem Schellack überzogen und in die Hülse an der Kuppe des Apparates eingekittet, doch fand im Innern immer Ausstrahlung statt, und die Isolation war nicht befriedigend, sodaß ein Funke immer an der Oberfläche dieser Glasröhre im Innern übersprang, und zwar, wie bei Quincke, bereits bei einer Potentialdifferenz von 70 bis 80 elektrostatischen Einheiten.

Da das Quadrat der Feldstärke in die oben abgeleitete Formel eingeht, lag es mir daran, die Potentialdifferenz möglichst zu vergrößern.

1) Vgl. F. Kohlrausch, *Praktische Physik* 8. Aufl. p. 84. 1896.

Mit einem gut polierten Hartgummirohr kam ich schon etwas weiter (bis ca. 90 C.G.S.). Dann ließ ich mir in das Hartgummirohr unten ein Gewinde schneiden, auf welches kreisförmige Hartgummiplatten von 2,4 mm Dicke und 7 cm Durchmesser so aufgeschraubt wurden, daß die eine unmittelbar über der inneren Kugel am Drahtansatz saß, während die andere ganz oben die äußere Kugel fast berührte. Jetzt hatte ich schon 12 mm Schlagweite erreicht, die auf ca. 18 mm stieg, als ich das Gewinde des Hartgummirohres und die Hartgummiplatten erwärmte und warm zusammenschraubte, sodaß die einzelnen Teile zusammenfließen konnten.

Sehr wichtig für gute Isolation war auch, daß die Luft oder Kohlensäure im Kondensator mit konzentrierter Schwefelsäure und Chlorcalcium vollständig getrocknet war.

Beweglichkeit des Tropfens. Waren die Hähne des Kondensators geschlossen und der Tropfen gut beweglich, so war er gegen Luftdruckänderungen sehr empfindlich, auch wenn der in Watte eingepackte und in einer Holzkiste verborgene Kondensator gegen Temperaturdifferenzen gut geschützt war.

Der Tropfen bewegte sich fortwährend in der Kapillare hin und her, und zwar um viel mehr, als die Verschiebung durch die zu suchende Druckänderung nach der Formel betragen konnte.

Wie schon Hr. Quincke feststellte, kam das hauptsächlich von der variablen Windstärke vor dem Fenster, in dessen Nähe der Apparat stand. Die Beweglichkeit war so groß, daß man es deutlich an der Verschiebung des Tropfens merken konnte, wenn im selben Stockwerk eine Tür auf- oder zugeschlagen wurde.

Hr. Quincke machte sich frei von diesen Schwankungen, indem er das horizontale Manometerrohr so weit neigte, bis durch den hydrostatischen Druck der Flüssigkeit die Wirkung unmerklich war. Das konnte ich nicht tun, da wegen der Größe der unbeabsichtigten Bewegungen der ganze Effekt mit verborgen worden wäre.

Unempfindlicher dürfte ich die Methode nicht machen, sondern ich mußte die schädlichen Druckänderungen in der Atmosphäre selbst eliminieren. Dies geschah dadurch, daß an die offene Seite des Manometers ein geschlossenes Gefäß angesetzt wurde.

Dadurch wird allerdings die Methode ein wenig unempfindlicher, denn durch die Druckänderung im Schutzgefäße wird die Verschiebung verkleinert. Bezeichnen wir das Volumen des Kondensators mit v_1 , das des Schutzgefäßes mit v_2 , so wird durch die Druckzunahme im demselben bei gegebener einseitiger Druckänderung die Tropfenverschiebung im Verhältnis $v_2/v_1 + v_2$ verkleinert, damit dies möglichst wenig ausmacht, muß v_2 so groß wie möglich sein.

Ich wählte einen Glasballon von 36,6 Liter Inhalt, während der Kondensator 2,42 Liter enthielt. Dadurch wurde die Verschiebung nur im Verhältnis 0,938 verkleinert.

Dieser mit trockener Luft gefüllte Ballon blieb in dem Korb, in dem sich die Säureballons beim Transport befinden, und der herausragende Teil wurde in Watte gefüllt. Durch einen Hahn konnte er mit der Atmosphäre in Verbindung gesetzt werden.

Da die Temperatur im Kondensator und im Schutzballon nicht dieselbe war, so trat der Tropfen häufig teilweise in den senkrechten Teil der Kapillare, bis durch den hydrostatischen Druck Gleichgewicht eingetreten war; dort verlor er dann aber an Beweglichkeit. Deshalb wurde an einem geeigneten Orte im Zimmer ein Argandbrenner aufgestellt und durch Regulierung der Flammenhöhe und der Entfernung von den Versuchsapparaten ein solches Temperaturgefälle erzeugt, daß das ursprünglich vorhandene gerade kompensiert wurde.

Manchmal dauerte es Stunden lang bis dies eintrat, aber es war immer zu bewerkstelligen, daß wenigstens für einige Minuten der Tropfen im horizontalen Teile der Kapillaren (bei E in Fig. 2) sich in Ruhe befand,; dann mußten die Messungen schnell vorgenommen werden.

Messung der elektrischen Druckänderung. Fig. 3 gibt schematisch die Versuchsanordnung. A ist der Argandbrenner, S der Schutzballon, C der Kondensator mit dem Manometer M , St ein Stanniolschirm, der den Tropfen vor direkten Einwirkungen der Influenzmaschine und der geladenen Teile schützen sollte, Mi das Mikroskop zur Beobachtung der Tropfenverschiebung, J die Influenzmaschine, von deren einem Pole aus ein 8 mm dicker Draht D ausgeht, der in eine Kugel K_1 endet, die die Kugel K_2 vollkommen berührt. Der andere

Pol der Maschine sowie die äußere Kugel des Kondensators sind geerdet (Gasleitung). Drehte man die Maschine, so wuchs die Potentialdifferenz, bis dieselbe sich durch einen Funken wieder ausglich. Der Tropfen mußte also langsam sich in der einen Richtung bewegen, entsprechend einer Volumenabnahme und plötzlich wieder in entgegengesetzter Richtung sich ver-

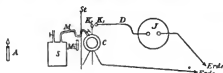


Fig. 3.

schieben. Die Maschine wurde langsam gedreht, sodaß das Potential erst allmählich anwuchs, und nach der Entladung wurde die Funkenstrecke durch einen Auslader überbrückt, damit die Garantie vorhanden war, daß kein elektrisches Feld mehr existierte.

Die Potentialdifferenz wurde aus der Funkenlänge nach den von Hrn. Paschen und von Hrn. Heydweiller¹⁾ gefundenen Werten durch Interpolation berechnet.

1. *Beobachtungsreihen.* Um noch einmal zusammenzustellen, ist:

$$\Delta V = - \frac{\varepsilon - 1}{2p} \frac{(q_1 - q_2)^2}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

Für Luft ist

$$\varepsilon - 1 = 59 \cdot 10^{-5}.$$

Bei Atmosphärendruck ist $p = 10^6$.

$r_1 = 7,5$ cm, der Kapillarenquerschnitt $0,341$ mm²,

$r_2 = 10$ cm, die Mikroskopvergrößerung $0,0132 \frac{\text{mm}}{\text{Skt.}}$,

$$\frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0,938.$$

Also ist die für 100 elektrostatische Einheiten theoretisch berechnete Verschiebung $18,4$ Skt.

1) Man vgl. die Zusammenstellung bei A. Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 213. 1893.

Die Beobachtung ergab in zwei Fällen:

Pot.-Diff. [C.G.S.]	Theor. Verschiebung in Skt.	Beob. Verschiebung in Skt.	Beob. Verschiebung Mittel
115	24	1,0—1,5	1,25
119	26	0,9—1,2	1,05

Wie man sieht, stimmt die beobachtete Verschiebung auch nicht annähernd mit der berechneten überein. Es lag nahe, zu vermuten, daß das Manometer die Druckänderung infolge der Reibung nicht richtig anzeigt.

Der Druckapparat. Um dies zu prüfen, konstruierte ich mir eine Vorrichtung, mit der ich willkürlich im Kondensator eine Druckänderung hervorrufen konnte, die der berechneten an Größe gleich war. Diesen Apparat will ich der Kürze wegen im folgenden einfach als Druckapparat bezeichnen.

Zu dem Zweck verband ich ein Glasrohr, welches in der Mitte aus einer dickwandigen Kapillaren bestand, während die Enden aus weiten Röhren hergestellt waren, an dem oberen Ende durch einen Gummischlauch mit dem einen Hahn des Kondensators, während das untere Ende durch einen Gummischlauch mit einem weiten Glasrohr verbunden war. Dieses weitere Glasrohr war mit Hilfe einer Mikrometerschraube auf- oder abwärts zu bewegen.

Füllte man das weitere Rohr mit Quecksilber, bis die Quecksilberkuppe in der Kapillaren stand, so konnte man nach dem Prinzip des Jollyschen Luftthermometers durch Verschieben des weiteren Schenkels den Stand in der Kapillaren variieren.

Der Querschnitt der Kapillaren betrug $0,449 \text{ mm}^2$.

Es war aber nicht möglich, den Stand in der Kapillaren, der mit einem zweiten Mikroskop beobachtet wurde, willkürlich zu verändern oder konstant zu halten. Wahrscheinlich traten bei der kleinsten Bewegung der Quecksilberkuppe elektrische Ladungen auf, die die Oberflächenspannung veränderten. Erst als ich das Quecksilber nur im weiten Teile des Glasrohres hatte und darauf ein wenig Toluol goß, das in die Kapillare hineinreichte, erhielt ich brauchbare Verhältnisse.

Die Mikroskopvergrößerung des zweiten Mikroskopes betrug $0,0104 \text{ mm/Skt.}$

Es ergab sich nun folgendes aus zwei Beobachtungen an verschiedenen Tagen.

Verschiebung am Druckapparat in Skt.	Mittel	Verschiebung am Manometer		
		Berechnet	Beobachtet	Mittel
23—25	24,0	25	1,4—1,8	1,60
22—25	23,5	24	1,2—1,7	1,45

Hieraus ergibt sich im Mittel

$$\frac{\text{Beob.}}{\text{Ber.}} = 0,062.$$

Beobachtungen und Berechnungen. Multiplizieren wir mit diesem Werte 0,062 die „theoretische Verschiebung“ der ersten Tabelle, so erhalten wir:

Pot.-Diff. in C.G.S.	Theor. Verschiebung in Skt.		Beob. Verschiebung in Skt.	Im Mittel
	unkorr.	korr.		
115	24	1,48	1,0—1,5	1,25
119	26	1,61	0,9—1,2	1,05

Wir sehen, daß jetzt die korrigierten theoretischen Werte mit den beobachteten schon viel besser übereinstimmen.

Dann wurden drei Versuchsreihen mit trockener Kohlensäure angestellt. Hier ist eine größere Verschiebung zu erwarten, da $\epsilon - 1 = 96 \cdot 10^{-5}$ als Mittel der Beobachtungen der Herren Boltzmann und Klemenčič ist.

Die Versuche ergaben:

Pot.-Diff. in C.G.S.	Theor. Verschiebung in Skt.		Beob. Verschiebung in Skt.	Mittel
	unkorr.	korr.		
79,5	19	1,2	0,7—0,8	0,75
70,0	15	0,9	0,6—0,7	0,65
79,5	19	1,2	0,7—0,9	0,80

Bei den kleinen Verschiebungen ist eine bessere Übereinstimmung kaum zu erwarten.

Wir sehen also, daß die Reibungskräfte in den engen Kapillaren bewirken, daß nicht die volle Verschiebung zu stande kommt.

Um dies zu stützen, wurde ein neues Manometer konstruiert, dessen Kapillarquerschnitt viel größer war als beim ersten, nämlich 1,875 mm² betrug. Ferner war das Stück *BF* (vgl. Fig. 2) noch aus weitem Rohr gefertigt, während dies bei dem ersten Manometer aus Kapillarrohr bestand, und schließlich wurde das Loch, welches das Manometer mit dem Innenraum des Kondensators, verband von 1 mm Durchmesser auf 3 mm erweitert.

Es ergab sich:

Verschiebung am Druck- apparat in Skt.	Verschiebung am Manometer in Skt.			
	Mittel	Berechnet	Beobachtet	Mittel
21—26	23,5	4,4	2,0—2,8	2,4
22—28	25,0	4,6	2,0—2,5	2,2

Beob. = 0,51 im Mittel ist also schon ein viel günstigerer Wert.
Ber.

Um zu sehen, ob die Verschiebung am Druckapparat der Tropfenverschiebung im Manometer proportional ist, wurden folgende Messungen gemacht.

Verschiebg. am Druckapparat in Skt.	Verschiebg. am Manometer in Skt.		
	Mittel		Mittel
22—26	24	1,9—2,6	2,2
45—55	50	4,6—5,0	4,8

Ungefähr findet also Proportionalität statt.

Die Beobachtungen ergaben:

Gas	Pot.-Diff. in C.G.S.	Theor. Verschiebung in Skt.		Beob. Verschiebung in Skt.	
		unkorr.	korr.		Mittel
Luft	148	7,38	3,7	3,6—3,9	3,7
„	148	7,38	3,7	4,2—4,5	4,3
„	115	4,42	2,3	1,8—2,0	1,9
„	115	4,42	2,3	1,5—1,8	1,6
CO ₂	147	11,8	6,0	5,0—5,6	5,3
„	115	7,2	3,7	2,0—3,3	2,7

Daß die beobachteten Verschiebungen einer Druckänderung im Kondensator entsprachen, erkannte ich daran, daß sie nicht eintraten bei offenem Kondensatorhahn.

Es wäre das Beste gewesen, die elektrische Druckänderung durch die des Druckapparates zu kompensieren und so eine Nullmethode zu schaffen, doch war das zu kompliziert, vor allen Dingen, da es zu lange Zeit zur einzelnen Messung in Anspruch genommen hätte.

Zusammenfassung. Aus vorliegender Arbeit folgt, daß nach der Maxwellschen Theorie die Druckänderung eines Gases durch dielektrische Polarisation $(\epsilon - 1/8\pi) E^2$ beträgt. Die Drudesche Ableitung ergibt keine Druckänderung, weil nicht alle Energieumsetzungen berücksichtigt sind. Experimentell ist gezeigt, daß der theoretisch geforderte Effekt der Größenordnung nach vorhanden ist, von Quincke jedoch nicht gefunden wurde, weil er durch den hydrostatischen Druck der Manometerflüssigkeit seine Methode zu unempfindlich gemacht hat, und weil in der engen Kapillaren eine zu große Reibung stattfand.

Tübingen, Physik. Inst., 9. März 1903.

(Eingegangen 14. März 1903.)

**6. Darstellung des Verlaufes der elektrischen Kraftlinien, und insbesondere ihrer Richtungsänderungen durch Dielektrika;
von Max Seddig.**

(Hierzu Taf. IV, Figg. 1—9.)

(Auszug aus der Marburger Dissertation, 1902.)

Die Aufgabe der vorliegenden, rein experimentellen Untersuchung war: eine Methode zu finden zur *Demonstration des Verlaufes der elektrischen Kraftlinien* und diesen Linienverlauf unter verschiedenen Verhältnissen experimentell darzustellen; insbesondere aber das *Einbiegen* der elektrischen Kraftlinien in ein Dielektrikum zu zeigen, das eine höhere Dielektrizitätskonstante hat als das umgebende Medium. —

Auf Veranlassung des Hrn. Prof. Dr. Richarz hatte schon 1899 Hr. Dr. W. Starck in Greifswald Versuche zur elektrischen Kraftliniendarstellung unternommen, und zwar ausgehend von dem Gedanken, daß *pyroelektrisch* gemachte und auf solche Weise mit „Dipolen“ versehene Kristallnadeln sich im elektrostatischen Felde in die Richtungen der Kraftlinien einstellen müßten. Es wurde daher zuvor erwärmtes Turmalinpulver auf eine gut isolierende Unterlage (Glas, Hartgummi) aufgestreut und zwischen den beiden auf der Unterlage aufsitzen den Elektroden das elektrische Feld erregt. Die Turmalinpartikelchen ordneten sich dann einigermaßen deutlich zu Kraftlinien an. Die Anordnung in Linien trat jedoch auch ohne Vorwärmen des Turmalinpulvers ein; die künstliche Erzeugung von „Dipolen“ durch Pyroelektrizität war also unnötig. Offenbar erfolgt die Einstellung, das „Richten“ der Partikelchen nach dem Prinzip des kleinsten Widerstandes; denn sofern die suspendierten Teilchen eine höhere Dielektrizitätskonstante als die Umgebung haben, werden sie mit ihrer Längsrichtung in die Richtung der elektrischen Kraftlinien gedreht, sodaß diese

in möglichst gut „dielektrisch polarisierbaren“ Bahnen verlaufen. — Oder in der Sprache der Fluida: das *eine* Ende der Partikelchen wird positiv, das *andere* negativ-elektrisch polarisiert, sodaß die Einstellung dieses nun mit „Polen“ versehenen Teilchens ebenso erfolgt, wie diejenige einer kleinen Magnetnadel im magnetischen Felde; außerdem findet in Richtung der Kraftlinien, wo ja jedesmal positive und negative Pole der gerichteten Partikelchen einander gegenüberstehen, eine *Anziehung*, und senkrecht zu den Kraftlinien, wegen des Benachbartseins gleichnamiger Pole, eine *Abstoßung* der Teilchen untereinander statt, wodurch dann Veranlassung zur Bildung einzelner, voneinander getrennt liegender *Linien* gegeben ist. —

Neben den oben erwähnten Darstellungsversuchen mittels Turmalinpulver, sind noch eine Reihe anderer Methoden versucht worden, von denen besonders diejenigen von W. Holtz¹⁾, W. v. Bezold²⁾, L. Chapman³⁾, W. Weiler⁴⁾, V. Boccara⁵⁾, D. Robertson⁶⁾ und V. Schaffers⁷⁾ zu nennen sind; über sie ist in der Marburger Dissertation referiert.

Nachdem Hr. Dr. W. Starck wegen Übernahme anderer Arbeiten obige Versuche aufgeben mußte, veranlaßte Hr. Prof. Dr. F. Richarz den Verfasser dieser Arbeit zur weiteren Behandlung dieses Themas, worüber im folgenden berichtet wird.

Unter den in Frage kommenden Methoden wurde für die vorliegende Untersuchung, deren Aufgabe es war, den *Verlauf der elektrischen Kraftlinien* unter den verschiedensten Verhältnissen, insbesondere aber das *Einbiegen* dieser Linien in ein Dielektrikum von höherer Konstante zu zeigen, als diejenige des umgebenden Mediums ist, die *Methode der Suspensionen*

1) W. Holtz, Mitt. aus dem naturw. Verein von Neuvorpommern und Rügen, p. 57—77. 1880.

2) W. v. Bezold, Wied. Ann. 21. p. 401—409. 1884.

3) L. Chapman, Electr. Rev. 24. p. 683. 1889; Lum. élect. 33. p. 297. 1889.

4) W. Weiler, Zeitschr. f. physikal. u. chem. Unterr. 6. p. 194 bis 195. 1893.

5) V. Boccara, Nuovo Cim. (4) 8. p. 406—408. 1898.

6) D. Robertson, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 22. p. 361—365. 1898/99.

7) V. Schaffers, S.J., Les Plaques sensibles au champ électrostatique. A. Herman, Paris 1900.

gewählt; einmal weil sie als die vielseitigste und als die empfindlichste erschien, da bei ihr die zu richtenden Teilchen am leichtesten beweglich sind, und dann, weil nach den Holtz'schen Versuchen (vgl. p. 816, Anm. 1) zu vermuten war, daß bei Vervollkommnung der Versuchsanordnung und bei geeigneter Suspension gut ausgebildete, gleichförmige Linienbilder sich würden herstellen lassen, ähnlich jenen, die wir bei den magnetischen Kraftlinien zu sehen gewohnt sind.

Prinzipiell ist die Suspensionsmethode folgende: in eine mit der betreffenden Suspension (bestehend aus einer *nichtleitenden* Flüssigkeit, in welcher feine, nichtleitende Partikelchen aufgeschwemmt sind) gefüllte, gut isolierende Schale tauchen, den Boden berührend, zwei Elektroden ein, die mit den Polen einer Influenzmaschine in Verbindung stehen. Durch langsames, *gleichmäßiges* Drehen der Influenzmaschine wird zwischen den Elektroden ein elektrostatisches Feld erregt, in welchem dann die suspendierten Partikelchen sich in die Richtung der elektrischen Kraftlinien einstellen und, so *gerichtet, sedimentieren* unter Bildung von Linienwülsten.

A. Methode: Suspensionen in Terpentinöl.

1. Allgemeines. Geeignete Pulver.

Als *flüssiges Dielektrikum* wurde bei den ersten Versuchen Terpentinöl benutzt, das sich aber auch bei den weiteren als das Bestgeeignete erwies; denn all die anderen, sonst gebräuchlichen flüssigen Dielektrika haben teils zu hohe Leitfähigkeit (Petroleum, Benzol), teils zu große Viskosität (Vaselinöl, Glycerin, Olivenöl). Auch vom Terpentinöl ist nur das *vollkommen reine, wasserfreie* und absolut farblose (das doppelt rektifizierte der Apotheken) gut brauchbar. — *Mischungen* gaben keine brauchbaren Resultate.

Da nach diesen Erfahrungen sich die Brauchbarkeit der Suspension nur durch geeignete *Wahl des zu suspendierenden Pulvers* zu erwarten war, so wurde eine große Zahl von Pulvern unter den verschiedensten Bedingungen daraufhin untersucht; hauptsächlich aber folgende, gut getrockneten Pulver von:

Holz (Nußbaum, Mahagoni, „Wurmmehl“)	Sand
Hartgummi	Lykopolodium
Siegellack	Oxalsäure
Schellack	Salol
Kork	Braunstein
Glas	Chininsulfat
Graphit	Glycin
Schmirgel	u. a.

Die meisten von ihnen waren polar unterschiedlich, d. h. die Linien bildeten sich immer nur an *einem*, für jede Substanz aber charakteristischen Pole leidlich aus; manche verhielten sich vollkommen indifferent (z. B. Schwefel, Lykopolodium), ohne eine Spur von Linienbildung zu geben, und nur drei erwiesen sich (abgesehen von „Leitern“ wie z. B. Holzkohlepulver) als gut brauchbar:

1. Holzpulver
2. Chininsulfat
3. Glycin

und zwar letzteres in ganz vorzüglicher Weise. — Während z. B. bei *Chininsulfat* eine bevorzugte Ansammlung am — Pol statthat, zeichnet das *Glycin*¹⁾ Bilder von fast vollkommener Gleichmäßigkeit und Linien von außerordentlicher Feinheit. — Suspensionen von Chininsulfat haben aber den Vorteil, wiederholt, für 8—10 Versuche, selbst während mehrerer Tage, brauchbar zu bleiben, wogegen Glycin in Suspension sehr rasch verdirbt und für gewöhnlich nur zu einem *einzigen* Versuche verwendbar ist; außerdem hat Glycin den kleinen Nachteil, daß es für den Versuch durch Musselin gebeutelt werden muß, wegen seiner sehr ungleichen Korngröße. Für alle diejenigen Fälle aber, in denen Linien größter Präzision erforderlich sind, z. B. bei Projektionsversuchen (vgl. p. 831) und Herstellung von Linienbildern in kleineren Dimensionen, ist Glycin das einzig brauchbare suspendierte Mittel; und schließlich ist bei Glycin die Linienbildung in sehr kurzer Zeit, in 3—5 Min., beendet, während bei Chininsulfat 15 Min. und mehr erforderlich sind.

1) Glycin (für vorliegende Zwecke am besten das Fabrikat der Akt.-Ges. f. Anilin-Fabr.), erhältlich in den photographischen Handlungen.

2. Herstellung der Suspension. Bedingungen für gute
Linienausbildung.

Die Herstellung einer Suspension, die am besten in einem Becherglase, *keinesfalls* aber in der für den Versuch bestimmten Schale vorzunehmen ist, geschieht unter gründlichem Umrühren mit einem Glasstabe (in der für den Versuch bestimmten Schale würden sich die vom Glasstabe berührten Stellen des Bodens nachher bei der Kraftlinienerzeugung als Strichmarken störend bemerkbar machen!) Zum Suspendieren sind nur geringe Mengen des betreffenden Pulvers erforderlich, ca. $0,5\text{ g pro } 100\text{ cm}^3$ Terpentinöl; nach kurzer Übung lassen sich solche Suspensionen auch leicht ohne Abwägen, „nach Gefühl“ herstellen, besonders da ein zu viel oder zu wenig leicht an der zu großen oder geringen Bilddichte erkennbar ist; die fertige Suspension hat beim Umrühren leicht „wolkig“ auszusehen; sie wird nach einem letzten, kräftigen Aufrühren in einem Zuge in die für den Versuch bestimmte Schale gegossen. Über die anzuwendende Suspensionsmenge, die abhängig ist von der Art der Schale etc. vgl. p. 821.

Die Linienbildung ist beendet, wenn die überstehende Flüssigkeit vollkommen „klar“ geworden ist; ein vorzeitiges Nachlassen der dielektrisch polarisierenden Kraft ist also zu vermeiden, da sonst auch *nicht* gerichtete Partikelchen sedimentieren, sich über die gerichteten lagern und auf diese Weise das Linienbild verschwommen machen.

Erschütterungen stören ganz außerordentlich die Regelmäßigkeit und Schärfe der Linien, und sind daher peinlich zu vermeiden; nur auf ganz besonders festen, schweren Tischen kann ohne Störung Influenzmaschine und die für die Linienbildung bestimmte Schale zusammen stehen; in allen anderen Fällen ist für beide je ein besonderer Tisch, oder für die Schale am besten eine Wandkonsole zu benutzen, damit auch die durch das Gehen im Zimmer verursachten Vibrationen keinen Einfluß haben können. — Ferner dürfen keine Metallmassen oder sonstige Leiter sich in der Nähe des erzeugten elektrostatischen Feldes befinden, da sie dort sonst analoge Störungen hervorbringen, wie Eisenmassen im magnetischen.

3. Elektrizitätsquelle.

Deutliche Bildung kontinuierlicher Linien tritt nur bei ganz langsamem Drehen der Elektrisiermaschine ein, da die sonst auftretenden heftigen Konvektionsströmungen die entstandenen Linien zerwirbeln und ein lückenhaftes Bild entstehen lassen. Diese Konvektionsströmungen lassen sich durch nichts verhindern, auch nicht durch Einbetten der Elektroden in Glas, Schellack etc., oder durch Ansetzen der Elektroden von außen her an die Schale; es ist also nur möglich dafür Sorge zu tragen, daß diese Strömungen mit möglichst kleiner Geschwindigkeit verlaufen, was durch Benutzung geringer elektrischer Intensitäten auch gut erreichbar ist. — Die Entstehung dieser Konvektionsströmungen ist teils wohl durch direkte Ladung von Flüssigkeitsteilchen bedingt, da Terpentinöl ja kein homogener Körper ist, zum Teil aber auch durch Reibung zwischen Flüssigkeit und Elektroden bez. Gefäßwand. Ein *vollkommenes* Dielektrikum, das frei ist von leitenden Teilchen, müßte auch frei von Konvektionströmungen sein. Ein solches ist aber kaum zu erhalten und wäre für die vorliegenden Versuche auch von keinem weiteren Vorteile, da nach Coehn¹⁾ die in ihm suspendierten Partikelchen sich laden müßten, weil ihre Dielektrizitätskonstante verschieden von derjenigen der dielektrischen Flüssigkeit ist; und damit wäre dann ebenfalls Anlaß zu Strömungen gegeben.

Diese Strömungen werden gering, wenn den Elektroden geringe Elektrizitätsmengen zugeführt werden; es genügt also eine *kleine* Influenzmaschine, z. B. eine zweiplattige *Wimshurst* (Durchmesser der Hartgummiplatten 30 cm); eine solche wurde auch für die hier angegebenen Versuche verwendet.

Statt die Influenzmaschine während des ganzen Versuches in gleichförmiger, langsamer Rotation zu erhalten, was aber doch nie vollkommen, d. h. ohne ruckweise Intensitätsänderungen von statten geht, ist es bei weitem besser die erforderliche Spannung von einer *Leydener Flaschenbatterie* her (die aber in dauernder Verbindung mit der Influenzmaschine bleibt) den Elektroden zuzuführen. Als zweckmäßige Batterie erwies sich, bei Gebrauch dieser *Wimshurst*, eine solche von ca. 18000 cm²

1) A. Coehn, Wied. Ann. 64. p. 219. 1898.

Innenbelegung. Eine einmalige Ladung auf 10–15000 Volt (entsprechend einem Entladungsfunken von etwa $\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{2}$ cm) genügt dann, besonders bei Anwendung von Glycinsuspensionen, zur vollständigen Herstellung eines Linienbildes; nimmt die Spannung durch Leitung etc. zu sehr ab, was aus undeutlicher Linienentwicklung erkennbar ist, so kann sie ohne weiteres durch Ingangsetzen der Maschine, was nun nicht mehr langsam zu geschehen braucht, erhöht werden; dies ist bei Chininsulfatsuspensionen meist nötig.

Hier möge die interessante Feststellung Platz finden, daß Faraday bei dem unter § 1571¹⁾ angegebenen Versuche [wo er einen Tropfen Gummiwasser in Terpentinöl elektrisierte und dann beobachtete, daß von dem Tropfen Fäden ausgingen (also „materielle Kraftlinien“), die aber *zerwirbelten*] bei Anwendung *geringerer* Intensitäten sicherlich ein deutliches *Kraftlinienbild* erhalten haben würde.

4. Schalen, Elektroden etc.

Die Höhe der Suspensionen in den Schalen beträgt am besten etwa 1 cm, ist jedoch sehr abhängig von den Dimensionen der Schalen, der Elektrodendistanz und vor allem von der Dielektrizitätskonstante und der Leitfähigkeit des Gefäßbodens, wie ja leicht erklärlich. Bei kleiner Elektrodendistanz (5–7 cm) und gut isolierender Bodensubstanz genügen oft schon Höhen von knapp 0,5 cm. Für Versuche in gut isolierenden Kristallisierschalen (die übrigens sehr selten sind; unter 28, aus verschiedenen Fabriken stammenden Schalen, war nur eine einzige gut brauchbar) von etwa 12 cm Durchmesser sind Höhen von $1\frac{1}{2}$ –2 cm erforderlich; für Hartgummischalen größerer Dimensionen (35:35 cm) etwa ebensolche. Eine genaue Norm läßt sich kaum angeben; die jedesmal beste Höhe läßt sich aber leicht durch ein paar Vorversuche ermitteln. Allgemein gilt nur: je niedriger die Flüssigkeitsschicht und je größer die Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Schalenbodens, um so mehr Kraftlinien werden dann in diesen einbiegen und ihre richtende Kraft nicht auf die suspendierten Teilchen ausüben können.

1) M. Faraday, Experimentaluntersuchungen, deutsch von Kalischer. Berlin 1894.

Also Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante müssen bei der Schalenmasse möglichst gering sein. Dies trifft aber nur selten und zufällig bei den im Handel erhältlichen zu, von denen nur die „Kristallisierschalen“ leidlich brauchbar sind. Schalen aus Zellnoid haben Inhomogenitäten bezüglich der Dielektrizitätskonstante und schließlich sind bei den käuflichen Hartgummischalen meist störende Kittsubstanzen verwandt.

Es ist daher nötig die Schalen selbst herzustellen und zwar am besten aus Hartgummi, das sich ja auch bei nur geringer Übung außerordentlich leicht bearbeiten läßt. Aus Hartgummi hat mindestens der Gefäßboden zu bestehen; so erhält man z. B. sehr brauchbare Schalen durch Aufkitten eines Glasringes von etwa 3 cm Höhe und ca. 13 cm Durchmesser (Kristallisierschale mit abgesprengtem Boden) auf eine Hartgummiplatte von 2–3 mm Dicke, wobei als Kittsubstanz (wie auch in den übrigen Fällen) eine möglichst dickflüssige alkoholische Schellacklösung zu benutzen ist, da Schellack, im Gegensatz zu Siegellack etc., von Terpentinöl nicht angegriffen wird. Erst nach gründlichem Trocknen (während mindestens 1 Woche) kann die Schale in Gebrauch genommen werden, da sonst der darin enthaltene Alkohol vermöge seiner Leitfähigkeit und hohen Dielektrizitätskonstante störende Ablenkungen der Linien hervorbringen würde.

Auch einfach durch Falzen aus ganz dünnem Hartgummi (0,7–1 mm dick) lassen sich vorzügliche Schalen (bis 20:20 cm) bequem herstellen; denn solch dünner Hartgummi kann mit einer gewöhnlichen, aber *heiß*gemachten Schere leicht in die erforderliche Größe geschnitten werden, und zum Aufbiegen der Ränder ist es nur nötig, die Falzstelle mittels der „Schneide“ eines heißgemachten Metallstreifens (Metalllineal) zu erwärmen, wonach das Biegen ohne weiteres möglich ist; nach dem Erkalten der Falzstelle bleibt das Hartgummi in der gegebenen Stellung. — Soviel an dieser Stelle über die Selbstherstellung der Schalen; einige speziellere Angaben folgen später bei der Beschreibung der betreffenden Liniendarstellungen.¹⁾

1) Schalen, Elektroden, Elektrodenhalter etc., wie sie zu den in dieser Arbeit beschriebenen Versuchen gebraucht werden, fertigt der Mechaniker am hiesigen Physikalischen Institut, F. Bühler, an.

Die *Aufstellung der Schalen* hat möglichst isoliert zu geschehen, z. B. auf einem Paraffinblock oder am besten auf isolierenden Klötzchen, die an den Schalenecken untergesetzt werden, da dann nur die Luft mit ihrer Dielektrizitätskonstante (nahe gleich 1) an den Schalenboden angrenzt.

Die *Elektroden* können für die einfachsten Fälle, wo es sich z. B. nur um die Demonstration des Linienverlaufes zwischen zwei elektrisch geladenen *Punkten* handelt, aus 2—3 mm dicken Drähten bestehen; dünnere Drähte sind zu vermeiden wegen der dabei unnütz starken Anstrahlungen und bei Chininsulfat wegen des leichten Abfallens der Ansammlungen, die sich regelmäßig am + Pole bilden; zweckmäßig jedoch ist es noch kleine Messingkugeln (von etwa 1 cm Durchmesser) an die Drahtenden anzulöten.

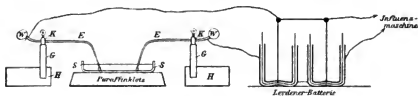


Fig. 1.

Für Darstellungen des Linienverlaufes zwischen *Kondensatorplatten* lassen sich Elektroden benutzen, die aus Metallstreifen von 5—10 cm Länge und 3 cm Breite bestehen und bei denen auf die Mitte einer Längsseite der Zuführungsdraht gelötet ist; diese Elektroden werden mit der „Schneide“ in die Suspension hineingestellt.

Als Material für die Elektroden bewährte sich Messing; Kupfer wird verhältnismäßig leicht angegriffen und verdirbt dann oft die Suspensionen.

Zum Festhalten der Elektroden in jeder beliebigen Lage diente bequem der in nachstehender Fig. 1 abgebildete Elektrodenhalter; er besteht aus einem Klotz (H) von schwerem Holze, in welchen, nahe dem Ende, ein außen und innen mit Schellack überzogenes Glasrohr (G) vertikal eingesetzt ist; eine in das obere Rohrende mit Siegelack eingekittete Polklemme (K) dient zum Festhalten des zur Elektrode gehören-

den Zuführungsdrahtes (*E*). Statt des Glasrohres (*G*) kann jedoch zweckmäßig auch eine Hartgummisäule eingesetzt werden, die von oben her auf etwa 2—3 cm geschlitzt ist und in die dann der Elektrodendraht eingeklemmt wird.

Die Technik der Herstellung eines elektrischen Kraftlinienbildes ergibt sich am einfachsten aus folgendem Schema.

5. Schema der Herstellung eines elektrischen Kraftlinienbildes.

1. Erschütterungsfreies und isoliertes Aufstellen der betreffenden Schale; Einstellen der Elektroden. Herstellung der Verbindungen zwischen Influenzmaschine, Kapazität und Elektroden (vgl. obige Fig. 1). Zuführungsdrähte möglichst kurz und *ohne* Knicke; Schutz der Drahtenden gegen Ausstrahlungen durch aufgesetzte Wachskügelchen (vgl. *W* in der Fig. 1 auf voriger Seite).

2. Herstellen der Suspension (vgl. p. 819).

3. 2—3 maliges Abreiben der Elektrodenenden und des Schaleninneren mittels Fließpapier, welches mit Terpentinöl getränkt ist. — Dieses Verfahren vor *jedem* Eingießen der Suspension wiederholen! —

4. Laden der Batterie (eher etwas zu schwach als zu stark!).

5. Nochmaliges kräftiges Aufrühren der Suspension und rasches Eingießen in der geeigneten Menge; entstandene Schaumblasen durch ein kurzes Blasen über die Oberfläche entfernen.

6. Falls das Richten der Partikelchen, die „Linienbildung“ nicht deutlich genug einsetzt, die Batterie *stärker* laden.

Das Entstehen von *Lücken* im Linienbilde wird meist durch zu hohe Spannungen verursacht, seltener durch Unsauberkeit des Schalenbodens (in diesem Falle wiederholtes, gründliches Abreiben mit Terpentin und Filtrierpapier).

7. Nach dem völligen Ausbilden der Linien und nachdem das überstehende Terpentin sich geklärt hat, eventuelles, aber sehr vorsichtiges Herausheben der Elektroden. Die Batterie *nicht* entladen, *solange noch Verbindung* zwischen ihr und den in die Flüssigkeit eintauchenden Elektroden (solche Entladung würde das Linienbild teilweise zerstören).

6. Darstellungen spezieller elektrostatischer Felder.

[Die beigegebenen photographischen Abbildungen der hergestellten Linienbilder wurden durch Aufnahmen vertikal abwärts, zum Teil aber auch mittels horizontaler Kamera und Spiegel erhalten.]

a) Feld zwischen zwei geladenen Kugeln.

Vgl. Fig. 1 der Taf. IV.

Suspension: Glycin in Terpentinöl.

Anordnung wie durch Fig. 1, vgl. p. 823, angedeutet; benutzte Schale: Glasring mit aufgekittetem Hartgummiboden.

Bei guten Darstellungen mit Glycinsuspensionen ist der wechselnde *Querschnitt* der Kraftröhren außerordentlich schön erkennbar.

b) Feld zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten.

Vgl. Fig. 2 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

Dieses Linienbild, das an der einen Elektrode ein wenig „Lücken“ zeigt, war etwas zu hohen Spannungen ausgesetzt, die aber durch „Rückwärtsdrehen“ der Influenzmaschine noch genügend erniedrigt werden konnten, sodaß sich schließlich dieses für ein „homogenes Feld“ und zur Veranschaulichung der „störenden“ Randwirkungen instruktive Bild ergab; die Linien waren bei dieser Darstellung sehr deutlich, sogar von Plattenrückseite zu Rückseite verfolgbar.

c) Feld zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten, einseitig „gestört“ durch genäherten Leiter (Metallklotz).

Vgl. Fig. 3 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

Benutzte Schale: Glasring mit aufgekittetem Hartgummiboden. — Deutliches Hinbiegen der elektrischen Kraftlinien zu dem die Schale von außen berührenden Metallklotz *M*. Die Linien sind auf dieser „besser influenzierbaren“ Seite deutlicher ausgebildet als auf der anderen, ungestörten Seite.

d) Feld zwischen zwei Kondensatorplatten mit dazwischen gebrachtem Metallring; Richtungsänderung des elektrischen Kraftlinienverlaufes und Schirmwirkung durch den Metallring. — Fehlende Schirmwirkung (vollständige) bei eingesetztem Hartgummiring.

Vgl. Fig. 4 u. 5 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

In die Schale und besonders in den Raum zwischen den Elektroden eingebrachte Metalle (oder andere influenzierbare Leiter) sammeln, „konzentrieren“ die elektrischen Kraftlinien ähnlich wie Eisenmassen die Linien des magnetischen Feldes sammeln. Für einen besonderen Fall, unter gleichzeitiger Demonstration der elektrischen *Schirmwirkung von Metallen* zeigt dies Fig. 4 der Taf. IV, wo in den Raum innerhalb zweier Plattenelektroden (deren eine mit photographiert ist) ein Messingring von 2 cm Höhe eingesetzt ist. Das Bild zeigt deutlich, daß im *Innern* des Ringes keinerlei elektrische Spannung bestand, da das Chininsulfat dort vollkommen regellos sedimentierte, und wie der Ring die Linien „nach sich hin zieht“ — oder, wie er durch Influenz scheinbar *eigene Pole* erhalten hat, von denen aus Kraftlinien zu den gegenüberliegenden Elektroden hingehen.¹⁾ Die Polarität des Chininsulfats ist in diesem Falle ein entschiedener Vorteil, da auf diese Weise direkt erkennbar ist, daß der influenzierte — Pol, an dem stets die *dichtere* Chininsulfatabscheidung stattfindet, sich der positiven Elektrode gegenüber befindet.

Zur Bestätigung, daß nur ein *Leiter* eine Schirmwirkung (eine vollständige) ausübt, wurde dieser Versuch in gleicher Weise wiederholt, nur daß an Stelle des Metallringes ein entsprechender aus Hartgummi trat; die Kraftlinien verlaufen dann (auch im Innern des Ringes) fast ebenso, wie diejenigen in einem homogenen Medium; die Abweichungen ergeben sich aus der nur angenäherten Übereinstimmung der Dielektrizitätskonstanten von Hartgummi und Suspension, vgl. hierzu Fig. 5 der Taf. IV. Auch hier sind an der Grenzfläche der beiden Medien, Hartgummi und Terpentinöl, die influenzierten Pole

1) Vgl. die *analoge magnetische* Figur bei W. Leick, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 2. Taf. XVI, Fig. 9. 1899.

an der Verschiedenheit der Chininsulfatanhäufungen gut erkennbar. —

Bei Benutzung von Ringen aus Glas von beträchtlich höherer Dielektrizitätskonstante, als jener der Suspension, läßt sich die zunehmende Schirmwirkung und die stärkere Ausbildung der „influenzierten Pole“ auf der Grenzschicht beider Dielektrika bequem demonstrieren; eventuell sogar gleichzeitig durch konzentrisches Einsetzen von Ringen verschiedenen Durchmessers und verschiedener Dielektrizitätskonstante.

- e) Richtungsänderungen, hervorgebracht durch Dielektrika von anderer Konstante.

Vgl. Fig. 6 u. 7 der Taf. IV.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl.

Die Demonstration der Richtungsänderungen, die hervor gebracht werden durch Dielektrika von anderer Konstante, als diejenige des übrigen Feldes ist, bereitet ganz außerordentliche Schwierigkeiten; vor allem weil Dielektrika mit genügend hoher Konstante gegenüber derjenigen der Suspension unter den *festen Körpern* kaum, wenigstens nicht einwandfrei¹⁾, zu haben und unter den Flüssigkeiten nur mit vieler Mühe brauchbar zu erhalten sind wegen ihrer oft recht beträchtlichen Leitfähigkeiten.

Nach vielen vergeblichen Versuchen mit Glasklötzen von verhältnismäßig hoher Dielektrizitätskonstante und mit Prismen aus schwerem Glase wurden zunächst Dielektrika von künstlich hoher Dielektrizitätskonstante²⁾ hergestellt durch reichliches

1) Nach W. Schmidt (Ann. d. Phys. 5. p. 932. 1902) hat *Rutil*, neben verschwindender Leitfähigkeit, eine Dielektrizitätskonstante von über ca. 170, also eine noch bedeutend höhere als diejenige für Wasser ist. Aber diese hohe Dielektrizitätskonstante ist vielleicht nur vorgetäuscht, d. h. die Wirkung kleiner, im Kristall vorhandener und mit leitender Flüssigkeit erfüllter länglicher Höhlungen. — Die beim *Rutil* hervorragend beobachtete faserige Struktur (Sagenit) läßt solche Erklärung plausibel erscheinen.

2) Diese Dielektrika mit künstlich hoher Konstante wurden bereits im Winter 1900/1901 in Greifswald vom Verfasser dieser Arbeit hergestellt und zu obigen Versuchen verwandt. — Gleiche Dielektrika hat auch K. Kießling angewandt: Dissert. Greifswald 1902.

Suspendieren von allerfeinstem („pyrophorem“) Eisenpulver¹⁾ in geschmolzenem Paraffin, worin dann nach dem Erstarren die Partikelchen gleichmäßig verteilt und voneinander isoliert waren. Die Herstellung eines genügend *gleichmäßigen* Stückes von auch nur etwa 50 cm³ Inhalt bereitet bedeutende Schwierigkeiten, da die unteren Schichten infolge des Sedimentierens der Eisenteilchen sich immer anzureichern streben; durch geschicktes Umrühren und durch rasches Abkühlen des nur eben bis zum Schmelzen erhitzten Paraffins gelingt es schließlich doch brauchbare Stücke zu erhalten, die sich dann mit dem Messer oder auf der Drehbank bequem bearbeiten lassen.

Beim Einsetzen eines solchen Dielektrikums (das durch einen Schellacküberzug gegen die Auflösung im Terpentinöl geschützt war) in ein elektrostatisches Feld gelang es nun auch endlich die Richtungsänderung zu demonstrieren.

Es war aber wünschenswert, nicht nur ein künstliches, sondern auch ein natürliches Dielektrikum zu verwenden.

Aus diesem Grunde kamen daher als richtungsändernde Dielektrika nur flüssige in Betracht, und unter diesen auch nur solche, bei denen die Leitfähigkeit sich, innerhalb gewisser Grenzen natürlich, beliebig ändern läßt; am ehesten jene, deren ursprünglich große Leitfähigkeit sich auf gleiche Weise verringern läßt, wie es Hertz beim Benzin beobachtete²⁾ und wie es ähnlich von A. Kleiner³⁾ an Paraffin konstatiert ist. Hertz konnte nämlich durch wiederholtes Laden und Entladen eines „Kondensators“, der aus Zinkplatten bestand und Benzin als Dielektrikum enthielt, die anfänglich außerordentlich hohe Leitfähigkeit auf einen verschwindend kleinen Betrag herunterbringen, sodaß „dieses elektrisch gereinigte Benzin in seinem Verhalten dem eines idealen flüssigen Isolators ganz außerordentlich nahe“ kam. (Ein ähnliches Verfahren wird auch in der Kabelindustrie zur Isolationsverbesserung benutzt.)

Diese Methode ließ sich, wie sich herausstellte, auch beim *Methylalkohol*, der wegen seiner beträchtlichen Dielektrizitätskonstante (= 32,6) gewählt war, anwenden; ausgegangen

1) Zu beziehen von Dr. Paul Lohmann in Hameln a. d. Weser.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 20. p. 279—284. 1888.

3) A. Kleiner, Arch. sc. phys. (3) 32. p. 282—284. 1894.

wurde von als absolut rein bezogenem und möglichst wasserfrei gemachtem Methylalkohol. (Eine analoge „elektrische Reinigung“ geht offenbar auch in der *Terpentin-Chininsulfat-suspension* vor sich, da diese Suspension gewöhnlich erst nach drei- bis viermaligem Gebrauche vorzügliche Resultate gibt.)

Da es für *einwandfreie* Einbiegungsversuche nun darauf ankommt, daß die Leitfähigkeiten der Suspension und des eingesetzten Dielektrikums¹⁾ einander möglich nahe gleich sind, wurde zunächst diejenige der Suspension bestimmt (unter Benutzung eines Siemens-Universalinstrumentes mittels Brückenschaltung mit Zweigleitungen²⁾) und darauf jene des Methylalkohols so lange erniedrigt (durch die „elektrische Reinigung“), bis seine Leitfähigkeit *eben niedriger* wurde als jene der Suspension. Erst nach mehrmaligem, gründlichen Ausspülen mittels solchen gereinigten Methylalkohols wurde die Glaskugel, deren Verwendung gleich besprochen werden soll, mit dem Methylalkohol, der bezüglich seiner Leitfähigkeit nunmehr gleichwertig der Suspension war, gefüllt und fest verschlossen.

Aus zahlreichen Vorversuchen (meist mit dem Dielektrikum von künstlich hoher Konstante ausgeführt) hatte sich ergeben, daß, um einigermaßen gute Wirkungen zu erhalten, einfaches Hineinstellen eines mit dem betreffenden Dielektrikum gefüllten Becherglases nicht genügt, weil der Boden des Glasgefäßes sich gerade in Höhe der meisten der in der Suspension verlaufenden Kraftlinien befindet und die Dielektrizitätskonstante des Glases sehr nahe gleich derjenigen der Suspension ist. Aufkitten eines Glasringes auf den Gefäßboden ist unstatthaft, da Schellack, der sonst hierbei verwendet wurde, vom Methylalkohol angegriffen wird, und andere, dauerhafte Kittsubstanzen wegen zu hoher Leitfähigkeit nicht anwendbar sind. Etwas besser ist es schon, wenn der Schalenboden rings um dem Glase erhöht wird, etwa durch Einlegen einer den Schalenboden ausfüllenden Hartgummiplatte, die in der Mitte eine zum genauen Einsetzen des Becherglases passende Öffnung hat. — Recht gut bewährt hat sich dagegen folgende Schalenkonstruktion: in eine etwa 1 cm starke Hartgummiplatte

1) Theoretisch am besten wäre für dieses absolute Nichtleitfähigkeit.

2) F. Kohlrausch, Lehrbuch p. 400.

von der Größe 22:30 cm ist eine kreisrunde Öffnung gedreht, in die eine Glaskugel von 8 cm Durchmesser (wie sie bei der Dumasschen Dampfdichtebestimmung gebraucht wird) mit ihrer Äquatorialzone genau hineinpaßt und mittels Schellack (vgl. p. 822) eingekittet ist; die Schalenränder werden durch Hartgummistreifen von 3 mm Stärke und $2\frac{1}{2}$ cm Höhe gebildet, die in Nuten eingesetzt und gekittet sind, welche nahe den Rändern der Bodenplatte $\frac{1}{2}$ cm tief eingefräst waren. — Die Hauptsache ist bei dieser Konstruktion, daß der Methylalkohol in der ganzen Dicke der Suspensionsschicht vorhanden ist. Nur nützlich und die Beweiskraft des Versuches vermehrend können die oberhalb und unterhalb des Niveaus der Suspensionsschicht befindlichen Methylalkoholschichten wirken, welche die Kraftlinien aus der Luft in sich hineinziehen, und dadurch auch ein stärkeres Einbiegen im Niveau der Suspension bewirken. Jedoch ist diese Wirkung der über und unter die Suspension reichenden Teile des eingesetzten Dielektrikums nur sehr gering; denn selbst bei Versuchen, bei denen sich Dielektrika von künstlich hoher Konstante (vgl. p. 827 u. 828) *nur* direkt über und unter der Suspension befanden, war keine merkliche Richtungsänderung zu konstatieren. —

Bei einer auf diese Weise konstruierten Schale läßt sich der Methylalkohol hermetisch abschließen und bleibt daher auch für weitere Versuche brauchbar.

Als Elektroden dienten wiederum ziemlich ausgedehnte Platten, da die Abweichung der Kraftlinien von dem *geradlinigen* Verlaufe bei ihnen am leichtesten konstatierbar ist.

Fig. 6 der Taf. IV zeigt das *Einbiegen* der elektrischen Kraftlinien bei mit Methylalkohol gefüllter Kugel.¹⁾

Fig. 7 der Taf. IV zeigt das *Ausbiegen* bei einem Dielektrikum niedriger Konstante als diejenige der Suspension: die Kugel ist leer, nur mit Luft, von der Konstante = 1, erfüllt.

Diese Figur dient aber gleichzeitig als Kontrollobjekt dafür, daß das Einbiegen nicht etwa durch Leitfähigkeit des Glases (der Kugel) oder der Kittsubstanz hervorgebracht wurde.

1) Vgl. die analoge Figur in W. Leick, Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 2. Taf. XV, Fig. 8. Reproduziert in: F. Richarz, Neuere Fortschritte, 2. Aufl. p. 92. Fig. 66. B. G. Teubner, Leipzig.

Außerdem wurde durch Wiederholung der Bestimmung des Verhältnisses der Leitfähigkeiten von Methylalkohol und Suspension *nach* Herstellung des Linienbildes die definitive Kontrolle erreicht dafür, daß das Einbiegen wirklich nur durch die Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten veranlaßt wurde. Die Prüfung der Leitfähigkeit geschah wiederum nach der auf p. 829, Anm. 2 angegebenen Methode, und zwar mit dem Resultate, daß die Leitfähigkeit der Suspension sich auch *nach* einem Versuche als größer erwies, als jene des Methylalkohols; durch die „elektrische Reinigung“ war zwar die Leitfähigkeit der Suspension eine etwas niedrigere geworden, *gleichzeitig* aber auch diejenige des in der Glaskugel befindlichen Methylalkohols, sodaß das Verhältnis bestehen blieb.

f) Brechung elektrischer Kraftlinien.

Um *Brechung* elektrischer Kraftlinien handelte es sich natürlich auch schon in den eben beschriebenen Versuchen über „Richtungsänderungen durch in das Feld eingebrachte Dielektrika“; nur wurde dort der Linienverlauf im „anderen“ Dielektrikum nicht objektiv, nicht materiell dargestellt. — Eine solche materielle Darstellung der Brechung ist nun nach einer Reihe verschiedener Methoden und mit Erfolg versucht worden; diese Versuche sind jedoch noch nicht abgeschlossen.

7. Projektion elektrischer Kraftlinienfelder.

Alle diese bisher beschriebenen Kraftlinienbilder, hergestellt durch die *Methode der Suspensionen in Terpentinöl*, lassen sich aber auch außerordentlich gut durch *Projektion* einem großen Auditorium gleichzeitig sichtbar machen und zwar am leichtesten durch Projektion im durchfallenden Lichte, da bei den hierbei zu verwendenden verhältnismäßig kleinen Dimensionen der Schalen diese aus Glas bestehen können.

Die Einrichtung ist kurz folgende (vgl. nachstehende Fig. 2). Das von einer Bogenlampe kommende, parallel gemachte Licht trifft auf einen unter 45° geneigten Spiegel *S* und wird von dort auf die vertikal über ihm befindliche, horizontale Kondensatorlinse *L* (Durchmesser 15 cm) geworfen, die

das Lichtbündel vereinigt durch das Projektionsobjektiv O gehen läßt. Spiegel s wirft dann das Licht in horizontaler Richtung auf den Schirm. — Direkt über L befindet sich eine quadratische Hartgummiplatte (30 cm Seitenlänge, 1 cm Dicke), mit einer kreisrunden Öffnung D (13 cm Durchmesser) in der Mitte. Nahe den 4 Ecken der Hartgummiplatte sind 4 Hartgummisäulen (in der Fig. nur H_1 und H_2 gezeichnet) eingeschraubt, die am oberen Ende zum Einklemmen der Elektrodendrähte geschlitzt sind und als Elektrodenhalter dienen. Über die Öffnung D kommt dann die Schale, in der das betreffende Linienbild erzeugt werden soll, zu stehen.

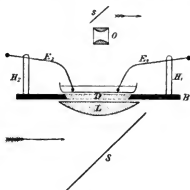


Fig. 2.

Als Schalen können zur Not große Uhrgläser dienen. Kristallisierschalen sind wegen Schlieren und sonstiger Ungleichförmigkeiten des Bodens meist nicht verwendbar. Am besten jedoch bedient man sich parallelepipedischer Glaströge, zusammengesetzt aus planen Glasplatten und gekittet mit Schellacklösung (Dimensionen zweckmäßig Boden 13 : 18 cm, Randhöhe 2 cm). Für Versuche über Aus- bez. Einbiegen bei eingesetztem Dielektrikum von anderer Dielektrizitätskonstante sind Schalen zu verwenden, in deren Boden eine ca. 3 cm große Öffnung gebohrt und in die eine Glaskugel von entsprechendem Durchmesser gekittet ist.¹⁾

1) Vgl. die Anmerkung auf p. 822.

B. Methode: Suspension in geschmolzenem Paraffin.

1. Prinzip und Anwendbarkeit dieser Methode.

Im folgenden soll jetzt eine zweite Methode der Darstellung elektrischer Kraftlinien beschrieben werden, deren Prinzip folgendes ist:

In *geschmolzenem Paraffin*, in welchem feines Holzkohlenpulver suspendiert ist, wird das betreffende elektrostatische Feld erregt (zwischen ebensolchen Elektroden wie bei den zuvor beschriebenen Suspensionen in Terpentinöl), wobei die Holzkohleteilchen als Leiter sich influenzelektrisch laden, in „Kraftlinien“ anordnen und sedimentieren, welche Lage sie dann auch beim Erkalten des Paraffins beibehalten und auf diese Weise in der *erstarrten* Masse ein *fixiertes Kraftlinienbild* geben.¹⁾

Neben diesem Vorteile des „Sichselbstfixierens“ der Kraftlinienbilder hat diese Methode noch den weiteren der äußerst leichten und schnellen Herstellbarkeit. — Nachteil dagegen ist die weniger vielseitige Verwendbarkeit gegenüber der zuvor beschriebenen; so läßt sich z. B. mit dieser Methode *nicht* demonstrieren:

1. Das *Einbiegen* in ein Dielektrikum von höherer Konstante (wohl aber das Einbiegen in einen Leiter oder das Ausbiegen bei zwischenliegendem Dielektrikum von niedriger Konstante als diejenige der Suspension ist).

2. Die Brechung der Kraftlinien.

In Rücksicht aber auf ihre bequeme Verwendbarkeit und auf den Umstand, daß bei der zuvor beschriebenen Suspensionsmethode (Terpentinöl: Chininsulfat) das Einbiegen in ein Dielektrikum *einwandfrei* nur auf recht komplizierte Weise (wegen der Leitfähigkeiten) demonstrierbar ist, dürfte dieser Methode doch wohl einige Bedeutung zukommen.

2. Versuchsanordnung. Herstellung der Suspension. Schalen, Elektroden etc.

Da es sich im Prinzip auch wieder um eine Suspensionsmethode handelt, behält das auf p. 820ff. über Influenzmaschine,

1) Alle anderen untersuchten Pulver gaben keine brauchbaren Resultate.

angehängte Kapazität, Elektroden, Aufstellung und Schaltung Ausgeführte auch hier seine Gültigkeit; nur bei den elektrischen Spannungen wäre zu bemerken, daß sie wegen der leichten Influenzierbarkeit der Teilchen bedeutend niedriger sein können; auf gute Isolation der Zuleitungen und möglichst geringe Strahlungsverluste ist aber ebenso Rücksicht zu nehmen, ob- schon solche Fehler sich wegen der äußerst kurzen Herstellungs- zeit nicht so störend bemerkbar machen, wie bei der zuvor beschriebenen Methode.

Die *Suspension*, die man zweckmäßig gleich in größerer Menge ($\frac{1}{2}$ Liter und mehr) vorrätig herstellt, wird in folgender Weise erhalten: Feinstes Holzkohlenpulver (erhältlich in den Apotheken) wird, um gleichmäßige Korngröße zu erhalten, durch Musselin gebeutelt und in geschmolzenem Paraffin (am besten in einem metallenen und emaillierten Gefäße) durch gründliches Umrühren mit einem Glasstabe gleichmäßig verteilt; erforderlich sind auf 100 cm³ Paraffin nur etwa 0,5—0,75 g; die Mengenverhältnisse lassen sich aber auch hier leicht empirisch finden durch Aufgießen kleiner Mengen, weniger Tropfen der betreffenden Suspension auf eine horizontale Glasplatte: Beim Erstarren darf das Paraffin dann nur eben ganz *schwach grau* erscheinen; durch entsprechende Änderung der Mengen- verhältnisse und Wiederholung dieser Prohe ist eine passende Suspension leicht zu erhalten.

Als *Schalen* genügen, wegen der aus dem Kohlepulver- zusatz resultierenden hohen Dielektrizitätskonstante der Sus- pension, solche aus Glas; am besten dienen Kristallisierschalen, da sich diese verhältnismäßig leicht ohne zu zerspringen über einer Flamme vorwärmen lassen, was zur Verhütung nach- herigen „Rissigwerdens“ der Schicht erforderlich ist. (Dieses Verderben der Schicht läßt sich mit Sicherheit vermeiden durch Bestreichen der Oberfläche mit Terpentinöl, wodurch die Masse pastös wird.)

Am besten aber hilden sich diese Linien auf einer mittels Libelle gut horizontal gestellten und an den Ecken auf iso- liierenden Unterlagen ruhenden Glasplatte (von etwa 20:20 cm Größe). — Ein seitliches Abfließen der Suspension ließ sich dabei in folgender Weise verhindern: Der mittlere Teil der Glasplatte wurde in der Größe einer Kreisfläche von ca. 13 cm

Durchmesser vorsichtig auf 70—80° erwärmt; die dann auf die Mitte der horizontal gestellten Platte aufgegossene geringe und *nicht zu hoch erhitzte* Suspensionsmenge floß rasch längs der vorgewärmten Fläche bis zu den kälteren Teilen der Platte, wo sie fast momentan erstarrte, oder wenigstens außerordentlich zähflüssig wurde und auf diese Weise einen *Rand* bildete, der die Suspension am Abfließen hinderte. Wie genau diese Abgrenzung erfolgte, zeigt Fig. 8 der Taf. IV (darstellend den elektrischen Kreislinienverlauf zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten). — Dieses Vorwärmen geschah bequem in folgender Weise: Auf einen Metaldreifuß, wie er beim Kochen über Bunsenbrennern benutzt wird, war ein Stück Asbestpappe (Größe ca. 25:25 cm), das in der Mitte eine kreisrunde Öffnung von 12 cm hatte, gelegt und über diese Öffnung ein kleiner Papptubus von 13 cm Durchmesser und 15 cm Höhe gestellt. Wurde nun auf den oberen Rand des Tubus die betreffende Glasplatte gelegt und unter den Dreifuß eine möglichst *klein* brennende Flamme (Kerze) gebracht, so erwärmten die im Tubus aufsteigenden heißen Luftmassen und die Strahlung den mittleren Teil der Glasplatte entsprechend dem Lumen des Papptubus, während die übrigen Teile der Platte, geschützt durch den Asbestschirm, kalt blieben. — Die auf *so* erwärmten Platten hergestellten Linienbilder sind außerordentlich haltbar; „Risse“ treten selten und nur am äußersten Rande und in unschädlicher Weise auf.

Das in solcher Weise hergestellte Linienbild ist wegen seiner bedeutenden Lichtdurchlässigkeit (die Schichtdicke beträgt nur 3—4 mm) zur *Projektion* ganz ebenso verwendbar wie ein gewöhnliches photographisches Diapositiv. Auch läßt es sich *direkt* photographisch *vervielfältigen*; es ist dazu nur nötig die betreffende Linienplatte mit ihrer *Glasseite* auf ein Blatt lichtempfindlichen Bromsilberpapiere zu legen (in der Dunkelkammer natürlich), über der Platte, in $1\frac{1}{2}$ —2 m Abstand, ein Streichholz abzubrennen und danach das Bromsilberpapier in der gewöhnlichen Weise zu entwickeln und fixieren.

3. Schema der Herstellung eines elektrischen Kraftlinienbildes nach der Methode: Suspension in geschmolzenem Paraffin.

1. Herstellung der Verbindungen etc. entsprechend Fig. 1 auf p. 823.

2. Genaues Horizontalstellen (mittels Libelle) der mit den Ecken auf isolierenden Unterlagen (Glasklötzen) ruhenden Glasplatte.

3. Vorwärmen der Plattenmitte (vorsichtig, während 10 bis 15 Minuten und auf ca. 80°) vgl. vor. S. Erwärmen der vorrätigen Suspension bis zum eben eintretenden Schmelzen (also unnötige Erhitzung vermeiden!).

4. Auflegen der erwärmten Platte auf die (bei 2.) justierten Unterlagen; Aufsetzen der mittels Bunsenflamme etwas vorgewärmten Elektroden, Laden der Batterie auf *mäßige* Spannung und Aufgießen der nochmals gut aufgerührten Suspension auf die Plattenmitte (nur so viel aufgießen, als zum Bedecken der erwärmten Fläche nötig!).

5. Falls deutliche Linienbildung ausbleibt, die Batterie stärker laden, aber vorsichtig, da bei zu hohen Spannungen sich lebhaft Konvektionsströmungen ausbilden, die dann die Linien teilweise wieder vernichten.

6. Nach dem *vollkommenen* Erstarren der aufgegossenen Suspension die Batterie entladen und die Elektroden entfernen; letzteres am besten folgendermaßen auszuführen: während eine Hand an der Elektrode leicht zieht, wird deren unteres Ende, nahe der Schicht, durch vorsichtiges Berühren mit einem erhitzten Lötkolben erwärmt, wodurch die an der Elektrode haftenden Schichten schmelzen, sodaß plötzlich die Elektrode herausschnellt.

4. Darstellung spezieller elektrostatischer Felder mittels dieser Methode.

Mit den auf p. 833 gegebenen Einschränkungen sind alle zuvor, auf p. 825 bis 830, beschriebenen Kraftlinienfelder auch mittels dieser Methode bequem nachbildbar; auf beigegebener Tafel ist nnnr die Darstellung eines Feldes zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten reproduziert (Fig. 8). — Die Ausführung, die Wahl der Elektroden etc. ergibt sich nach dem

bei der Methode: Suspension in Terpentinöl, Gesagten wohl von selbst; daher nur für folgenden Versuch eine kleine technische Mitteilung.

Ausbiegen der elektrischen Kraftlinien bei eingesetztem Dielektrikum von niedrigerer Konstante als derjenigen der Paraffin-Kohle-Suspension.

Die Mitte der Glasplatte enthält eine Durchbohrung von 3 cm, in die ein aus Hartgummi gedrehtes zylindrisches Gefäß von 3 cm Durchmesser, 4 cm Höhe und 2 mm Wandstärke dicht und bis zur halben Höhe eingesetzt (eingeklemmt) ist.

Bei Füllung dieses Gefäßes mit einer Substanz von niedriger Dielektrizitätskonstante als diejenige der Suspension, oder auch wenn es leer bleibt, tritt „*Ausbiegen*“ der Kraftlinien ein.

Bei Füllung dieses Gefäßes mit einer Substanz, die metallisch oder elektrolytisch leitet, tritt dagegen *Einbiegen* auf.

C. Darstellung elektrischer Kraftlinien mittels Lichtenbergscher Figuren.

Lichtenbergsche Figuren werden für gewöhnlich nur *einpolig* dargestellt, trotzdem leicht zu vermuten ist, daß bei *gleichzeitiger Erzeugung beider* Figuren (\pm) auf ein und derselben Platte und nahe beieinander ein den elektrischen Kraftlinienverlauf andeutendes Bild zu erhalten sein müsse.

Versuche in folgender Anordnung bestätigten diese Voraussetzung: auf einer gut isolierenden, trocken geriebenen und über einer Flamme entladenen Hartgummiplatte wird am besten *zuerst* das Pulvergemisch [Schwefel-Mennige oder besser jenes nach dem Bürkerschen Rezept ¹⁾] aufgestreut und dann schnell die beiden Metallzylinderchen in einem gegenseitigen Abstände von etwa 5 cm aufgestellt und durch gleichzeitiges Berühren mit zwei \pm geladenen Leydener Flaschen entsprechende Ladungen erteilt; die typischen \pm Figuren erscheinen dann sofort rings um beiden Polen, während *zwischen* ihnen sich eine große Zahl *Kraftlinien* ausbildet. Am sichersten entstehen diese Linien, wenn die negative Ladung *früher* als die positive dem betreffenden Zylinderchen zugeführt wird.

1) K. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 474—482. 1900; Rezept: 1 Teil Karmin, 3 Teile Lykopodium, 5 Teile Schwefelblumen.

D. Darstellung „elektrischer Niveaulinien“.

Hierzu Fig. 9 der Taf. IV.

Bei den Versuchen elektrische Kraftlinien auch in Luft mittels Pulver, die auf isolierender Unterlage aufgestreut sind, herzustellen, wurde die in Fig. 9 der Taf. IV wiedergegebene Figur erhalten, die, wenn auch nur in groben Zügen, immerhin ein ganz gutes Bild des Niveaulinienverlaufes zwischen zwei geladenen Kugeln gibt. (Die Aufsetzstellen der Elektroden sind in der Photographie durch eingeritzte \times Marken gekennzeichnet). Die Versuchsanordnung war dabei folgende: auf eine *gut* isolierende, polierte Hartgummiplatte, auf der zwei mit einer 20-plattigen Töplerschen Influenzmaschine in Verbindung stehende Elektroden (gegenseitiger Abstand 10—13 cm) aufsaßen, wurde feinkörniger Sand aufgestreut, der sich dann, nach kurzer Tätigkeit der Influenzmaschine, in breiten Linien senkrecht zu den Kraftlinien, in „Niveaulinien“ anordnete.

Die Entstehung dieser „*elektrischen Niveaulinien*“ aus der Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten der Unterlage, der Luft und der Sandkörnchen zu erklären, erscheint kaum möglich; vielmehr sind diese Linienanordnungen wohl nur das Resultat Bjerknesscher *hydrodynamischer Kräfte*. — Der elektrische Wind, der bei Benutzung solch starker Elektrizitätsquellen von außerordentlicher Lebhaftigkeit ist und der zuerst analog der W. Königschen Theorie der Entstehung der Kundtschen Staubfiguren¹⁾ eine diesen Figuren ähnliche Entstehungsweise vermuten ließ, ist jedoch nicht die Ursache dieser Erscheinung; denn erstens gelang es in keiner Weise, diese „Niveaulinien“ durch künstliche Luftströme (bei einem Aus- und einem Einströmungspunkte) nachzubilden, und zweitens dürfte, wenn der elektrische Wind das Entscheidende für die Entstehung war, die gute Isolationsfähigkeit der Unterlage nicht von so ausschlaggebender Bedeutung sein, wie dies Versuche bewiesen; denn auf weniger gut isolierenden Platten, wie z. B. solchen von Glas, oder von oberflächlich nicht ganz trockenem Hartgummi zeigten sich nie „Niveaulinien“, sondern immer nur

1) W. König, Wied. Ann. 42. p. 353—370 u. p. 549—563. 1891; 43. p. 43—60. 1891; 50. p. 639—658. 1893.

Andeutungen von Kraftlinien, auch wenn, bei voller Beanspruchung der Influenzmaschine, weit lebhaftere Luftkonvektionen stattfanden als bei den der Fig. 9 zu Grunde liegenden Versuchen. — Auch die Mitwirkung von Elektrisierungen der Hartgummioberfläche, entstanden etwa durch das Trockenreiben der Platte, ist auszuschließen, da die gleichen Figuren auch nach Entladung der Oberfläche mittels Flamme erhalten wurden.

Nach allem bisher dabei Beobachteten scheint jedoch folgendes die Entstehungsursache zu sein: von den durch die Hartgummiunterlage isolierten Sandkörnchen werden zunächst die den Polen anliegenden mit den entsprechenden Elektrizitäten geladen, nach der Ladung von den Elektroden abgestoßen und mit großer Geschwindigkeit längs der elektrischen Kraftlinien fortbewegt bis zum Aufprallen an andere, entfernter liegende Sandpartikelchen, die *nicht* elektrisch *geladen*, wodurch ein Austausch von Ladungen bewirkt wird; dieses Spiel, an dem stets eine große Zahl von Sandkörnchen gleichzeitig beteiligt ist, wiederholt sich nun in äußerst schneller Aufeinanderfolge, und zwar, wie man direkt sehen kann, von den Polen aus rasch bis zur Mitte der Platte fortschreitend und so etappenweise Ladungen von Pol zu Pol transportierend, ganz ähnlich wie bei dem „elektrischen Kugeltanz“. Anfänglich geschehen diese Bewegungen *nur* in Richtung der elektrischen Kraftlinien; auf kurze Strecken hin also in nahezu *parallelen* Bahnen. Diese oszillierenden Bewegungen der Sandpartikelchen haben aber dann zur Folge, daß ähnliche *hydrodynamische* Kraftwirkungen zu stande kommen, wie sie zuerst Bjerknes¹⁾ für den Fall der Bewegungen zweier Kugeln in einer Flüssigkeit berechnet hat; also Abstoßung in Richtung der Bewegung (in unserem Falle: in Richtung der elektrischen Kraftlinien) und Anziehung senkrecht dazu. — Teilchen, die bereits in den Niveaulinienrichtungen nebeneinander liegen, bleiben auch während der Oszillationen (die in Kraftlinienrichtungen geschehen) in dieser gegenseitigen Lage, oder nähern sich, falls sie ein wenig voneinander entfernt sind, bis zum gegenseitigen Berühren; hintereinander gelegene Teilchen dagegen werden

1) V. Bjerknes, Rep. der reinen und angewandten Mathematik 1. p. 264. 1876; G. Kirchhoff, Mechanik p. 251. 1877.

in den Kraftlinienrichtungen voneinander entfernt und nebeneinander in Niveaulinien gelagert. — Anordnungen senkrecht zu den Bewegungsrichtungen bleiben also bestehen, während dazu parallele (die im ersten Momente sich andeutungsweise bildenden elektrischen Kraftlinien) zerstört und ihre Teilchen in die Reiben der „stabilen“ Anordnungen gebracht werden.

Ob dieser Erklärungsversuch der Wirklichkeit entspricht, müssen weitere Untersuchungen entscheiden.

Über eine Reihe merkwürdiger und interessanter Erscheinungen, die bei Anstellung der im vorliegenden beschriebenen Versuche beobachtet wurden, insbesondere über das unter gewissen Bedingungen statthabende Auftreten von Figuren in den Suspensionen, die außerordentlich ähnlich jenen zuerst von P. de Heen¹⁾ und neuerdings auch von R. H. Weber²⁾ beschrieben sind, soll später berichtet werden.

Am Schlusse dieser Arbeit drängt es mich, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Professor Dr. F. Richarz für die Anregung zu dieser Arbeit und für die bei der Anfertigung derselben in liebenswürdigster Weise erteilten Ratschläge meinen herzlichsten Dank zu sagen.

E. Verzeichnis der auf der Taf. IV wiedergegebenen Darstellungen des elektrischen Kraft- und „Niveau“-Linienverlaufes.

- Fig. 1. Verlauf elektrischer Kraftlinien zwischen zwei kleinen, geladenen Kugeln.

Darstellung erhalten mittels Suspension von *Glycin* in *Terpentinöl*; ca. $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

- Fig. 2. Elektrische Kraftlinien zwischen zwei geladenen *Kondensatorplatten*; Demonstration eines *homogenen Feldes* und der „*Randwirkungen*“.

Mittels Suspension von *Chininsulfat* in *Terpentinöl*; ca. $\frac{1}{4}$ nat. Gr.

1) P. de Heen, Bull. de l'inst. de Phys. de l'université de Liège. Ser. 2. Prem. fasc. p. 589. 1900.

2) R. H. Weber, Ann. d. Phys. 6. p. 96—103. 1901.

- Fig. 3. Dasselbe Feld, einseitig „gestört“ durch genäherten Leiter (Metallklotz *M*); Hinbiegen der elektrischen Kraftlinien nach *M*.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

- Fig. 4. Metallring zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten; Einbiegen der Kraftlinien in den Ring; Schirmwirkung des Metallringes gegen das Innere hin.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{4}$ nat. Gr.

- Fig. 5. Hartgummiring zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten; fehlende Schirmwirkung (Kraftlinien auch im Innern des Ringes); geringes Ausbiegen der Linien, wegen der etwas niedrigeren Dielektrizitätskonstante des Hartgummis gegenüber jener der Suspension.

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

- Fig. 6. Einbiegen der Kraftlinien in ein Dielektrikum von höherer Dielektrizitätskonstante (Methylalkohol in einer Glaskugel; beide von geringerer Leitfähigkeit als die benutzte Suspension; Glaskugel zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten).

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{4}$ nat. Gr.

- Fig. 7. Ausbiegen bei eingesetztem Dielektrikum von niedrigerer Dielektrizitätskonstante (Glaskugel mit Luft gefüllt).

Suspension: Chininsulfat in Terpentinöl; ca. $\frac{1}{4}$ nat. Gr.

- Fig. 8. Elektrische Kraftlinien zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten.

Dargestellt unter Benutzung einer Suspension von Holzkohlepulver in geschmolzenem Paraffin; Kraftlinienbild, fixiert durch das Erstarren des Paraffins; ca. $\frac{1}{2}$ nat. Gr.

- Fig. 9. „Elektrische Niveaulinien“ zwischen zwei geladenen Kugeln (ihre Aufsetzstellen sind durch \times markiert); ca. $\frac{1}{8}$ nat. Gr.; vgl. p. 838—840.

(Eingegangen 28. März 1903.)

7. *Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung; von W. König.*

(Hierzu Taf. V, Figg. 1—5.)

In einer früheren Arbeit ¹⁾ habe ich den Nachweis geführt, daß in transversal schwingenden Glasplatten zwei Arten von Doppelbrechung auftreten, eine von der Krümmung der Platten, und eine von den scherenden Kräften herrührende. In den Schwingungsbäuchen ist nur die erstere, in den Schwingungsknoten nur die letztere Wirkung vorhanden; an den dazwischen liegenden Stellen treten beide Wirkungen gleichzeitig ein. Ich habe auch in jener Abhandlung bereits darauf hingewiesen, daß diese Wirkungen doppelter Art bei statischer Verbiegung einer Platte ebenfalls auftreten. In der bisherigen Literatur über diesen Gegenstand sind, soweit meine Kenntnis reicht, nur die Erscheinungen der ersten Art beschrieben worden, die von der Krümmung herrührenden Interferenzstreifen, die Brewster zuerst beobachtet hat.²⁾ Die schwächeren Wirkungen der scherenden Kräfte scheint man nicht beachtet zu haben. Aber gerade in ihnen enthüllt sich das feinere Spiel der elastischen Kräfte bei der Biegung, wie es de Saint-Venant in seiner exakten Theorie der Biegung behandelt hat, und die genaue Untersuchung der optischen Erscheinungen kann daher ein vortreffliches und bequemes Hilfsmittel abgeben, um die aus den Theorien der Elastizität gewonnenen Resultate auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Von diesen Gesichtspunkten aus will ich im folgenden versuchen, eine genaue Beschreibung der Erscheinungen zu geben und den Zusammenhang der optischen mit den elastischen Vorgängen darzulegen. Leider bildet bei diesen Untersuchungen die schwache Doppelbrechung, welche die Platten infolge mangelhafter Kühlung auch in nicht gebogenem Zustande besaßen³⁾, ein sehr störendes Moment. Während sie bei der starken Doppelbrechung infolge der Plattenkrümmung sich nur in einer geringfügigen Ortsveränderung der einzelnen Interferenzstreifen geltend macht,

1) W. König, Ann. d. Phys. 4. p. 1—40. 1901.

2) D. Brewster, Phil. Trans. 1816. I. Teil. p. 156—178.

3) W. König, Ann. d. Phys. 4. p. 2. 1901.

führt sie in den Gebieten schwacher Doppelbrechung zu beträchtlichen Verzerrungen, der aus den elastischen Deformationen folgenden Erscheinungen, und beeinträchtigt die Deutlichkeit und Genauigkeit des Vergleiches zwischen den optischen und den elastischen Vorgängen. Der quantitativen Prüfung dieses Zusammenhanges ist durch die beschriebene Eigentümlichkeit des benutzten einfachen Spiegelglases, zu der sich noch eine weitere Störung durch das Vorhandensein von Schlierenflächen parallel zur Plattenebene gesellte, eine ziemlich enge Grenze gesteckt. Eine exakte quantitative Prüfung würde die Anwendung von fehler- und spannungsfreiem Glase verlangen, das nur mit unverhältnismäßig großen Kosten zu beschaffen sein würde. Zunächst genügen die unvollkommenen Glasplatten, um den Charakter der Erscheinungen kennen zu lernen.

Wie bei den schwingenden Platten die beiden Arten der Doppelbrechung in den Bäuchen und Knoten getrennt voneinander auftreten, so sind auch bei statischer Verbiegung Fälle möglich, in denen nur die eine oder nur die andere Art der Doppelbrechung an bestimmten Stellen des Stabes auftritt. Diese beiden Fälle sind wichtig, weil sie gestatten, die Eigentümlichkeiten jeder Art von Doppelbrechung für sich zu untersuchen. Ich bespreche zunächst diese Fälle und dann den allgemeinen Fall, in dem beide Formen der Doppelbrechung gleichzeitig auftreten.

1. Gleichförmige Biegung.

Man kann einen Stab so biegen, daß gar keine scherennden Kräfte in ihm auftreten, sondern nur die von der Krümmung bedingten Zug- und Druckspannungen in Richtung der Längserstreckung des Stabes. Man erreicht dies in bekannter Weise dadurch, daß man den Stab über zwei Schneiden biegt, wie es Fig. 1 andeutet. Zwischen den Schneiden tritt dann der geforderte Zustand ein. In jedem Element dieses Teiles

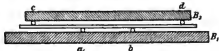


Fig. 1.

des Stabes werden die Längsspannungen durch die gleichen Spannungen der Nachbarelemente aufrecht erhalten. Der Spannungszustand ist daher in der ganzen Längserstreckung dieses Teiles des Stabes der gleiche, und die Biegungskurve

dieses Teiles muß ein Kreis sein. Betrachtet man eine in dieser Weise gebogene Glasplatte zwischen gekreuzten Nicols, so treten, wenn die Polarisationssebenen der Nicols 45° mit der Längserstreckung der Platte bilden, die Brewsterschen Streifen auf und müssen innerhalb des ganzen, kreisförmig gebogenen Teiles der Platte mit unveränderlichem Abstand von der Mittellinie verlaufen. Dreht man aber die Nicols so, daß ihre Polarisationssebenen senkrecht und parallel zur Längserstreckung der Platte liegen, so muß die Platte vollkommen dunkel erscheinen. Der Versuch bestätigte dies.

Die Platte wurde in der durch Fig. 1 dargestellten Weise gebogen. Auf das starke Brett B_1 werden die Lager a und b aufgelegt, entweder scharfe Metall- oder Holzschneiden, oder runde Metallstäbe, darüber die Glasplatte, auf diese in der Nähe ihrer Enden zwei entsprechende Lager und über diese das starke Brett B_2 . Dieses wird entweder in der Mitte belastet, oder die beiden Bretter werden durch eine Schraubzwinge zusammengeschraubt. Zwischen den mittleren Schneiden a und b ist dann bei gekreuzten Nicols in der ersten Lage (45° gegen die Horizontale) der gleichmäßige Verlauf der Interferenzerscheinung sehr schön wahrzunehmen. Schwieriger ist es, die Biegung der Platte so fein zu regulieren, daß die Platte in der zweiten Nicollage vollkommen dunkel bleibt. Im allgemeinen war das bei den oben erwähnten Formen der Auflager niemals vollständig zu erreichen; vielmehr blieb bei Drehung der gekreuzten Nicols auch in der Stellung der größten Dunkelheit noch eine wenn auch schwache Interferenzerscheinung in Gestalt eines dem Brewsterschen ähnlichen Streifensystems wahrnehmbar, wenigstens bei Beobachtung mit einer intensiven Lichtquelle (Auerlicht). Diese Erscheinung rührt davon her, daß auch zwischen den mittleren Auflagern noch schwache scherende Kräfte vorhanden sind. Die Schwierigkeit, diese gänzlich auszuschließen, hat ihren Grund offenbar in dem Umstande, daß die Platte auf jedem Auflagerpaare nur in drei Punkten aufliegt, und daß bei der zufälligen Lage dieser Auflagerpunkte die beiden Kräftepaare, die die Biegung bewirken, im allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen werden. Auch Überdecken der Auflager in ihrer ganzen Länge mit Leder- oder Gummipplatten verbesserte die Unregelmäßigkeit nicht wesentlich. Dagegen gelang es, sie durch

folgenden Kunstgriff zu vermeiden. Auf jedes Auflager wurden an zwei bestimmten Punkten schmale Gummischiebchen gelegt; diese bildeten nun die Angriffspunkte der auf die Platte wirkenden Kräfte. Sie konnten so orientiert werden, daß die entsprechenden Angriffspunkte für alle vier Auflager in einer zur Längsrichtung der Platte parallelen Vertikalebene lagen. Auf diese Weise gelang es, eine vollkommen scherungsfreie Biegung zwischen a und b durch genau zentrale oder symmetrische Belastung von B_2 zu erhalten. Die Platte blieb dann fast in der ganzen Erstreckung zwischen a und b vollkommen dunkel. Eine Störung der oben beschriebenen Art trat jetzt nur noch in der Nähe der Auflager ein, wo ja die Bedingungen der Theorie nicht streng erfüllt sind.

2. Biegung mit Wendepunkt.

Während der soeben erörterte Fall der Erscheinung im Schwingungsbanche entspricht, kann man die Erscheinungen im Schwingungsknoten statisch nachahmen, indem man die Platte in der durch Fig. 2 veranschaulichten Weise verbiegt.

Hier wird die Platte an den Auflagern m_1 , m_3 , m_5 nach oben, an den Stellen m_2 und m_4 nach unten gedrückt. Zwischen m_2



Fig. 2.

und m_3 und ebenso zwischen m_3 und m_4 findet ein allmählicher Übergang von der Krümmung im einen, zur Krümmung im anderen Sinne statt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null; die Brewsterschen Streifen verschwinden hier. Bei dieser Art der Verbiegung treten scherende Kräfte auf, die in den Wendepunkten allein zur Geltung kommen und hier eine Doppelbrechung von genau der gleichen Art, wie in den Knotenpunkten der schwingenden Platte, bewirken.

Als die in der beschriebenen Weise gebogene Glasplatte zwischen gekreuzten Nicols in der 45° -Lage an der Stelle des Wendepunktes untersucht wurde, zeigte es sich, daß die beiden neutralen Mittellinien des rechten und des linken Streifensystems sich an der Knotenstelle nicht zu einer die ganze Höhe der Platte ausfüllenden Dunkelheit vereinigten. Sie bogen vielmehr aneinander vorbei so, wie es die photographische Aufnahme der Erscheinung, Fig. 1, Taf. V erkennen läßt. Znr

richtigen Beurteilung ist es erforderlich hinzuzufügen, daß der betrachtete Wendepunkt der zwischen m_2 und m_3 gelegene war, d. h. daß die nach oben konvex gekrümmten Teile des Stabes zur Rechten, die nach unten konvex gekrümmten zur Linken der betrachteten Knotenstelle liegend zu denken sind. Das beobachtete Verhalten der Platte erklärt sich aus ihrer natürlichen Doppelrehnung. Die Platte verhält sich in der Mitte so, als wäre sie dauernd in ihrer Längsrichtung gedehnt, an den Rändern aber umgekehrt so, als wäre sie in der Längsrichtung zusammengedrückt. Daher bleibt an der Knotenstelle die Mitte hell und schließt sich an die durch die Krümmung hervorgerufenen Dehnungsgebiete rechts oben und links unten an. Dieses zentrale Dehnungsgebiet der natürlichen Doppelrehnung der Platte wird oben und unten durch neutrale Streifen begrenzt. Da wo diese die Knotenlinie schneiden, erscheint die letztere dunkel. Unmittelbar an den Rändern aber tritt wieder Aufhellung ein infolge der natürlichen Kompression der Masse, die hier herrscht. Diese wird aber in den Gebieten der durch die Krümmung hervorgebrachten Dehnung durch die mit der Entfernung von dem Wendepunkte wachsende Dehnung schließlich kompensiert; daher greifen die neutralen Streifen rechts oben und links unten in diese Dehnungsgebiete über.

Bei entgegengesetzter Verbiegung der Platte, wie sie etwa in dem rechts von m_3 gelegenen Wendepunkte statthat, ist natürlich auch der Verlauf der Streifen der entgegengesetzte. Daher waren diese Streifen bei den schwingenden Platten nicht wahrzunehmen, da sie sich während der Schwingung abwechselnd nach oben und nach unten hogen. Sie sind daher nicht zu verwechseln mit denjenigen Streifen, die ich auf p. 29 und 30 meiner Abhandlung über die schwingenden Platten beschrieben habe. Diese traten auf, wenn die Nicols aus ihrer 45° -Stellung nach rechts oder links herausgedreht wurden; sie hatten für entgegengesetzte Verbiegungen der Platte die gleiche Lage und erklären sich, wie ich an der genannten Stelle angedeutet habe, aus dem Zusammenwirken der scherennden Kräfte und der Längsspannungen. Auch bei der statischen Verbiegung machten sich diese Wirkungen geltend. Wurden die gekreuzten Nicols aus der 45° -Lage nach links herausgedreht (Fig. 3 b, der ersten Abhandlung), so blieben zwar

die Enden der Streifen an den Plattenrändern in ihrer Lage — an diesen Stellen ist eben die Doppelbrechung überhaupt gleich Null. Die übrigen Teile aber, besonders die gekrümmten Teile in der Nähe der Knotenlinie, verschoben sich, und zwar am linken Streifen nach links oben, am rechten nach rechts unten, und diese Erscheinung trat in beiden Wendepunkten in demselben Sinne ein. Im linken bewirkte sie nur eine Verflachung der Streifen, im rechten dagegen eine vollständige Umkehrung des Verlaufes, indem der linke Interferenzstreifen sich nach links oben, der rechte nach rechts unten krümmte. Die Streifen hatten dann also im rechten und im linken Wendepunkt sehr nahe das gleiche Aussehen. Es ist verständlich, daß eine Erscheinung dieser Art auch bei den Schwingungen mit ihren wechselnden Verbiegungen sichtbar war. Wurden die Nicols nach rechts aus ihrer 45° -Lage herausgedreht, so war in beiden Wendepunkten die Wirkung natürlich umgekehrt. Ich werde auf die genauere Theorie dieser Erscheinungen unten noch einmal zurückkommen.

Werden endlich die gekreuzten Nicols parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte eingestellt, so zeigt die Stelle des Wendepunktes und ihre Umgebung eine gleichmäßige, nach den Rändern hin abnehmende Erhellung, etwa bis zum Weiß der ersten Ordnung. Es herrscht hier also in der ganzen Quererstreckung der Platte eine Doppelbrechung, deren Achsen 45° mit der Längsrichtung der Platte bilden. Durch Zwischenschalten von Glimmerplatten oder von gepreßtem Glas ließ sich leicht feststellen, daß die Dehnungsrichtung (die positive Achse der Doppelbrechung“, vgl. p. 29 der früheren Abhandlung) die positiven Quadranten, d. h. die Quadranten des Dehnungsgebietes halbiert. Diese Erscheinungen charakterisieren die optischen Wirkungen der Schubkraft. An ihnen läßt sich nun auch mit Leichtigkeit die Frage entscheiden, wie sich die Schubkräfte über den Querschnitt in Richtung der Dicke verteilen. Zu dem Ende wurde zwischen dem Analysator und der Glasplatte, dicht vor der letzteren, ein Gipskeil eingeschaltet, der so geschnitten war, daß seine Achsen 45° mit der Kante des Keils bildeten. Er wurde so vor der Platte aufgestellt, daß die Interferenzstreifen vertikal, d. h. in Richtung der Dicke über die Platte hinweggingen. Um der größeren Schärfe wegen den Nullstreifen beobachten zu können,

wurde über den Gipskeil noch eine Glimmerplatte in Subtraktionsstellung gelegt. Fig. 2 a, Taf. V gibt eine photographische Aufnahme dieses Streifens bei ungebogener Platte, Fig. 2 b, Taf. V bei starker Deformation. Es ist auf das deutlichste sichtbar, daß die Doppelbrechung an den Rändern der Platte Null, in der Mitte am größten ist. Auch das von de Saint-Venant aufgestellte quadratische Gesetz für die Abnahme der scherenden Kraft von der Mitte nach den Rändern zu ¹⁾ läßt sich ohne Zwang auf die Gestalt des Interferenzstreifens in Fig. 2 b, Taf. V anwenden.

Die von der Krümmung herrührende Doppelbrechung ist aber nicht bloß im Vertikalschnitt des Wendepunktes, sondern außerdem längs der ganzen Erstreckung des Stabes in der neutralen Mittellinie gleich Null. Die von den scherenden Kräften hervorgebrachte Doppelbrechung kommt daher auch in der neutralen Mittellinie, ebenso wie im Wendepunkte vollständig rein zur Erscheinung. Wenn man die Platte zwischen gekreuzten Nicols in der zuletzt beschriebenen Lage untersucht, so sieht man, wie sich die im Wendepunkte erscheinende Erhellung nach beiden Seiten hin in die neutrale Mittellinie hinein fortsetzt bis zu den Auflagerpunkten. Je zahlreicher mit der Annäherung an die Stellen stärkster Krümmung die Brewsterschen Interferenzstreifen werden und je schmaler infolgedessen die neutrale Mittellinie wird, um so schmaler wird auch diese zentrale Erhellung bei der zweiten Nicollage. Ein Vergleich der in Fig. 3, Taf. V wiedergegebenen Aufnahmen der beiden Erscheinungen für drei verschiedene Stellen eines gebogenen Stabes läßt dies deutlich erkennen. Noch schärfer springt diese Wirkung der scherenden Kräfte in die Augen, wenn man einen nach dem Schema der Fig. 1 gebogenen Stab an der Stelle seiner mittleren Auflager untersucht. Fig. 4 a, Taf. V zeigt die Erscheinung für die zweite Nicollage am Auflager *a*. Hier scheidet der Vertikalschnitt des Auflagers das äußere (linke) Gebiet der Biegung unter dem Einfluß der scherenden Kräfte von dem inneren (rechten) Gebiete der kreisförmigen, schublosen Biegung. Infolgedessen erscheint die neutrale Mittellinie auf der linken Seite des Bildes hell bis zum Vertikalschnitt des Auflagers; hier bricht die Wirkung der Schubkraft plötzlich ab.

1) Vgl. die mehrfach genannte Abhandlung von mir p. 87.

Schaltet man den oben bereits benutzten Gipskeil bei dieser Untersuchung zwischen Glasplatte und Analysator, so zeigt der Interferenzstreifen in der Mitte eine Ausbuchtung entsprechend der Doppelbrechung in der neutralen Mittellinie. Fig. 4 b, Taf. V zeigt auf der linken Hälfte diese Erscheinung, während der Interferenzstreifen auf der rechten Hälfte, im Gebiet der schublosen Biegung, ohne derartige Störung verläuft.

Untersucht man die optische Wirkung der scherenden Kräfte einmal zwischen den Lagern a und c , das andere Mal zwischen b und d , so sind die Erscheinungen an beiden Stellen die gleichen, nur mit vertauschtem Sinn der optischen Achsen. Bei Beobachtung mit dem Gipskeil ist daher die Richtung der Ausbuchtung des Interferenzstreifens an den beiden Stellen entgegengesetzt, wie Fig. 5 a und 5 b, Taf. V zur Anschauung bringt. Ebenso ist natürlich das Vorzeichen dieser Doppelbrechung das entgegengesetzte zu beiden Seiten eines Auflagers bei Biegung über eine einzige Kante oder im Falle der Fig. 2.

Die Größe der Ausbuchtung des Interferenzstreifens gibt endlich ein Maß für die Stärke der von der Scherung hervorgerufenen Doppelbrechung an den verschiedenen Punkten eines gebogenen Stabes. Mißt man die Größe der Ausbuchtung auf einer über den Gipskeil gelegten Teilung, so findet man, daß dieser optische Effekt der scherenden Kräfte in der ganzen Längserstreckung von einem Auflager bis zum nächsten konstant ist. Auch dies steht mit der Theorie der Biegung im Einklang. Denn die Konstanz der Schubkraft zwischen zwei Auflagern ist ja die Bedingung, aus der man die Gleichung des gebogenen Stabes beim statischen Problem herleitet. Ist

$$P = \frac{Ed^3}{12} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

die Schubkraft (vgl. Gleichung (2) der früheren Abhandlung), so ist

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

die Gleichung des schwingenden Stabes,

$$O = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

die Gleichung des statisch verbogenen Stabes.

Hier tritt nun auch der Unterschied in der Beanspruchung der Platte bei der statischen Verbiegung und bei der Schwin-

gung auf das deutlichste hervor. Denn bei der schwingenden Platte hat die von der Schubkraft erzeugte Doppelbrechung im Knoten ein Maximum und nimmt nach den Bäuchen zu stetig bis zu Null ab. Um diesen Unterschied genau zu formulieren, will ich die entsprechenden Formeln für die Gestalt der statisch verbogenen und der schwingenden Platte und für die Größe der Schubkraft in beiden Fällen nebeneinander stellen, wobei die statische Verbiegung der Platte nach dem Schema der Fig. 2 so ausgeführt zu denken ist, daß die Abstände benachbarter Auflager gleich den Abständen benachbarter Schwingungsbäuche der schwingenden Platte sein sollen. Die Gleichung des gebogenen Stabes hat die allgemeine Lösung:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ich beschränke die Betrachtung auf einen Teil des Stabes zwischen zwei Auflagern. Der Anfangspunkt des Koordinatensystems soll im Wendepunkte oder im Knoten liegen; die Stellen der Auflager, die Bäuche, sollen in den Abständen $\pm x_0$ vom Knoten liegen und die Verbiegung y soll in ihnen die Größe $\pm a$ haben. Endlich soll in den Bäuchen $\partial y / \partial x = 0$ sein, und im Wendepunkte soll die Krümmung, die in erster Annäherung durch $\partial^2 y / \partial x^2$ ausgedrückt wird, sich nicht sprunghaft, sondern stetig ändern. Aus diesen Bedingungen folgt $B = 0$ und $D = 0$,

$$C = -3Ax_0^2 \quad \text{und} \quad A = -\frac{a}{2x_0^3},$$

so daß die Gestalt der Platte durch die Gleichung gegeben ist:

$$y = -\frac{a}{2x_0^3}x^3 + \frac{3}{2}\frac{a}{x_0}x,$$

oder, wenn man $x/x_0 = \xi$ setzt

$$y = \frac{3}{2}a\xi - \frac{a}{2}\xi^3,$$

wobei ξ zwischen -1 und $+1$ zu nehmen ist. Die Krümmung der Platte hat dann den Betrag

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{3a}{x_0^3}\xi$$

und die Schubkraft hat den konstanten Wert

$$P = -\frac{E d^3 a}{4 x_0^3}.$$

Die Form der schwingenden Platte ist durch die in der früheren Abhandlung entwickelten Gleichungen gegeben. Wenn man die x nicht, wie es dort geschehen, von dem einen Ende, sondern von der Mitte der Platte aus rechnet, so kann man den Ausdruck für y auf die Form bringen:

$$y = \frac{a}{1 + \sqrt{\cos p}} \left\{ \cos \frac{px}{l} + \frac{\sqrt{\cos p}}{2} \left(e^{+\frac{px}{l}} + e^{-\frac{px}{l}} \right) \right\} \sin 2\pi n t,$$

wobei a die Amplitude in der Mitte der Platte und p für den Fall der Schwingung mit vier Knoten sehr nahe gleich $7\pi/2$ ist. Da infolgedessen $\cos p$ eine sehr kleine Größe ist, so ist, wenigstens für kleine x , das zweite Glied in der Klammer zu vernachlässigen. Man wird also zwischen dem mittleren Schwingungsbauch und den benachbarten Knoten die Gestalt der Platten im Maximum ihrer Ansbiegung sehr nahe als eine Sinusform ansehen können, d. h.

$$y = a \sin \frac{\pi}{2} \xi,$$

wenn ξ vom Knoten bis zum Bauch von 0 bis 1 anwächst. Dementsprechend variiert also auch die Krümmung nach dem Sinusgesetz:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{3a}{x_0^3} \sin \frac{\pi}{2} \xi$$

und die Schubkraft nach der Cosinusformel:

$$P = -\frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{E d^3 a}{4 x_0^3} \cos \frac{\pi}{2} \xi.$$

Aus diesen Formeln folgt endlich, daß bei gleicher Größe der Verbiegung (d. h. gleichem a) die Krümmung im Bauch der schwingenden Platte um $\pi^2/12$ ($= 0,822$) kleiner ist als über den Auflagern bei statischer Verbiegung, und daß andererseits die scherende Kraft im Knoten der schwingenden Platte um $\pi^2/24$ ($= 1,293$) größer ist als im Wendepunkt der statisch gebogenen. Wenn auch diese feineren quantitativen Unterschiede bei den Beobachtungen nicht zum Ausdruck kamen, so war doch die charakteristische Verschiedenheit in dem Verlauf der durch die Schubkraft bedingten Doppelbrechung längs der neutralen Mittellinie auf das deutlichste wahrnehmbar.

Es sollen nun drittens, die optischen Erscheinungen in denjenigen Teilen eines gebogenen Stabes untersucht werden, in denen scherende Kräfte mit den Zug- oder Druckkräften gleichzeitig auftreten.

8. Allgemeiner Fall. Zusammenwirken von Längsspannung und Scherung.

Die Versuche bestätigen, wie wir gesehen haben, die Forderung der Theorie, daß die scherenden Kräfte in der ganzen Längserstreckung des Stabes zwischen zwei Auflagern konstant sind. In jedem Vertikalschnitt werden die scherenden Kräfte dann entsprechend der de Saint-Venantschen Formel so verteilt sein, wie es die optische Untersuchung für die Knotenlinie unmittelbar veranschaulicht. Daraus folgt, daß in allen Punkten eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes Längsspannung und Scherung gleichzeitig auftreten müssen, mit alleiniger Ausnahme des oberen und unteren Randes, an dem die Scherung gleich Null ist, sowie der Knoten- und der neutralen Mittellinie, in denen die Längsspannung gleich Null ist.

Es ist zunächst zu untersuchen, zu welcher Resultante sich die gleichzeitig auftretenden Spannungs- und Schubkräfte zusammensetzen werden. Wir gehen von den bekannten Gleichungen für die elastischen Spanningskräfte im Innern eines Körpers aus¹⁾:

$$T \cdot \cos \pi = t_{11} \cos p + t_{21} \cos q + t_{31} \cos r,$$

$$T \cdot \cos \kappa = t_{12} \cos p + t_{22} \cos q + t_{32} \cos r,$$

$$T \cdot \cos \rho = t_{13} \cos p + t_{23} \cos q + t_{33} \cos r.$$

Hier bedeuten π , κ , ρ die Winkel der Kraft T mit den Koordinatenachsen, p , q , r die Winkel der Normale derjenigen Fläche, auf die die Kraft T pro Flächeneinheit wirksam ist. In unserem Falle sind von Normalspannungen nur t_{11} , von Tangentialkräften nur $t_{21} = t_{12}$, vorhanden. T liegt daher in der XY -Ebene. Nehmen wir auch die Normale der Fläche in dieser Ebene an, d. h.

$$\cos r = 0, \quad \cos q = \sin p,$$

so lauten die Gleichungen

$$T \cos \pi = t_{11} \cos p + t_{12} \sin p,$$

$$T \sin \pi = t_{12} \cos p,$$

folglich

$$T^2 = t_{11}^2 \cos^2 p + t_{12}^2 + t_{11} t_{12} \sin 2p$$

und

$$\operatorname{ctg} \pi = \frac{t_{11}}{t_{12}} + \operatorname{tg} p.$$

1) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper p. 14.

Für die Richtung der Hauptdrucke, für die $\pi = p$ ist, ergibt sich daraus die Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{2 t_{12}}{t_{11}}.$$

Setzt man

$$p = p_m + v,$$

d. h. zählt man die Winkel der Normale nicht von der x -Achse, sondern von der Hauptdruckachse aus, die den Winkel p_m mit der x -Achse bildet, so ist allgemein:

$$T^2 = \frac{1}{2} t_{11}^2 + t_{12}^2 + \frac{1}{2} t_{11}^2 \sqrt{1 + \frac{4 t_{12}^2}{t_{11}^2}} \cos 2 v,$$

und die Hauptdrucke sind

$$\text{für } v = 0 \quad T_1 = \frac{t_{11}}{2} + \sqrt{\frac{t_{11}^2}{4} + t_{12}^2},$$

$$\text{für } v = \frac{\pi}{2} \quad T_2 = \frac{t_{11}}{2} - \sqrt{\frac{t_{11}^2}{4} + t_{12}^2}.$$

Das gegebene System von Kräften ist also gleichwertig einer Zugspannung T_1 in der durch den Winkel p_m bestimmten Richtung und einer Druckspannung T_2 senkrecht dazu. Diese Richtungen sind die Achsen der Doppelbrechung. Die Größe der Doppelbrechung ist durch die Differenz der zugehörigen Hauptdilatationen bestimmt. Bedeutet wieder E den Elastizitätsmodul, μ das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdilatation, so berechnen sich die Hauptdilatationen α und β nach den Gleichungen:

$$\alpha = \frac{T_1}{E} - \frac{\mu T_2}{E},$$

$$\beta = \frac{T_2}{E} - \frac{\mu T_1}{E},$$

und daraus die Doppelbrechung, entsprechend der in der früheren Arbeit entwickelten Formel¹⁾

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q)(\alpha - \beta) \\ &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q) \frac{1 + \mu}{E} (T_1 - T_2) \\ &= \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q) \frac{1 + \mu}{E} \sqrt{t_{11}^2 + 4 t_{12}^2}. \end{aligned}$$

1) l. c. p. 83.

Um aus diesen allgemeinen Gleichungen die speziellen Formeln für Größe und Richtung der Doppelbrechung in den verschiedenen Punkten des gebogenen Stabes zu erhalten, sind für t_{11} und t_{12} die aus der Theorie der Biegung folgenden besonderen Werte einzusetzen:

$$t_{11} = E \cdot y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$t_{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{E \cdot d^2}{12} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right).$$

Nehmen wir im besonderen den oben behandelten Fall einer Biegung mit Wendepunkt, so folgt aus der dort entwickelten Gleichung für den gebogenen Stab:

$$t_{11} = - \frac{3 a E}{x_0^3} x \cdot y,$$

$$t_{12} = - \frac{3}{2} \frac{a \cdot E \cdot d^2}{x_0^3} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right).$$

Danach sind an einem Punkte des Stabes, der durch die Koordinaten x und y bestimmt ist, die Winkel p_m und $p_m + \pi/2$, welche die Achsen der Doppelbrechung mit der Längsachse des Stabes bilden, durch die Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{d^2}{4 x y} \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2}\right).$$

Da die y nur im Verhältnis zur Dicke des Stabes in diese Formel eingehen, so möge noch die Bezeichnung η für das Verhältnis $y : d/2$ eingeführt werden. Die Gleichung lautet dann

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{d}{2 x \cdot \eta} (1 - \eta^2).$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, daß die Lage der Achsen an jeder Stelle unabhängig von der Größe der Verbiegung der Platte ist. Sie haben daher auch in der schwingenden Platte während der Schwingung eine konstante Lage, woraus sich die in der früheren Arbeit p. 30 und 31 erwähnten Beobachtungen erklären. An derselben Stelle der früheren Arbeit habe ich durch eine Zeichnung (Fig. 4), den Verlauf der Achsenrichtungen in der Umgebung des Knotens angedeutet. Das genaue Gesetz dieses Verlaufs ist nunmehr durch die obige Gleichung gegeben. In der Knotenlinie ($x = 0$)

und in der Mittellinie ($\eta = 0$) ist $p_m = 45^\circ$. Von diesen Lagen aus findet beim Übergang in die Gebiete der Dehnung oder Zusammendrückung eine allmähliche Drehung der Achsenrichtungen statt.

Faßt man einen bestimmten Vertikalschnitt ins Auge, entsprechend einem bestimmten Werte von x , so vollzieht sich diese Drehung in der oberen Hälfte in dem einen, in der unteren in dem entgegengesetzten Sinne, vom Winkel 45° in der Mittellinie an bis zum Winkel 0° bez. 90° am Rande der Platte, d. h. für $\eta = \pm 1$. In der Nähe der Knotenebene ist diese Drehung eine sehr allmähliche entsprechend den geringen Werten, die die Längsspannungen hier besitzen. In dem Vertikalschnitt z. B., der von der Knotenlinie um die Dicke der Platte absteht ($x = d$), gibt die Formel folgende Wertepaare von η und p_m in der einen Plattenhälfte.

$\eta = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$p_m = 45^\circ$	39,3°	33,7°	28,3°	23,2°	18,4°	14,0°	10,0°	6,4°	3,0°	0°

Je weiter man sich von der Knotenebene entfernt, um so schneller vollzieht sich von der Mittellinie aus der Abfall zu kleinen Werten von p_m . In einem Abstände z. B., der das 20fache der Dicke beträgt, würde man die Wertepaare haben:

$\eta = 0$	0,1	0,2	0,3	etc.
$p_m = 45^\circ$	7°	3,3°	2,2°	etc.

An den Stellen starker Krümmung beschränken sich also die merklichen Abweichungen von dem Verhalten kreisförmig gebogener Platten auf den mittelsten Teil der Platte. Qualitativ bestätigen sich diese Folgerungen der Theorie ganz gut an der Erfahrung. Die genaue quantitative Prüfung der Formel stößt auf Schwierigkeiten infolge der Unvollkommenheit der benutzten Glasplatten. Der Verlauf der p_m läßt sich ja nur in den Gebieten mit einiger Sicherheit messend verfolgen, in denen die Längsspannungen noch relativ geringe Werte haben. Unter diesen Umständen aber machen sich neben den durch die Biegung hervorgerufenen Längsspannungen die natürlichen Spannungszustände der Platte geltend und bedingen beträchtliche Abweichungen von dem von der Formel geforderten Verlaufe der Erscheinung. Man könnte versuchen, diesem

Einfluß durch ein Zusatzglied zu dem Ausdruck für t_{11} in unseren Gleichungen Rechnung zu tragen, indem man für den Verlauf dieser natürlichen Spannungen rein empirisch eine Formel aufstellt. Wie schon mehrfach erwähnt, ist die Platte in der Mitte in gedehntem, am Rande in gedrücktem Zustande, wenn man die Längsrichtung der Platte als Dehnungs- und Druckrichtung nimmt. Die neutralen Zonen liegen etwa bei $\frac{1}{4}d$ und $\frac{3}{4}d$, also bei $\eta = \frac{1}{2}$. Es mögen versuchsweise die natürlichen Spannungen dargestellt werden durch die Formel

$$t'_{11} = \vartheta(1 - 4\eta^2).$$

Dann geht die Gleichung für p_m über in die Form

$$\operatorname{tg} 2 p_m = C \frac{1 - \eta^2}{\eta + D(1 - 4\eta^2)}.$$

Darin ist gesetzt:

$$C = \frac{d}{2x},$$

$$D = \frac{2\vartheta \cdot x_0^2}{3aEdx}.$$

Die Größe von D läßt sich in einfacher Weise aus Messungen der Doppelbrechung ableiten. Es sei Δ_0 die Phasendifferenz infolge der natürlichen Längsspannung in der Mitte der Platte, die man am ungebogenen Stabe direkt messen kann. Sie ergab sich zu 0,04. Es sei ferner Δ_r die Phasendifferenz, die in dem betrachteten Vertikalschnitt am Rande der Platte bei der Biegung gemessen wird. Dann ist

$$D = \frac{\Delta_0}{\Delta_r \pm 3\Delta_0},$$

wohei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Plattenrand, an dem Δ_r gemessen wird, konvex oder konkav gebogen ist. Bei der Kleinheit von Δ_0 genügt es, im allgemeinen $D = \Delta_0/\Delta_r$ zu setzen.

Es wurden nun Messungen folgender Art angestellt: Wenn man die Platte im weißen Licht zwischen gekreuzten Nicols beobachtet, so wandert bei einer gemeinsamen Drehung der beiden Nicols der schwarze Mittelstreifen. Er liegt in jedem Augenblicke an derjenigen Stelle, an der die Achsenrichtungen mit den Polarisationsrichtungen der beiden Nicols zusammenfallen. Als Analysator wurde ein Nicol mit Teilkreis benutzt. Dieser wurde auf bestimmte Winkel seiner Polarisations-

richtung zur Längsrichtung der Platte eingestellt; dann wurde der Polarisator auf Dunkelheit gestellt und nun der Abstand des schwarzen Streifens vom Rande der Platte gemessen. Um Parallaxenfehler zu vermeiden, wurde das Streifensystem aus der Entfernung mit einem Fernrohr mit Okularskala beobachtet. Als Lichtquelle diente ein Auerbrenner. Die Beobachtungen wurden für neun Nicolstellungen in sämtlichen vier Quadranten angestellt, und aus den vier sich wiederholenden Lagen des schwarzen Streifens der Mittelwert genommen. Aus diesen mittleren Abständen des schwarzen Streifens von dem einen Plattenrande und der gleichzeitig auf der Okularskala gemessenen ganzen Dicke der Platte wurden die Werte der η berechnet. An diesen Beobachtungen wurde schließlich die Formel in der Weise kontrolliert, daß die Formel nach η aufgelöst und die Werte von η aus den Werten von p_m und den Konstanten C und D des beobachteten Vertikalschnittes berechnet wurden. Im allgemeinen genügte für diese Berechnung die abgekürzte Formel

$$\eta = \frac{C}{\operatorname{tg} 2 p_m} - D.$$

Ich gebe zwei in dieser Weise ausgeführte Beobachtungsreihen.

1. Es wurde beobachtet im Abstände $x = 6,7$ cm vom Knotenpunkte. Die Dicke der Platte betrug 6,2 mm. Die Gangdifferenz am Rande der Platte betrug eine Wellenlänge. Daraus folgen die Konstanten

$$C = \frac{d}{2x} = 0,046, \quad D = 0,04.$$

Die zu den nachstehend angegebenen Werten von p_m durch die Beobachtung gefundenen und die nach der Formel mit obigen Konstanten berechneten Werte von η sind:

p_m	5	10	15	30	45	60	75	80	85°
$\eta_{\text{beob.}}$	0,17	0,10	0,04	-0,01	-0,03	-0,05	-0,13	-0,19	-0,29
$\eta_{\text{ber.}}$	0,21	0,08	0,02	-0,01	-0,04	-0,07	-0,12	-0,17	-0,27

2. Es wurde beobachtet im Abstände $x = 11$ cm. Die Gangdifferenz am Plattenrande betrug zwei Wellenlängen. Also

$$C = 0,028, \quad D = 0,02.$$

Es wurden beobachtet und berechnet:

p_m	5	10	15	30	45	60	75	80	85°
$\eta_{\text{beob.}}$	0,14	0,07	0,02	-0,02	+0,01	-0,02	-0,07	-0,08	-0,17
$\eta_{\text{ber.}}$	0,14	0,06	0,03	-0,00	-0,02	-0,04	-0,07	-0,10	-0,18

Daß sich diese Beobachtungen durch die Formel ohne Berücksichtigung der natürlichen Doppelbrechung der Platte nicht darstellen lassen würden, geht schon aus der Unsymmetrie des Verlaufes der Zahlen zu beiden Seiten des Mittelwertes ($p_m = 45^\circ$) hervor. Mit der angenommenen Form der Korrektur ergibt sich eine ganz befriedigende Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung.

Nach dieser Darstellung der Achsenlagen erübrigt es schließlich noch, die Stärke der Doppelbrechung in ihrer Abhängigkeit von x und η zu behandeln. Aus der allgemeinen Gleichung für Δ und den Spezialgleichungen für t_{11} und t_{12} folgt

$$\Delta = \frac{b N^2}{\lambda v_0} (p - q)(1 + \mu) \frac{3 a d}{2 x_0^2} \sqrt{x^2 \eta^2 + \frac{d^2}{4} (1 - \eta^2)^2}.$$

Bezeichnen wir wieder die nur von den Längsspannungen herrührende Phasendifferenz am Rande (für $\eta = 1$) im Vertikalschnitt x mit Δ_r , außerdem die nur von den Schubkräften herrührende, von x unabhängige Phasendifferenz in der Mitte (für $\eta = 0$) mit Δ_m , so läßt sich Δ übersichtlicher in der Form schreiben:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_r^2 \eta^2 + \Delta_m^2 (1 - \eta^2)^2}.$$

Aus dieser Formel ist zunächst zu ersehen, daß Δ nur dann Null wird, wenn gleichzeitig $\eta = 1$ und $\Delta_r = 0$ ist. Die Doppelbrechung verschwindet also nur in denjenigen Punkten, in denen der Plattenrand von einer Knotenebene geschnitten wird. An allen übrigen Punkten eines nicht kreisförmig gebogenen Stabes ist stets Doppelbrechung vorhanden. Der Wert der Phasendifferenz Δ hat im allgemeinen seinen kleinsten Betrag in der Mitte (für $\eta = 0$); wenigstens gilt dies, solange $\Delta_r > \sqrt{2} \Delta_m$ ist. Wird bei Annäherung an den Knoten $\Delta_r < \sqrt{2} \Delta_m$, so rückt der Ort der kleinsten Phasendifferenz allmählich nach dem Rande, den er in der Knotenebene erreicht.

Noch einfacher läßt sich der Ausdruck für Δ schreiben, wenn man die Kenntnis der früher definierten Winkelwerte dazu nimmt:

$$\Delta = \frac{\Delta_r \cdot \eta}{\cos 2 p_m}.$$

Vergleicht man diese Formel mit derjenigen, die den Verlauf der Phasendifferenzen in einem kreisförmig gebogenen Stab bei gleicher Biegung (d. h. gleichem Δ_r) angibt:

$$\Delta' = \Delta_r \cdot \eta',$$

so sieht man, daß die gleichen Phasendifferenzen bei nicht kreisförmiger Biegung schon bei geringeren Werten der η erreicht werden. Denn bei gleichem Betrage von Δ und Δ' ist

$$\eta = \eta' \cos 2 p_m.$$

Daraus folgt

$$\eta' - \eta = 2 \eta' \sin^2 p_m.$$

In einiger Entfernung vom Knoten sind wegen des schnellen Abfalles der p_m (vgl. oben p. 855) diese Differenzen nur sehr klein.

Von besonderem Interesse ist die Verteilung der Intensität in dem Interferenzbilde der Platten zwischen gekreuzten Nicols. Bedeutet J die Amplitude des auf die Platte auffallenden Lichtes, d. h. die Amplitude nach dem Durchgang durch den Polarisator, sind die Nicols gekreuzt und bildet die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes den Winkel α mit der Längsrichtung der Platte, so ist die Amplitude des aus dem Analysator austretenden Lichtes gegeben durch die Gleichung:

$$A = J \cdot \sin(2 p_m - 2 \alpha) \sin \pi \Delta.$$

Für die beiden Hauptlagen der Nicols verlaufen daher die Erscheinungen folgendermaßen.

a) Nicolebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte

$$A = -J \cdot \cos 2 p_m \sin \pi \Delta.$$

Bei kreisförmiger Biegung würde die Formel entsprechend lauten:

$$A = -J \cdot \sin \pi \Delta'.$$

In letzterem Falle durchläuft Δ' die Werte von 0 bis Δ_r ; die Intensität des Lichtes ist in der Mitte Null und durchläuft nach dem Rande hin eine Reihe Maxima und Minima, entsprechend der Periodizität von $\sin \pi \Delta'$. Bei nicht kreisförmiger Biegung ist die Erscheinung im wesentlichen die gleiche. Zwar ist in der Mitte Δ nicht gleich 0, sondern gleich Δ_m ; dafür ist aber $\cos 2 p_m = 0$; in der Mitte ist also die Intensität gleich Null. Mit wachsendem η steigt $\cos 2 p_m$ sehr schnell auf Werte nahe gleich 1, wenn man in einiger Entfernung vom Knoten beobachtet. Folglich kommt die Periodizität von $\sin \pi \Delta$ in

gleicher Weise wie bei kreisförmiger Biegung zur Geltung; nur würden die Minima um den geringfügigen Betrag $2\eta \cdot \sin^2 p_m$ nach der Mitte hin verschoben sein.

b) Nicolebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der Platte. In diesem Falle gilt die Formel:

$$A = J \cdot \sin 2p_m \cdot \sin \pi \Delta,$$

während bei kreisförmiger Biegung $A = 0$ sein würde. Da $\sin 2p_m$ in der Mitte gleich 1 ist und mit wachsendem η schnell abnimmt, wenn man nicht in der Nähe des Knotens beobachtet, so beschränkt sich die sichtbare Erscheinung auf den mittleren Teil der Platte. In der Mitte ist $A = J \cdot \sin \pi \Delta_m$, also Helligkeit. Wächst bei schwacher Biegung $\sin \pi \Delta$ mit wachsendem η langsam an, so sieht man in der Mitte einen breiten hellen Streifen. Wird die Biegung stärker, so daß das erste Minimum von $\sin \pi \Delta$ in denjenigen Bereich hineinrückt, in dem $\sin 2p_m$ noch merkliche Werte besitzt, so wird der Streifen dadurch schmaler, aber zugleich wegen der Steigerung von Δ_m heller. Wird endlich die Biegung so stark, daß mehrere Minima und Maxima von $\sin \pi \Delta$ in den Bereich der noch merklichen Werte von $\sin 2p_m$ fallen, so werden neben dem mittleren hellen Streifen noch diese Minima und Maxima mit schnell abnehmender Helligkeit sichtbar. Die gleichen Überlegungen sind auf die drei Aufnahmen Fig. 3a, 3b und 3c, Taf. V anzuwenden. Nur ist hier zu beachten, daß nicht an derselben Stelle beobachtet und die Biegung verändert wurde, sondern die Biegung konstant war und der Beobachtungspunkt verändert wurde. Es ist also für diese drei Aufnahmen Δ_m konstant; C aber um so kleiner, und damit die Änderung von p_m nm so schneller, je größer Δ_r ist. Unter diesen Umständen erhält man bei Fig. 3a einen breiten, bei Fig. 3b einen schmäleren hellen Streifen, während bei Fig. 3c die Maxima und Minima von $\sin \pi \Delta$ bis in das Gebiet der noch merklichen Werte von p_m hineinrücken.

Es mögen endlich noch diejenigen Erscheinungen erklärt werden, welche in der dritten Serie der Abbildungen der Fig. 3, Taf. V dargestellt sind. Sie sind dadurch erhalten, daß bei der soeben besprochenen zweiten Hauptlage der Nicols zwischen Platte und Analysator der oben beschriebene Gipskeil eingeschoben ist. Der Versuch war ursprünglich angestellt, um

die Größe der von der Schiebung herrührenden Doppelbrechung in der Mitte der Platte zu messen. Der Interferenzstreifen des Gipskeiles zeigt aber, außer der zentralen, von Δ_m herrührenden stärkeren Verschiebung noch eine Reihe schwächerer Ausbuchtungen nach beiden Seiten, deren Lagen mit den Lagen der Interferenzstreifen für die erste Nicollage in offenbarem Zusammenhange stehen. Ich will versuchen, auch die Theorie dieser Erscheinungen wenigstens anzudeuten.

Das auf die Platte fallende Licht schwinde in der X -Achse mit der Amplitude J . Beim Durchgang durch die Platte zerlegt es sich in die Komponenten P_1 und P_2 , die nach den Achsen der Doppelbrechung an der durchstrahlten Stelle der Platte gerichtet sind, mit den Koordinatenachsen also den Winkel p_m bilden. Nach dem Durchgange durch die Platte werden diese Komponenten infolge der verschiedenen Verzögerung, die sie in der doppelbrechenden Platte erfahren, die Form haben:

$$P_1 = J \cdot \cos p_m \cdot \sin 2\pi(n t - \delta_1),$$

$$P_2 = -J \cdot \sin p_m \cdot \sin 2\pi(n t - \delta_1).$$

In dem Gipskeil wird jede Komponente wiederum zerlegt nach den Achsen der Doppelbrechung im Gips, die Winkel von 45° mit den Koordinatenachsen einschließen. Wir bilden zunächst diese Komponenten des auf den Gipskeil einfallenden Lichtes:

$$R_1 = P_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right) + P_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right),$$

$$R_2 = -P_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right) + P_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - p_m\right).$$

Diese lassen sich auf die Form bringen

$$R_1 = \frac{J}{\sqrt{2}} A_1 \sin 2\pi\left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \epsilon_1\right),$$

$$R_2 = -\frac{J}{\sqrt{2}} A_2 \sin 2\pi\left(n t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \epsilon_2\right)$$

Nach dem Durchgang durch den Gipskeil haben diese Schwingungen die weiteren Verzögerungen ζ_1 und ζ_2 erfahren. Im Analysator werden sie schließlich auf die Y -Achse reduziert,

die mit den Richtungen von R_1 und R_2 Winkel von 45° bildet. Das aus dem Analysator tretende Licht ist daher gegeben durch die Summe

$$\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{2}}$$

und läßt sich auf die Form bringen:

$$\frac{1}{2} J \cdot B \cdot \sin 2\pi \left(\pi t - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \beta \right),$$

wobei B , auf das es im folgenden allein ankommt, durch die Gleichung bestimmt ist:

$$B^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cos 2\pi (\epsilon_1 - \epsilon_2 + \zeta_1 - \zeta_2).$$

Für A_1 und A_2 , ϵ_1 und ϵ_2 aber ergeben die Zwischenrechnungen folgende Werte:

$$A_1^2 = 1 + \sin^2 \pi \Delta \cdot \sin 4 p_m,$$

$$A_2^2 = 1 - \sin^2 \pi \Delta \cdot \sin 4 p_m,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \epsilon_1 = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2 p_m \right) \operatorname{tg} \pi \Delta,$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \epsilon_2 = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2 p_m \right) \operatorname{tg} \pi \Delta.$$

Daraus folgt schließlich

$$(I) \quad B^2 = 2 - 2 \sqrt{1 - \sin^4 \pi \Delta \cdot \sin^2 4 p_m} \cdot \cos 2\pi (\epsilon + \zeta).$$

In dieser Gleichung bedeutet $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$ die Phasendifferenz, die die beiden Komponenten R_1 und R_2 vor ihrem Eintritt in den Gipskeil besitzen; $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ ist die Phasendifferenz, die der Gipskeil hinzufügt. Da ζ wegen der keilförmigen Gestalt der Gipsplatte längs der X -Achse stetig variiert, so kann zu jedem Werte von ϵ ein Wert $\zeta = -\epsilon$ angegeben werden, der den $\cos(\epsilon + \zeta) = 1$ macht. Es fragt sich, wie verlaufen die Werte von ϵ und welches sind die zugehörigen Werte von B ? Für ϵ ergibt sich aus den obigen Gleichungen die Formel:

$$(II) \quad \operatorname{tg} 2\pi \epsilon = \frac{\sin 2 p_m \cdot \sin 2\pi \Delta}{\cos^2 2 p_m + \sin^2 2 p_m \cos 2\pi \Delta}.$$

Die Diskussion dieser Formel und der Formel für B ergibt folgendes:

1. In der Mitte, $\eta = 0$, wo $\Delta = \Delta_m$, $p_m = 45^\circ$ ist, folgt aus (II) $\epsilon = \Delta_m$ und aus (I)

$$B^2 = 4 \cdot \sin^2 \pi (\epsilon + \zeta),$$

also $B = 0$ für $\zeta = -\Delta_m$. Das entspricht der Streifenverschiebung in der Mitte.

2. Da, wo $\Delta = 1, 2, 3$ ist, d. h. für die Mitten der dunklen Interferenzstreifen bei gekreuzten Nicols in der ersten Hauptlage, ist ebenfalls $B^2 = 4 \cdot \sin^2 \pi (\epsilon + \zeta)$, zugleich aber nach (II) $\operatorname{tg} 2\pi \epsilon = 0$. Das Licht ist an diesen Stellen nach dem Durchgange durch die Glasplatte wieder geradlinig polarisiert in der ursprünglichen Richtung. Die Interferenzstreifen des Gipskeiles haben daher ihre ursprünglichen Lagen, die sie ohne die Glasplatte zwischen den gekreuzten Nicols haben würden.

3. Da, wo $\Delta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc. ist, d. h. für die Mitten der hellen Interferenzstreifen, gilt ebenfalls die Gleichung $\operatorname{tg} 2\pi \epsilon = 0$. Hier ist aber

$$B^2 = 2(1 - \cos 4p_m \cdot \cos 2\pi(\epsilon + \zeta)).$$

An diesen Stellen ist das Licht nach dem Durchgange durch die Glasplatte ebenfalls wieder geradlinig polarisiert, aber seine Schwingungsrichtung ist gegen die X -Axe um den (im allgemeinen kleinen) Winkel $2p_m$ gedreht. Daher liegt auch an diesen Stellen ein Minimum der Intensität an der Stelle des unverschobenen Streifens, ist aber nicht gleich Null, sondern gleich $J^2 \sin^2 2p_m$. In der Tat kann man wahrnehmen, daß der Streifen an diesen Stellen, wenigstens in der Nähe der Mitte, wo $\sin 2p_m$ noch merkbare Werte hat, nicht völlig verschwindet (vgl. Fig. 5, Taf. V).

4. Danach hat also der Streifen keine Verschiebung in den Punkten, denen die Werte $\Delta = k/2$ zukommen. Dazwischen wird der Streifen Verschiebungen aufweisen, deren Größe nach (II) durch den Betrag von ϵ bestimmt ist. Für die Fälle, in denen die Erscheinung in der durch Fig. 3, Taf. V dargestellten Weise auftritt, ist es, wie schon mehrfach hervorgehoben, charakteristisch, daß p_m von der Mitte aus sehr schnell abnimmt. Daher wird sich für Punkte, die nicht in unmittelbarer Nähe der Mitte liegen, die Gleichung (II) vereinfachen zu

$$\operatorname{tg} 2\pi \epsilon = \sin 2p_m \cdot \sin 2\pi \Delta.$$

Daraus folgt, daß ϵ durchgehends nur kleine Werte haben und daß es zwischen positiven und negativen Werten hin- und herschwanken wird, und zwar werden die Grenzwerte angenähert für

$$\sin 2\pi \Delta = \pm 1,$$

d. h. für $\Delta = 2k + 1/4$ erreicht werden.

In den Punkten, für die $\Delta = 2k + 1/4$ ist, wird

$$B^2 = 2 \cdot \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 4 p_m}{4}} \cdot \cos 2\pi(\epsilon + \zeta) \right\},$$

also an der Stelle des um $\zeta = -\epsilon$ verschobenen Streifens

$$B^2 = 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 4 p_m}{4}} \right)$$

und bei Berücksichtigung der Kleinheit von p_m

$$B^2 = \sin^2 2 p_m \cdot \cos^2 2 p_m.$$

Die Intensität ist also in diesen Minimumstellen ebenfalls nicht streng gleich Null, aber jedenfalls sehr klein. Die Lage des Minimums, d. h. die Streifenverschiebung ist für diese Stellen gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi\epsilon = \mp \frac{\sin 2 p_m}{\cos^2 2 p_m},$$

wobei das $-$ Zeichen für $k = 1, 3, 5 \dots$, das $+$ Zeichen für $k = 2, 4, 6 \dots$ gilt. Über die Größe dieser Streifenverschiebung im Verhältnis zur Verschiebung Δ_m läßt sich ein angenähertes Urteil auf Grund folgender Näherungsrechnung finden. Da

$$\operatorname{tg} 2 p_m = C \frac{1 - \eta^2}{\eta}$$

ist, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\pi\epsilon = \mp C \cdot \frac{1 - \eta^2}{\eta^3} \sqrt{\eta^2 + C^2(1 - \eta^2)^2}$$

oder unter Berücksichtigung des Umstandes, daß C eine kleine Größe ist

$$\operatorname{tg} 2\pi\epsilon = \mp C \frac{1 - \eta^2}{\eta}.$$

Für C aber kann man auch Δ_m/Δ setzen und für $\Delta \times \eta$ in erster Annäherung den nur wenig größeren Wert Δ . Dann ist also

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mp \frac{\Delta_m}{2\pi\Delta} (1 - \eta^2) \\ &= \mp \frac{2\Delta_m}{(2k+1)\pi} (1 - \eta^2), \end{aligned}$$

wobei

$$\eta^2 = \frac{(2k+1)^2}{16\Delta^2}$$

zu setzen ist. Also ist z. B. für $k = 1$

$$\varepsilon = -\frac{2}{3\pi} \Delta_m \left(1 - \frac{9}{16 \Delta_r^2}\right) = -0,21 \cdot \left(1 - \frac{0,56}{\Delta_r^2}\right) \Delta_m,$$

für $k = 2$

$$\varepsilon = +\frac{2}{5\pi} \Delta_m \left(1 - \frac{25}{16 \Delta_r^2}\right) = +0,13 \cdot \left(1 - \frac{1,56}{\Delta_r^2}\right) \Delta_m,$$

für $k = 3$

$$\varepsilon = -\frac{2}{7\pi} \Delta_m \left(1 - \frac{49}{16 \Delta_r^2}\right) = -0,091 \cdot \left(1 - \frac{3,06}{\Delta_r^2}\right) \Delta_m$$

etc. Dabei würde z. B. für die in Fig. 3, Taf. V wieder-
gegebenen Aufnahmen $\Delta_r = \frac{3}{2}, = 3$ und $= 6$ zu setzen sein.

Für $k = 0$ oder $\Delta = \frac{1}{4}$ gelten diese Betrachtungen nicht mehr. Hier, in der Nähe der Mitte, würden die abgekürzten Formeln keine Berechtigung mehr haben. An dieser Stelle tritt aber auch überhaupt kein Grenzwert für ε mehr auf. Nähert man sich von der Stelle, für die $\Delta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0$ ist, der Mitte, so wächst wegen des hier erfolgenden starken Anwachsens von $2p_m \varepsilon$ andauernd über den Wert, den es für $\Delta = \frac{1}{4}$ erreicht, hinaus, bis zu dem Werte Δ_m , den es für $\eta = 0$ erlangt.

Vergleicht man in Fig. 3, Taf. V die rechtsstehenden Aufnahmen mit dem Gipskeil mit den linksstehenden Aufnahmen für die erste Nicollage, so findet man den im vorstehenden entwickelten Charakter der Erscheinung in den wesentlichen Zügen an den Tatsachen bestätigt. Der Interferenzstreifen des Gipskeils zeigt außer der stärkeren Verschiebung in der Mitte eine Reihe kleinerer Ausbuchtungen nach beiden Seiten hin. Die Spitzen dieser Zacken fallen angenähert auf diejenigen Stellen, die in den linksstehenden Interferenzbildern an der Grenze zwischen den hellen und dunklen Interferenzlinien liegen, d. h. da wo $\Delta = 2k + 1/4$ ist; und zwar liegen die nach derselben Seite wie Δ_m gerichteten Zacken auf den äußeren Rändern der dunklen Streifen des linken Bildes, d. h. da, wo $\Delta = \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}$ ist, die nach der entgegengesetzten Seite gerichteten auf den inneren Rändern, d. h. da, wo $\Delta = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}$ ist. Endlich entsprechen auch die Größen dieser Zacken im Verhältnis zur mittleren Verschiebung Δ_m — wenigstens der Größenordnung nach — dem, was man nach den obigen Formeln darüber aussagen könnte.

Die vorliegende Untersuchung gibt eine vervollständigte Lösung des Problems der in einem gebogenen Glasstabe auftretenden Doppelbrechung. Sie bildet damit zugleich ein Beispiel für die Möglichkeit, die Spannungsverteilung in einem elastisch beanspruchten Körper auch in ihren feineren Einzelheiten auf optischem Wege zu untersuchen, ein Verfahren, das mir ebenso nützlich zu sein scheint als Mittel zur Demonstration des Zusammenhanges der Kräfte in den bekannten Fällen elastischer Deformationen wie als Untersuchungsmethode für andere komplizierte Probleme der Elastizität. Allerdings hat die Anwendbarkeit der Methode ihre Grenze in dem Umstande, daß sie eigentlich nur für zweidimensionale Fälle gilt. Denn sie gibt eine vollkommen eindeutige Bestimmung der Kräfte nur, wenn auf dem Wege, den der Lichtstrahl im Körper durchläuft, die Kräfte und damit die Doppelbrechung überall die gleichen sind. Auch in dem hier behandelten Falle ist diese Bedingung nicht erfüllt. Die Kräfte variieren nach der Theorie de Saint-Venants auch in derjenigen Richtung, die auf der Biegungsebene senkrecht steht und in der der Lichtstrahl die Platte durchsetzt. Der in den obigen Darlegungen benutzte Wert für die Schiebungskräfte ist nur der Mittelwert, der sich aus der Integration über die durchstrahlte Dicke ergibt. Diese Kräfte variieren auf dem Wege des Lichtstrahles von Punkt zu Punkt, und mit ihnen werden die Größen der Doppelbrechung und die Lage ihrer Achsen von Punkt zu Punkt variieren. Das Problem ist also in Wahrheit noch wesentlich verwickelter, als es hier dargestellt ist. Vielleicht würden genauere Messungen, als ich sie mit den mir zu Gebote stehenden Glasplatten anstellen konnte, in demjenigen Gebiete, in dem Schubkräfte und Längsspannungen zusammenwirken, systematische Abweichungen aus den oben entwickelten Formeln ergeben, deren Erklärung eine Berücksichtigung dieser weiteren Komplikation verlangen würde. Da die Rechnungen außerordentlich verwickelt sind, nehme ich davon Abstand, die Untersuchung nach dieser Richtung weiter zu führen.

Greifswald, März 1903.

(Eingegangen 31. März 1903.)

**8. Nachtrag zu meiner Arbeit
über die „Fortpflanzung magnetischer Wellen
in Eisenzylindern“¹⁾; von J. Zenneck.**

Erst als der Druck der genannten Mitteilung schon beendet war, bemerkte ich, daß die Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern schon von J. J. Thomson²⁾, wenn auch in wesentlich anderer Weise, behandelt worden ist.

a) Der *Ansatz* von Hrn. Thomson ist der strenge Maxwell'sche; die einzige Voraussetzung dabei ist konstante Permeabilität auch für den Eisenzylinder. Bei meinem Ansatz handelt es sich um eine Übertragung von Beziehungen, deren Richtigkeit nur für den geschlossenen magnetischen Kreis nachgewiesen werden kann, um Beziehungen, in denen der magnetische Widerstand (w_m bez. w'_m) und Selbstinduktionskoeffizient (p_m) pro Längeneinheit und eine Größe c_m , die der elektrischen Kapazität pro Längeneinheit analog ist, eine Rolle spielt. Der Ansatz von Hrn. Thomson verhält sich also zu dem meinigen wie etwa auf elektrischem Gebiet der Ansatz von Sommerfeld³⁾ für die Fortpflanzung elektrischer Wellen längs Drähten zu dem an Kirchhoff sich anschließenden häufig gebrauchten Ansatz, in dem mit Widerstand, Selbstinduktionskoeffizienten und Kapazität pro Längeneinheit operiert wird.

b) Hr. Thomson hat die Berechnung durchgeführt für zwei Fälle, die mit zwei von mir behandelten Spezialfällen im wesentlichen übereinstimmen. Sie sind charakterisiert durch den Betrag der Größe

$$\begin{aligned} \kappa &= r \sqrt{\frac{\pi n \lambda \mu}{8 V^2}} \\ &= r \sqrt{\frac{\pi \cdot \pi n \lambda \mu}{2}} \text{ C.G.S.-Einheiten,} \end{aligned}$$

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. **10**. p. 845. 1903.

2) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism p. 303. Oxford 1893.

3) A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**. p. 243. 1898.

worin

r = Zylinderradius	a bei Thomson,
n = Wechszahl	$\frac{p}{\pi}$ " "
λ = Leitvermögen des Zylinders	$\frac{1}{\sigma}$ " "
μ = Permeabilität des Zylinders,	
μ = Permeabilität des Zylinders, bezogen auf Luft	$\frac{\mu}{4\pi}$ " "
V = vom Maßsystem abhängige Konstante.	

c) Im *ersten Grenzfall*, κ klein gegen 1, findet Hr. Thomson

$$\beta^1) = \frac{2}{r\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log(g^2\mu)}}^2,$$

$$\gamma^1) = 0.$$

Mein Ansatz lieferte

$$\beta = \sqrt{c_m} \cdot w'_m,$$

$$\gamma = \frac{\pi n p_m}{2 w'_m} \sqrt{c_m w'_m},$$

oder, da in diesem Falle annähernd

$$w'_m = w_m = \frac{1}{\pi r^2 \mu} = \frac{4}{r^2 \mu} \text{ C.G.S.-Einheiten,}$$

$$\pi n p_m = \kappa^2 w_m^3),$$

so folgte:

$$\beta = \frac{2}{r\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{c_m},$$

$$\gamma = \frac{\kappa^2}{2} \cdot \beta.$$

Der Wert für β wird also mit dem Thomsonschen identisch, wenn man setzt:

$$(1) \quad c_m = \frac{1}{\log(g^2\mu)}.$$

1) Die Bedeutung von β und γ ergibt sich daraus, daß der magnetische Induktionsfluß Q der in der positiven X-Richtung fortschreitenden Welle in der Form

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\beta x} \cdot e^{i(\pi n t - \gamma x)}$$

angesetzt wurde.

2) $\log g$ = Gauss'sche Konstante = 0,577. \log hier und im folgenden lognat.

3) Die Gleichung

$$\pi n p_m = \frac{r^2 a}{4} \cdot w_m$$

(l. c. p. 848) steht aus Versehen für

$$\pi n p_m = \frac{r^2 a}{8} \cdot w_m.$$

Daß bei Hrn. Thomson $\gamma = 0$ wird, rührt davon her, daß in seiner Berechnung Größen von der Ordnung κ^2 , in meiner erst von der Ordnung κ^4 gegen 1 vernachlässigt sind.

d) Im zweiten Grenzfall, κ groß gegen 1, erhält Hr. Thomson

$$\beta = \frac{2}{r} \cdot \frac{\left[\frac{r^2 \pi \cdot \pi n \lambda}{\mu} \right]^{1/4}}{\left\{ \log \left[g^2 \left(\frac{\mu}{\pi r^2 \cdot \pi n \lambda} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\gamma = \frac{2}{r} \cdot \frac{\left[\frac{r^2 \pi \cdot \pi n \lambda}{\mu} \right]^{1/4}}{\left\{ \log \left[g^2 \left(\frac{\mu}{\pi r^2 \cdot \pi n \lambda} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

Das kann auf die Form gebracht werden

$$\beta = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log \left(g^2 \cdot \frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}} \right)}} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\gamma = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log \left(g^2 \cdot \frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}} \right)}} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

Mein Ansatz ergab:

$$\beta = \sqrt{\pi n p_m} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \sqrt{\frac{V^2 + 1}{2}},$$

$$\gamma = \sqrt{\pi n p_m} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \sqrt{\frac{V^2 - 1}{2}},$$

oder, da in diesem Falle

$$\pi n p_m = \kappa \cdot w_m,$$

da ferner

$$\sqrt{\frac{V^2 + 1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{\frac{V^2 - 1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

ist, so wird

$$\beta = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\gamma = \frac{2}{r \sqrt{\frac{\mu}{\kappa \sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{c_m} \cdot \sin \frac{\pi}{8}.$$

Das Resultat geht in das Thomsonsche über, wenn man

$$(2) \quad c_m = \frac{1}{\log \left(g^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\mu}{\pi \sqrt{2}} \right)}$$

in dasselbe einsetzt. Es bestätigt sich also vollkommen, daß in diesem Grenzfall $\beta : \gamma = \operatorname{ctg} \pi/8 = \text{ca. } 2,4$ wird, unabhängig von Permeabilität, Leitvermögen und Radius des Zylinders und der Wechselzahl der Schwingung.

e) Der Vergleich mit den Thomsonschen Formeln zeigt also, daß der einfache Ansatz in den beiden Grenzfällen alles das, was er überhaupt liefern kann, auch wirklich richtig liefert. Die Behandlung von Hrn. Thomson besitzt aber außer dem strengen Ansatz auch noch den praktischen Vorteil, daß sie die Größe c_m , von der die Streuung abhängt, ermittelt, während diese beim einfachen Ansatz unbestimmt bleibt.

Dieser praktische Vorteil darf aber nicht überschätzt werden. Denn einmal ist auch eine angenäherte Berechnung auf Grund des strengen Ansatzes nur in den besprochenen beiden Grenzfällen einigermaßen leicht durchführbar. Sobald x nicht sehr groß oder sehr klein gegen 1 ist, werden die mathematischen Schwierigkeiten sehr hedeutend. Und dann gilt der Thomsonsche Ansatz überhaupt nur für einen *einzelnen* Eisenzylinder. Bei Versuchen aber, bei denen es sich um dünnere Drähte handelt, ist es zum mindesten vorteilhaft, *Bündel* von Drähten, nicht einzelne Drähte zu verwenden. Dann aber werden die Grenzbedingungen so kompliziert, daß eine Durchführung der Rechnung auf Grund des strengen Ansatzes kaum möglich erscheint. Dann versagt der strenge Ansatz also vollkommen.

In diesen Fällen aber ist der einfache Ansatz ebenso leicht durchzuführen, wie in den besprochenen Grenzfällen.¹⁾ Da er selbst bei so komplizierten Verhältnissen, wie sie in dem l. c., § 3 c, behandelten Falle vorlagen, jedenfalls qualitativ richtige Resultate lieferte, so ist er in allen den Fällen,

1) Die Werte von $\pi n p_m = w'_m$, die in den Gleichungen (6) l. c. auftreten, sind aus den Kurven der demnächst erscheinenden Arbeit „Elektrischer und magnetischer Widerstand bei Schwingungen“ zu entnehmen. Davon, ob es sich um einen einzelnen Draht oder ein Bündel handelt, hängt nur die Größe c_m ab.

in denen der strenge Ansatz auf sehr große oder unüberwindliche Schwierigkeiten führt, als bequemes Aushilfsmittel zu betrachten.

f) Noch auf einen Punkt möchte ich aufmerksam machen. Die Größe c_m ergab sich im zweiten Grenzfall als

$$c_m = \frac{1}{\log \left(g^2 \cdot \frac{\mu}{\alpha \sqrt{2}} \right)}.$$

Die Größe $\alpha \sqrt{2}$, mit der μ dividiert erscheint, ist in diesem Fall nichts anderes als das Verhältnis der magnetischen Impedanz $\sqrt{w_m^2 + (\pi n p_m)^2}$ zum Ohmschen magnetischen Widerstand w_m . Die Gleichung (2) sagt also aus, daß die Streuung um so größer wird, je größer die magnetische Impedanz des Eisenkernes ist. Das gilt aber für *geschlossene* magnetische Kreise ganz allgemein. Es liegt deshalb nahe zu vermuten, daß es auch hier allgemein gilt und daß man demnach den allgemeinen Ausdruck für c_m aus dem speziellen in Gleichung (2) erhält, wenn man in Gleichung (2) den speziellen Wert $\alpha \sqrt{2}$ durch den allgemeinen $\sqrt{w_m^2 + (\pi n p_m)^2} : w_m$ ersetzt. Man würde dann für einen einzelnen Eisenzylinder erhalten:

$$c_m = \frac{1}{\log \left(g^2 \cdot \mu \cdot \frac{w_m}{\sqrt{w_m^2 + (\pi n p_m)^2}} \right)}.$$

Für den ersten Grenzfall (c) ergibt diese Gleichung bis auf Größen von der Ordnung α^2

$$c_m = \frac{1}{\log (g^2 \mu)}$$

im Einklang mit dem oben festgestellten.

Straßburg i. Els., Physikalisches Institut.

(Eingegangen 2. April 1903.)

**9. Bemerkung zur Notiz der Herren
V. Gabritschewski und A. Batschinski
über die sprechende Flamme;
von Ernst Ruhmer.**

Im Anschluß an die Notiz der Herren V. Gabritschewski und A. Batschinski erlaube ich mir die Bemerkung, daß es mir im Gegensatz zu analogen früheren Versuchen des Hrn. Simon¹⁾ bereits im Anfang des Jahres 1901 gelungen ist, die Flamme des Bunsenbrenners, überhaupt jede Flamme, nach Art der sprechenden Bogenflamme zum Sprechen zu bringen. Meine Versuchsanordnung, die in der Physikalischen Zeitschrift, 2. Jahrgang, Nr. 21, p. 325, u. a. auch in der Elektrotechnischen Zeitschrift, Heft 25, 1901 angegeben wurde, ist im wesentlichen mit der in Band 11, p. 223, 1903 dieser Annalen angegebenen Anordnung der Herren Gabritschewski und Batschinski identisch.

Z. Zt. Kiel, an Bord S. M. Schiff „Neptun“, 28. Mai 1903.

1) H. Th. Simon, Wied. Ann. 64. p. 233. 1898.

(Eingegangen 29. Mai 1903.)

Berichtigungen

zu der Arbeit von A. Eichenwald, p. 1 und p. 421.

- Seite 9, Zeile 7 von unten muß es heißen: Ausschlag, statt: Anschlag.
 „ 11, „ 8 „ oben „ „ „ Ausschläge, statt: Anschläge.
 „ 27, „ 5 „ unten „ „ „ — G , statt: — g .
 „ 432, „ 13 „ oben „ „ „ $s \cdot E$, statt: E .
 „ 437, „ 14 „ „ „ „ $A_n \cdot b \cdot b' \cdot B_n$, statt: $B_n \cdot b' \cdot b \cdot A_n$.
 Seite 441, Zeile 14 von oben muß es heißen: den galvanischen Strömen,
 statt: den Wirkungen eines galvanischen Stromes.
 Seite 441, Zeile 18 von oben muß es heißen: die Bewegungen sowie auch
 die magnetischen Wirkungen der einzelnen bewegten Ladungen,
 statt: die Bewegungen und die magnetischen Wirkungen der
 bewegten Ladungen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 11.

1. *Über Beziehungen des Reflexions- und Emissionsvermögens der Metalle zu ihrem elektrischen Leitvermögen*¹⁾;

von *E. Hagen und H. Rubens.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die Maxwell'sche elektromagnetische Theorie des Lichtes, welche in ihrer ursprünglichen Gestalt die molekularen Eigenschwingungen der Körper nicht berücksichtigt und somit die Optik einer *einzig* Wellenlänge darstellt, fordert, daß bezüglich der Durchsichtigkeit der Metalle analoge Beziehungen bestehen müssen, wie zwischen ihrem elektrischen Leitvermögen. Diese Beziehungen sind mehrfach geprüft worden²⁾, haben sich aber in keiner Weise bestätigt, weder in Hinsicht auf den absoluten Betrag der Durchsichtigkeit, noch bezüglich der Reihenfolge, in die sich die Metalle nach ihrer Durchsichtigkeit ordnen lassen, und welche zugleich die Reihenfolge ihrer spezifischen Widerstände sein müßte.

In einer früheren Arbeit³⁾ haben wir nun gezeigt, daß einige dieser Widersprüche sich zu lösen beginnen, wenn man nicht das ultraviolette oder sichtbare Spektrum in den Bereich der Untersuchung zieht, sondern zu größeren Wellenlängen fortschreitet. Wir fanden, daß Platin, welches im sichtbaren und ultravioletten Spektralgebiet sehr viel undurchlässiger ist als Gold und Silber, im Ultraroten diese Metalle an Durchlässigkeit übertrifft. Dasselbe gilt in noch höherem

1) Vorliegende Arbeit ist eine weitere Ausführung der in den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 269 u. 410. 1903 und den Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 113 u. 145. 1903 abgedruckten Mitteilungen.

2) Vgl. u. a. W. Wien, Wied. Ann. 35. p. 48. 1888 u. E. Cohn, Wied. Ann. 45. p. 55. 1892.

3) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 432. 1902.

Maße vom Wismut, wie wir uns neuerdings überzeugt haben. Ein etwa $90 \mu\mu$ dicker ¹⁾ Wismutspiegel, welcher im Rot kaum $\frac{1}{1000}$ hindurchläßt, besitzt nämlich bereits bei $\lambda = 4 \mu$ eine Durchlässigkeit von 10 Proz. Es war hiernach nicht unwahrscheinlich, daß man beim Übergang auf größere Wellenlängen zu Werten für die Durchlässigkeit der Metalle gelangt, die mit der Maxwellschen Theorie im Einklang sind. Es würde dies, die Richtigkeit jener Theorie vorausgesetzt, besagen, daß der Einfluß der molekularen Eigenschwingungen der verschiedenen Metalle im Ultrarot mit wachsender Wellenlänge allmählich verschwindet.

Ganz ähnliche Beziehungen, wie sie die Maxwellsche Theorie für die *Durchlässigkeit* der Metalle verlangt, lassen sich für die *Intensität der in die Metalle eindringenden Strahlung* und für die *Emission* voraussehen. Diese Größen aber sind viel leichter zu bestimmen als die Durchlässigkeit. Zu Untersuchungen der letzten Art sind nämlich erstens erheblich größere Strahlungsintensitäten erforderlich. Zweitens existieren in dem in Betracht kommenden Spektralgebiet keine für Wärmestrahlen hinreichend durchsichtigen Körper, welche man als Träger für die dünnen zu untersuchenden Metallschichten verwenden könnte.²⁾ Endlich ist man bezüglich der Zahl der für die Untersuchung der Durchlässigkeit verwendbaren Metalle wesentlich größeren Beschränkungen unterworfen als bei der Messung der eindringenden Strahlung, da man viel leichter gut reflektierende Spiegel als gleichmäßig dicke, noch merklich durchlässige Metallschichten herstellen kann.

Die in die Metalle eindringende Strahlungsintensität läßt sich auf verschiedene Weisen experimentell ermitteln, am einfachsten wohl durch die Messung des Reflexionsvermögens der Metalle, oder durch die Untersuchung ihres Emissionsvermögens.

Wird das Reflexionsvermögen R für normale Inzidenz in Prozenten der einfallenden Strahlung ausgedrückt, so ist die

$$1) \mu = \frac{1}{1000}, \quad \mu\mu = \frac{1}{1\,000\,000} \text{ mm.}$$

2) Steinsalz, Sylvin und Chlorsilber, welche hinreichend durchsichtig sind, eignen sich aus chemischen Gründen nicht als Träger der Metallschichten. Glimmer absorbiert schon jenseits 7μ sehr stark.

in die Metalle eindringende Strahlungsintensität $J = (100 - R)$. In denjenigen Spektralgebieten, in welchen die Energie für genaue Messungen genügend groß und R hinreichend von 100 verschieden ist, wird daher die Bestimmung der Größe J zweckmäßig durch Messung des *Reflexionsvermögens* erfolgen. Gerade aber in dem Gebiet der größten erreichbaren Wellenlängen sind diese Bedingungen nicht mehr hinreichend erfüllt, und es empfiehlt sich dann J aus dem *Emissionsvermögen* der Metalle zu ermitteln. Ist nämlich E die Emission einer undurchsichtigen blanken Metallfläche, e diejenige eines gleich temperierten schwarzen Körpers für dieselbe Wellenlänge, so wird nach dem Kirchhoffschen Gesetz $J = E/e$.

Unsere Untersuchung zerfällt hiernach in zwei Teile; in dem ersten wird die Größe J mit Hilfe des Reflexionsvermögens bestimmt, in dem zweiten wird sie aus dem Emissionsvermögen der Metalle abgeleitet.

Erster Teil.

Das Reflexionsvermögen der Metalle im Ultrarot.

Messungen des Reflexionsvermögens der Metalle sind im ultraroten Spektrum bereits mehrfach vorgenommen worden.

Außer der Arbeit des Einen¹⁾ von uns, in welcher derselbe auf Grund seiner Beobachtungen den Schluß ziehen konnte, daß das Reflexionsvermögen der guten Leiter für Wärme und Elektrizität (Silber, Kupfer, Gold) im ultraroten Spektrum größer ist als dasjenige der übrigen Metalle, ist die Arbeit von A. Trowbridge²⁾ sowie unsere eigene neuere Untersuchung³⁾, zu nennen. An der Hand der Resultate dieser Arbeiten ließ sich indes noch kein einwandfreier Vergleich mit der Maxwell'schen Theorie geben, weil das Material und die Oberflächenbeschaffenheit der verwendeten Spiegel bei den älteren

1) H. Rubens, Wied. Ann. 37. p. 249. 1889.

2) A. Trowbridge, Wied. Ann. 65. p. 595. 1898. Die Arbeiten der Herren S. P. Langley (Phil. Mag. 27. p. 10. 1889), E. F. Nichols (Wied. Ann. 60. p. 401. 1897) und F. Paschen (Ann. d. Phys. 4. p. 304. 1901) beziehen sich nur auf Silber.

3) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

Untersuchungen zu unvollkommen war und sich unsere eigenen Messungen bisher nur auf Wellenlängen bis $1,5 \mu$ erstreckten.

Beobachtungsmethode.

Die Versuchsanordnung ist in der Fig. 1 dargestellt. In derselben bedeutet H den Spalt eines Spektrometers, welches durch Einsetzen der beiden vorn versilberten Hohlspiegel K und L in ein Spiegelspektrometer umgestaltet war. K war fest am Spektralapparat, L drehbar an dessen beweglichem, zugleich die lineare Thermosäule T tragenden Arm angebracht.

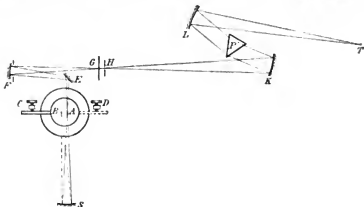


Fig. 1.

$H K$ stellt demnach den Kollimator, $L T$ das Beobachtungsrohr des Spektrometers dar. Das Prisma P desselben bestand bei den Versuchen für das Wellenlängengebiet $1-8 \mu$ aus Flußspat und für $8-14 \mu$ aus Sylvin.

Die bereits erwähnte Thermosäule ¹⁾ war die zu unseren früheren Arbeiten ²⁾ benutzte. Als zugehöriges Meßinstrument diente ein gegen äußere magnetische Störungen geschütztes du Bois-Rubenssches Panzergalvanometer ³⁾. Vom Beobach-

1) H. Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 65. 1898.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1 u. p. 432. 1902.

3) H. du Bois u. H. Rubens, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20. p. 65. 1900.

tungsplatze des letzteren aus konnte der dicht vor dem Spalte des Spektrometers aufgestellte Klappschirm *G* nach Bedarf gehoben und gesenkt werden.

In der Figur bedeuten ferner *E* und *F* zwei Hülfs-
spiegel, *A* die Lichtquelle und *S* den zu untersuchenden Metall-
spiegel.

Als *Lichtquelle* wurde ein 2 mm breiter und 1 mm dicker, ver-
tikal gestellter Nernstkörper verwendet, der auf einem Dreh-
tischchen etwas *exzentrisch* befestigt war. Das letztere war,
wie es die Figur zeigt, zwischen dem zu untersuchenden
Spiegel *S* und dem Hülfsspiegel *E* aufgestellt. Es war mit
zwei festklemmbaren Anschlägen *C* und *D* versehen, welche
es erlaubten, den Faden der Nernstlampe aus der Lage *A* in
die punktiert gezeichnete Lage *B* überzuführen und umgekehrt.
Unmittelbar vor dem Nernstkörper war ein kleiner *Spalt* von
2 mm Breite angebracht, in den im Abstand von 8 mm über-
einander zwei schräg gestellte Fadenkreuze aus sehr feinem
Platindraht eingezogen waren. Die Exzentrizität des Nernst-
körpers und die Lage des vor ihm angebrachten, soeben er-
wähnten Spaltes konnten durch zwei besondere mikrometrische
Vorrichtungen eingestellt werden.

Die Aufstellung der Lichtquelle *A*, des Planspiegels *E*
und des Hohlspiegels *F* wird nun so gewählt, daß die von *A*
ausgehenden und von *E* nach dem Hohlspiegel *F* hin reflek-
tierten Strahlen von diesem auf dem Spalt *H* des Spektro-
meters zu einem Bilde *gleicher Größe* vereinigt werden. Ist
dies geschehen und die Exzentrizität der Nernstlampe an-
genähert richtig gewählt, so wird der zu untersuchende Spiegel
S so aufgestellt, daß seine Symmetrieachse horizontal liegt und
durch die Umdrehungsachse des Drehtischchens hindurchgeht.
Alsdann wird das letztere um 180° gedreht und dadurch die
Nernstlampe und der vor ihr befindliche kleine Spalt in die
Lage *B* gebracht. Es bleibt dann nur noch übrig den Ab-
stand des zu untersuchenden Spiegels *S* und erforderlichenfalls
die Exzentrizität der Nernstlampe so zu regulieren ¹⁾, daß von

1) Als optische Bank und Spiegelhalter etc. dienten die früher von
uns beschriebenen Einrichtungen, vgl. Zeitschr. f. Instrumentenk. 19.
p. 299. 1899.

B ein reelles Bild von gleicher Größe in A , d. h. genau an dem Orte des Raumes entworfen wird, an dem sich vorher die Nernstlampe mit ihrem Spalte befand. Der weitere Verlauf der Strahlen von diesem reellen Bilde A aus, wird dann genau der gleiche sein, wie im vorher gedachten Falle. Als Kriterium dafür, daß der zu untersuchende Spiegel S ein Bild genau der gleichen Größe von B in A entwirft, ist dadurch gegeben, daß nur in diesem Falle das jetzt auf dem Spektrometerspalt H entworfen Bild der erwähnten zwei Fadenkreuze aus Platindraht die gleiche Schärfe besitzen kann, wie im ersteren Falle, wo die Nernstlampe und ihr Spalt sich in A selbst befanden.

Hinsichtlich der übrigen Einzelheiten der Anordnung und Ausführung der Versuche möge noch erwähnt werden, daß der Spektrometerspalt 6 mm hoch und 1 mm weit, sowie daß vor den Hülfs Spiegel F (Krümmungsradius 300 mm) eine 24×24 mm große Blende vorgesetzt war, um sowohl für die Stellung A wie B der Nernstlampe immer nur den gleichen mittleren Teil des Strahlenkegels zur Verwendung gelangen zu lassen.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß der Strahlengang in den beiden gedachten Fällen nur insofern verschieden ist, als im einen Falle der Weg BSA hinzukommt. Dividiert man den in diesem Falle am Galvanometer beobachteten Ausschlag durch den im ersteren Falle erhaltenen, so ergibt sich daraus unmittelbar das Reflexionsvermögen des betreffenden Spiegels. Die Methode gibt, ebenso wie das von uns seinerzeit im sichtbaren Spektralgebiet benutzte optische Verfahren, ohne weiteres absolute Werte des Reflexionsvermögens. Dies wurde durch eine Reihe von Vergleichsversuchen festgestellt, die unter Verwendung des Sylvinprismas an einer größeren Zahl von früher bereits untersuchten Spiegeln für die Wellenlängen $\lambda = 0,60, 0,65, 0,70 \mu$ ausgeführt wurden.

Die Messungen wurden im allgemeinen an 15 Stellen des Spektrums vorgenommen. Bei der Stellung A des Nernstkörpers betrug der Luftweg des Strahlenganges 210 cm, bei der Stellung B hingegen 270 cm. Daraus ergab sich die Notwendigkeit, die Beobachtungen auf solche Wellenlängen zu beschränken, bei denen die Absorption der Strahlen durch den

Wasserdampf und die Kohlensäure¹⁾ der Luft *unerheblich*²⁾ ist. Nur die Wellenlänge $\lambda = 7 \mu$ bildete hiervon eine Ausnahme, an dieser Stelle mußte wegen der Wasserdampfabsorption eine Korrektur im Betrage von 3,1 Proz. angebracht werden. Infolge hiervon sind die für $\lambda = 7 \mu$ angegebenen Reflexionsvermögen weniger genau als die übrigen.

Die Inzidenz, unter welcher die Reflexion an den zu untersuchenden Spiegeln (δ der Figur) erfolgte, war $0,7^\circ$.

Metallspiegel.

Sämtliche Metalle kamen in Form von Hohlspiegeln von 30 cm Radius und 4 cm Öffnung zur Verwendung. Die Spiegel waren, soweit es sich um massive Stücke handelt, meist in der optischen Werkstatt von Zeiss geschliffen und poliert.

Sie sind zum Teil mit denen identisch, welche zu unseren früheren Untersuchungen über das Reflexionsvermögen einiger Metalle für sichtbare, ultraviolette und ultrarote Strahlen gedient hatten. Es gilt dies für die Hohlspiegel aus Stahl, Nickel, Magnalium, Rossescher und Brandes u. Schöne-mannscher Legierung. Die übrigen wurden durch Nachschleifen und Polieren der früher benutzten Spiegel erhalten, oder für die vorliegende Untersuchung aus möglichst reinem Material neu angefertigt. Die Metalle Silber, Gold und Platin kamen, wie dies aus der Tab. 1 hervorgeht, in drei Modifikationen, Nickel in zwei Modifikationen zur Untersuchung.

Die chemisch auf Hohlgläsern niedergeschlagenen Metallspiegel waren von verschiedenen Firmen hergestellt; die durch Kathodenzerstäubung entstandenen Metallschichten wurden mit Hilfe der Boasschen Anordnung³⁾ angefertigt. Sämtliche Hohlspiegel, mit Ausnahme des Spiegels aus gegossenem Wismut zeigten tadellose Oberflächen und gaben vortreffliche Bilder.

Vor jedem Versuch wurden die Spiegel geputzt. Am besten geschieht dies mit dem Ballen der Hand, auf den

1) Vgl. F. Paschen, Wied. Ann. 51. p. 1; 52. p. 209; 53. p. 335. 1894; H. Rubens u. E. Aschkinas, Wied. Ann. 64. p. 598. 1898.

2) Diese Bedingung ist tatsächlich an fast allen Stellen des Spektrums hinreichend erfüllt, da das Hinzukommen einer im Verhältnis zur Gesamtlänge des Strahlenganges kurzen Luftstrecke nur eine geringe Vermehrung der schon vorhandenen Absorption bewirkt.

3) H. Boas, DRP. 85435 vom 6. Februar 1895.

äußerst fein geschlemmtes Pariser Rot aufgerieben wird. Alles lose auf dem Handballen zurückbleibende Pulver wird mittels einer Bürste sorgfältig wieder abgebürstet, bis man beim Berühren mit dem Finger keinerlei lose Partikelchen mehr wahrzunehmen vermag.

Nachstehende Tabelle gibt einen Auszug aus zwei Beobachtungsreihen.

Auszug aus zwei Beobachtungsreihen für *reines Silber*.

Wellenlänge λ in μ	Benutztes Prisma	Galvanometerausschläge α für die direkte Strahlung β nach der Reflexion							Reflexionsvermögen R	
		α	β	α	β	α	β	α	β	
0,65	Sylvin	$\alpha = 31,8$	$\beta = 30,5$	31,7	30,3	31,5	30,3	31,9	30,6	31,5
										$30,42$ $31,67$ · 100 = 96,0 %
0,65	Flußpat	$\alpha = 240$	$\beta = 231,5$	240	228,5	239,4	227	229,0	239,8	· 100 = 95,5 %
5	Flußpat	$\alpha = 83,7$	$\beta = 81,3$	84,0	81,6	84,0	81,9	81,6	83,9	· 100 = 97,2 %
8	Sylvin	$\alpha = 101,2$	$\beta = 100,3$	100,7	99,9	101,0	100,1	101,5	101,1	· 100 = 99,0 %
12	Sylvin	$\alpha = 16,9$	$\beta = 17,0$	17,1	17,0	17,1	16,5	17,1	17,1	· 100 = 98,9 %

Resultate der Beobachtung.

Die Ergebnisse unserer Messungen sind für sieben reine Metalle, und zwar Silber, Kupfer, Gold, Platin, Nickel, Stahl Wismut, und für sechs Legierungen, nämlich Konstantan, zwei Patentnickelsorten¹⁾, Brandes und Schünemannsche Legierung, Rossesche Legierung und Magnalium in der Tab. 1 enthalten. Außerdem ist die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Wellenlänge für zehn unserer Spiegel in den Kurven der Fig. 2 graphisch dargestellt. Im Rot, wo unsere neuen Messungen beginnen und in den benachbarten Gebieten des Ultrarot stimmen unsere Beobachtungen mit den

1) In den Ber. d. Berl. Akad. d. Wissensch. 1903 auf p. 274 u. 276 und in den Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 5. 1903 auf p. 116 sind die zum Patentnickel *P* und *M* zugehörigen Zahlenwerte irrtümlich verwechselt.

Tabelle 1.

Reflexionsvermögen R der Metalle.

λ in μ	Silber		Kupfer, reinstes des Handels	Gold		Platin		Nickel		Stahl, Wis- mut	Konstantan 60 Cu + 40 Ni	Patentnickel		Brandes und Schneumannsche Legierung		Koswache Legierung	68,2 Cu + 31,8 Sn	69 Al + 36 Mg
	massiv, rein	chem. nieder- geschlagen	zerstübt	chem. nieder- geschlagen	zerstübt	elektrolytisch ¹⁾	zerstübt	massiv, rein	elektrolytisch	—	70,0	71,0	73,0	51,2	65,3	88,2	—	
0,65 ¹⁾	95,6	95,9	94,6	—	—	88,9	89,6	89,1	66,8	68,8	67,2	67,3	56,8	—	—	—	—	
0,70	96,1	96,2	—	82,9	—	92,3	91,3	—	—	—	71,2	71,4	73,8	—	—	—	—	
1,0	96,4	97,5	95,5	90,1	—	—	94,7	93,6	72,9	70,4	73,0	72,0	63,1	—	69,8	70,5	84,1	
1,5	97,3	97,9	—	93,8	—	97,3	96,7	94,8	77,7	75,3	79,9	78,6	70,8	—	79,1	75,0	85,5	
2,0	97,3	97,8	96,8	95,5	—	96,8	96,5	94,9	80,6	79,8	83,5	83,5	76,7	—	82,3	80,4	86,7	
3,0	97,3	98,1	97,4	97,1	—	—	96,7	95,6	88,8	88,5	88,1	88,7	83,0	71,7	85,8	86,2	87,4	
4,0	97,7	98,5	97,6	97,3	96,0	96,0	97,2	96,0	91,5	91,6	92,5	91,1	87,8	75,2	89,3	87,1	88,5	
5,0	97,3	98,1	97,3	97,9	97,0	96,9	95,9	95,7	93,5	90,8	94,7	94,4	89,0	77,2	89,5	89,1	89,0	
7,0	98,5	98,5	98,3	98,3	98,3	98,3	97,3	95,7	95,5	93,0	94,8	94,3	92,9	79,5	92,7	92,3	90,1	
8,0	99,0	98,5	98,1	98,6	97,8	96,8	96,8	96,1	95,1	92,5	95,0	95,7	93,0	81,5	92,7	93,5	91,0	
9,0	98,9	98,7	98,1	98,4	98,0	98,0	96,7	96,1	95,4	92,5	95,6	95,6	92,9	81,4	93,0	93,7	92,2	
10,0	99,0	98,7	98,5	98,5	97,8	97,8	97,7	96,4	95,9	93,1	95,4	95,6	93,5	82,3	94,0	93,0	92,9	
11,0	99,0	98,8	98,8	98,4	98,3	97,7	96,5	95,6	92,7	95,9	95,9	94,0	93,5	83,2	93,4	93,0	92,9	
12,0	98,9	98,8	98,1	98,4	97,8	97,9	97,2	96,5	94,9	95,7	96,1	95,1	95,1	82,2	94,0	93,0	92,9	
14,0	98,8	98,3	—	97,9	97,9	98,7	96,7	96,4	94,7	95,6	97,2	96,0	96,0	81,6	94,2	92,6	93,6	

1) Bei 0,65 und 0,7 μ war eine Wasserzelle in den Strahlengang eingeschaltet.2) Die Werte für 8–14 μ folgen aus Beobachtungen an massivem Platin.

früher von uns gewonnenen Zahlen gut überein. Nur beim Silber sind die neuen Zahlen in Rot etwas höher, was darin seinen Grund hat, daß die früher von uns benutzte Versilberung ein geringeres Reflexionsvermögen besitzt als die nunmehr verwendete. Auch für den Spiegel aus chemisch reinem,

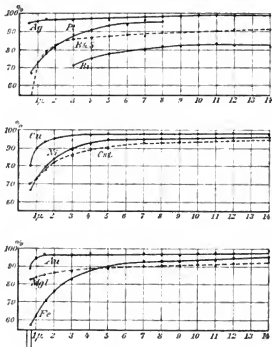


Fig. 2.

Cst bedeutet Konstantan, *MgI* Spiegel-Magnesium, *B. u. S.* die Brandes und Schönemannsche Legierung. Die Kurven für Patentnickel *M* und *P* fallen mit der des Konstantans sehr nahe zusammen. Der kleine vertikal abwärts gerichtete Doppelstreifen links unten an der Kurventafel deutet das Bereich des sichtbaren Spektralgebietes (0,45 bis 0,7 μ) an.

massivem Silber und die durch Kathodenzerstäubung erhaltenen Silberspiegel ergaben sich dieselben höheren Werte, so daß an deren Richtigkeit kein Zweifel bestehen kann.

Aus der Form der Kurven der Fig. 2 ist zu ersehen, daß das Reflexionsvermögen der Metalle, welches im ultravioletten und sichtbaren Gebiet bekanntlich sehr erheblichen Schwan-

kungen unterworfen ist, im Ultrarot bei sämtlichen Metallen und Legierungen einen sehr einfachen Verlauf zeigt. In allen Fällen nähert sich die Kurve asymptotisch der Geraden $R = 100$ Proz.¹⁾ Vergleicht man ferner die Werte des Reflexionsvermögens für die verschiedenen Metalle im Gebiet größerer Wellenlängen, so zeigt es sich, daß sich die Metalle bezüglich ihres Reflexionsvermögens überall in der gleichen Reihenfolge ordnen. Noch deutlicher tritt diese Gesetzmäßigkeit hervor, wenn man nicht die Größe R , sondern den Prozentsatz der eindringenden Intensität $(100 - R)$ ins Auge faßt. Diese Größe nimmt zwar mit wachsender Wellenlänge ständig ab, aber für lange Wellen bei allen Metallen nahezu in demselben Verhältnis, so daß es hier wenig in Betracht kommt, an welcher Stelle dieses Spektralgebietes der Vergleich der Werte vorgenommen wird.

Die Tab. 2 enthält eine Zusammenstellung der Größe $(100 - R)$ bei $\lambda = 4 \mu$, 8μ und 12μ für die sämtlichen untersuchten reinen Metalle und für fünf Legierungen, von denen das elektrische Leitungsvermögen zuverlässig bekannt war. Die angegebenen Zahlen für $(100 - R)$ sind, falls mehrere Modifikationen desselben Metalles untersucht worden waren, stets die Mittelwerte. Nur die Ergebnisse der durch Kathodenzerstäubung hergestellten Spiegel haben wir nicht dabei berücksichtigt. Die letzteren reflektieren sämtlich etwas weniger als die übrigen Metallmodifikationen. Dieser Unterschied ist beim Silber kaum merklich, er beträgt bei dem Gold etwa 1 Proz., bei dem Platin 2–3 Proz. Wir lassen es dahingestellt, ob diese Differenzen von einer abweichenden Molekularstruktur der zerstäubten Schichten oder von geringen Verunreinigungen der Metalle, etwa durch Oxyde, herühren.

1) Von einem Maximum des Reflexionsvermögens bei $\lambda = 1,5 \mu$, wie es früher beobachtet wurde (vgl. H. Rubens, Wied. Ann. 37. p. 249. 1889), ist bei den von uns untersuchten Goldspiegeln nichts zu bemerken. Vielleicht ist der Grund der 1889 beobachteten Tatsache darin zu suchen, daß der eine der damals benutzten Goldspiegel mit Zusatz von 2 Proz. Wismutsalz auf Glas eingebrannt war. Der andere Spiegel war eine mit Wismutoxyd polierte Goldplatte.

Tabelle 2.

	Leit- vermögen κ_{10}	$\lambda = 4 \mu$ $C_4 = \frac{(100 - R)}{(100 - R) \kappa_{10}}$	$\lambda = 8 \mu$ $C_8 = \frac{(100 - R)}{(100 - R) \kappa_{10}}$	$\lambda = 12 \mu$ $C_{12} = \frac{(100 - R)}{(100 - R) \kappa_{10}}$				
Silber	61,4	7,85	1,9	14,9	1,25	9,8	1,15	9,0
Kupfer	57,2	7,56	2,7	20,6	1,4	10,6	1,6	12,1
Gold	41,3	6,43	3,4	21,9	2,7	17,4	2,15	13,8
Platin	9,24	3,04	8,5	25,8	4,6	14,0	3,5	10,6
Nickel	8,5	2,92	8,2	23,9	4,65	13,6	4,1	12,0
Stahl	8,02	2,24	12,2	27,3	7,0	15,7	4,9	11,0
Wismut	0,84	0,916	(24,8)	(22,7)	(18,5)	(16,9)	(17,8)	(16,3)
Patennickel P	3,81	1,95	7,9	13,4	7,5	14,6	5,7	11,1
Patennickel M	2,94	1,71	8,6	14,8	6,5	11,1	7,0	12,0
Konstantan	2,04	1,43	11,7	16,7	7,3	10,6	6,0	8,6
Rosesehe Legierung . .	2,07	1,44	11,5	16,6	9,0	13,0	7,1	10,2
Brandes und Schneemann- sche Legierung	1,48	1,22	12,9	15,7	10,2	12,3	9,1	11,1
Mittelwert von C für 4, 8, 12 μ	—	—	—	$C_4 = 19,4$	—	$C_8 = 14,0$	—	$C_{12} = 11,0$
Mittlere Abweichung δ vom Mittelwert von C	—	—	—	$\delta_4 = 21,0\%$	—	$\delta_8 = 14,5\%$	—	$\delta_{12} = 9,6\%$
Theoretischer Wert von C' berechnet nach Formel (4)	—	—	—	$C'_4 = 18,25$	—	$C'_8 = 12,90$	—	$C'_{12} = 10,54$

Außer der Größe $(100 - R)$ enthält die Tabelle ¹⁾ die elektrischen Leitvermögen ²⁾ κ sowie die Quadratwurzeln hieraus, endlich die Produkte $(100 - R) \cdot \sqrt{\kappa}$ für die Wellenlängen 4, 8 und 12 μ . Man erkennt, daß dieses Produkt für $\lambda = 12 \mu$ bei allen Metallen angenähert denselben Wert hat, d. h. die *eindringenden Intensitäten im Gebiet langer Wellen verhalten sich umgekehrt wie die Wurzeln aus dem elektrischen Leitvermögen*:

$$(1) \quad (100 - R) \sqrt{\kappa} = \text{konst.}$$

Aber auch bei 8 μ und selbst noch bei 4 μ ist diese Gesetzmäßigkeit angenähert erfüllt. Die Produkte $(100 - R) \cdot \sqrt{\kappa}$ schwanken bei $\lambda = 4 \mu$ mit einer mittleren Abweichung von 21 Proz. um den Mittelwert $C_4 = 19,4$. Bei $\lambda = 8 \mu$ beträgt die mittlere Abweichung der Produkte von dem Mittelwert $C_8 = 13,0$ noch 14,5 Proz. Bei $\lambda = 12 \mu$ endlich ist die mittlere Abweichung nur noch 9,6 Proz., der Betrag des Mittelwertes $C_{12} = 11,0$.

Die in der Tab. 2 für Wismut angegebenen Werte sind eingeklammert und bei der Berechnung des Betrages von C nicht berücksichtigt, da sie mit einer erheblich größeren Unsicherheit behaftet sind als die übrigen Zahlen. Diese Abweichung findet ihre Erklärung in der Mangelhaftigkeit der Form und Politur der zu den Versuchen hergestellten Wismutspiegel.³⁾ Dadurch war bedingt, daß der massive Wismutspiegel nur zur Ermittlung des Verlaufes der Kurve des Reflexionsvermögens benutzt, die absoluten Werte des letzteren aber durch Zuhülfenahme von Spiegeln, die durch Kathodenzerstäubung hergestellt waren, ermittelt werden mußten. Letztere besaßen eine gute sphärische Form, aber waren weder ganz oxydfrei noch auch dick genug zu erhalten, so daß sie notwendigerweise zu kleine Reflexionsvermögen lieferten.

1) R ist in Prozenten der auffallenden Strahlung angegeben.

2) W. Jäger u. H. Diesselhorst, *Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt* 3. p. 269. 1900.

3) Gegossenes Wismut läßt sich infolge seiner kristallinen Struktur und der voraussichtlich hierdurch bedingten ungleichmäßigen Härte der Oberfläche nur sehr schlecht schleifen und polieren.

Vergleich mit der Theorie.

Die ursprüngliche Maxwellsche Theorie, welche, wie bereits im Eingang erwähnt, von den Molekülen und deren Eigenschwingung abstrahiert, führt, wie dies von den Herren Drude¹⁾, Planck²⁾ u. a. abgeleitet worden ist³⁾, zu dem einfachen Ausdruck für das Reflexionsvermögen⁴⁾

$$R = 100 - \frac{200}{\sqrt{A} \tau},$$

bez. für die *eindringende Intensität*

$$2) \quad (100 - R) = \frac{200}{\sqrt{A} \tau},$$

worin A das elektrische Leitvermögen des betreffenden Metalles im absoluten elektrostatischen Maß bedeutet und τ die Schwingungsdauer in Sekunden. Die Formeln gelten nur für hinreichend große A , so daß das Produkt $A \tau$ sehr groß gegen 1 wird, eine Bedingung, die hier stets mit genügender Annäherung erfüllt ist. Führt man in Gleichung (2) statt der Schwingungsdauer τ die Wellenlänge λ in μ ein und statt des in elektrostatischem Maß gemessenen Leitungsvermögens A die Größe x der Tab. 2, so folgt⁵⁾

$$(3) \quad (100 - R) = \frac{86,5}{\sqrt{x} \lambda},$$

oder

$$(4) \quad (100 - R) \cdot \sqrt{x} = \frac{86,5}{\sqrt{\lambda}} = C_1.$$

Die von uns experimentell aufgefundene Tatsache, daß das Produkt aus der eindringenden Strahlungsintensität und der Wurzel aus dem elektrischen Leitvermögen im Gebiet

1) P. Drude, Physik des Äthers, p. 574, Formel (66) 1894; vgl. auch Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 142. 1903.

2) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 278. 1903.

3) Auch aus der letzten Formel auf p. 444 des Werkes von E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, 1900 läßt sich die obige Relation herleiten.

4) R ist in Prozenten der auffallenden Strahlung gerechnet.

5) x ist der reziproke Wert des Widerstandes eines Leiters von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt in Ohm.

langer Wellen eine von der Natur des Metalles unabhängige, nur von der Wellenlänge abhängige Größe ist, wird also von der Maxwellschen Theorie gefordert. Die Größe der Konstanten $C_1 = (100 - R) \sqrt{x}$ ergab sich laut Tab. 2 zu

19,4	bei $\lambda = 4 \mu$.
18,0	„ $\lambda = 8 \mu$,
11,0	„ $\lambda = 12 \mu$.

Die entsprechenden Werte der Konstanten C_1 , berechnet nach der aus der Maxwellschen Theorie folgenden Gleichung (4) sind: 18,25 für 4μ , 12,90 für 8μ , 10,54 für 12μ und zeigen eine Übereinstimmung mit den obigen Werten, welche besser ist, als man es hätte erwarten und hoffen dürfen.

Eine Kontrolle gleicher Art für die Übereinstimmung des Experimentes und der Theorie geht aus nachstehender Zusammenstellung hervor. In derselben sind die von uns experimentell gefundenen Werte von $(100 - R)$ neben die aus der Formel (4) lediglich unter Zugrundelegung des elektrischen Leitvermögens und der Wellenlänge $\lambda = 12 \mu$ errechneten Werte gesetzt.

Abgesehen von den für Wismut angegebenen Werten ist die Übereinstimmung eine gute, im besonderen, wenn man berücksichtigt, daß die nach der Formel (4) ausgerechneten Zahlen *absolute* Werte sind und keinen willkürlich gewählten Proportionalitätsfaktor enthalten.

Tabelle 3.

	(100 - R) für $\lambda = 12 \mu$	
	beob.	ber.
Ag	1,15	1,3
Cu	1,6	1,4
Au	2,1	1,6
Pt	3,5	3,5
Ni	4,1	3,6
Fe (Stahl)	4,9	4,7
Bi	(17,8)	11,5
Patentnickel P	5,7	5,4
Patentnickel M	7,0	6,2
Konstantan	6,0	7,4
Rossettsche Legierung	7,1	7,3
Brandes und Schünemann	9,1	8,6

Zweiter Teil.

Das Emissionsvermögen der Metalle für $\lambda = 25,5 \mu$.

Stellt man sich die Aufgabe, die durch unsere Reflexionsversuche aufgefundene und aus der Maxwellschen Theorie folgende Formel (4) für Strahlen von wesentlich größerer Wellenlänge, z. B. für die *Reststrahlen von Flußspat*, zu prüfen, so ist, wie wir bereits in der Einleitung hervorgehoben haben, die Ermittlung der Größe $(100 - R)$ aus dem Reflexionsvermögen nicht der geeignete Weg. Diese letztere Größe nähert sich bei allen Metallen mit zunehmender Wellenlänge asymptotisch¹⁾ dem Werte 100 Proz. und dementsprechend wächst die Schwierigkeit der Bestimmung von $(100 - R)$.

Macht man aber nicht das Reflexionsvermögen, sondern das *Emissionsvermögen* zum Gegenstand der Untersuchung, so handelt es sich nur darum, die zu untersuchenden Metallflächen auf dieselbe Temperatur zu bringen und ihre Wärmestrahlung mit der eines absolut schwarzen Körpers für lange Wellen zu vergleichen²⁾,

1) Vgl. H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. 60. p. 418. 1897.

2) Ein dem Prinzip nach ähnliches Verfahren, bei dem jedoch die untersuchten Strahlungsintensitäten nicht auf den schwarzen Körper bezogen wurden, hat O. Wiedeburg (Wied. Ann. 66. p. 92. 1898) benutzt, um das Verhältnis der *Gesamtstrahlung* zu ermitteln, welche einerseits von Silber und andererseits von den verschiedenen Metallen bei der gleichen Temperatur emittiert wird. Er gelangt dabei zu Zahlenreihen, durch die er die schon von H. Rubens (Wied. Ann. 37. p. 249. 1889) beobachtete Tatsache, daß die guten Leiter für Wärme und Elektrizität ein stärkeres Reflexionsvermögen zeigen als die schlechten, bestätigt findet. Nach unseren Reflexionsversuchen sind jedoch Wiedeburgs Angaben so unwahrscheinlich, daß wir für einige Metalle seine Versuche wiederholten. Vermutlich waren die letzteren durch fremde Strahlungen in erheblichem Maße beeinträchtigt. Als Beweis dessen möge nachstehende Tabelle angeführt werden, welche die Strahlungsintensitäten von vier Metallen bei 100°, bezogen auf Silber gleich 1, einerseits nach O. Wiedeburgs Angaben und andererseits nach unseren Kontrollversuchen enthält. Bei den letzteren war jegliche fremde Strahlung mit Sicherheit ausgeschlossen.

Beobachter	Gesamtstrahlung bei 100°			
	Silber	Platin	Stahl	Manganin
Wiedeburg . . .	1,00	1,23	1,31	1,32
Hagen und Rubens	1,00	4,65	6,66	8,00

was, sofern genügende Energie vorhanden ist, keinerlei Schwierigkeiten bietet.

Zu den Versuchen wurde ein drehbar aufgestellter, kupferner Kasten *A* (Fig. 3) benutzt, der an seinen vier Seitenflächen mit runden Öffnungen und Verschraubungen versehen war, in welche die zu vergleichenden Metallplatten¹⁾ (strahlende Fläche 50 mm Durchmesser), bez. der „schwarze Körper“, eingesetzt werden konnten.²⁾ Letzterer bestand aus einem mit

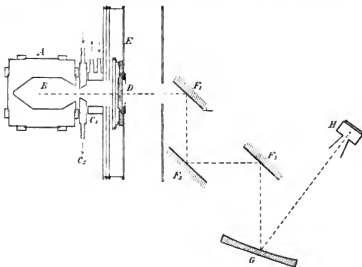


Fig. 3.

konischen Enden versehenen, mit Matlack geschwärzten Kupferzylinder *B* von 47 mm Innendurchmesser. Seine Öffnung am einen Ende war 22 mm weit. Als Heizflüssigkeit, welche obigem zufolge die zu erhitzenden Flächen direkt umspülte, diente Anilin. Die Heizung geschah elektrisch mittels einer in den Kupferkasten eingebauten Heizspirale aus Konstantan-

1) Ein besonderer Vorteil dieser Methode ist, daß die zur Untersuchung verwendeten Metallplatten nur blank und metallisch rein, aber *nicht* eben zu sein brauchen.

2) Als Dichtungsmaterial wurden Ringe aus sogenannten Klingerit verwandt. Dieselben halten auch bei hohen Temperaturen unverändert dicht. (Bezugsquelle: Richard Klinger in Gumpoldskirchen bei Wien.)

band. Die Temperatur wurde in der Regel auf 170° gehalten. Der Heizkasten wurde vor einem wassergespülten Diaphragma C_1 bez. C_2 aufgestellt, hinter dem sich ein auf Zimmertemperatur gehaltener Klappschirm D befand. Wurde letzterer gehoben, so fiel die zu messende Strahlung nacheinander auf drei bez. vier in passender Lage aufgestellte Flußspatflächen F_1, F_2, F_3 , wurde an ihnen reflektiert und gelangte dann auf einen großen, vorn versilberten Hohlspiegel G , der sie auf eine Rubenssche Thermosäule H konzentrierte. Von der Gesamtemission wurden dadurch die etwa der Wellenlänge 26μ entsprechenden Flußspatreststrahlen¹⁾ ausgesondert.

Da eine direkte Vergleichung der Strahlungen der Metallflächen mit der des erwähnten schwarzen Körpers wegen der verschiedenen Größe der strahlenden Fläche beider unmöglich war, so mußte dabei folgendes Verfahren eingeschlagen werden. Es wurde in eine der Öffnungen des Heizkastens eine dünne, berußte Kupferscheibe eingesetzt und ihr dicht anliegend eine 5 cm große Scheibe aus mikroskopischem Deckglas. Sodann wurde das Verhältnis der Strahlungsintensität des schwarzen Körpers zu der der Glasplatte unter Benutzung des kleinen, wassergespülten Diaphragmas C_2 (14 mm Durchmesser) ermittelt. Der gefundene Wert ergab sich zu 1,29. Für alle weiteren Versuche wurde dann stets die Strahlungsintensität der verschiedenen Metallflächen mit der der gedachten Glasplatte unter Verwendung des 32 mm großen, runden Diaphragmas C_1 verglichen. Die so erhaltenen Verhältniszahlen brauchten alsdann nur noch durch 1,29 dividiert zu werden, um auf diese Weise unmittelbar den Vergleich mit der absolut schwarzen Strahlung zu ergeben. In dieser Weise sind die in der nachstehenden Tab. 4 aufgeführten Zahlen erhalten.

Nur bei dem Quecksilber mußte anders und zwar folgendermaßen verfahren werden. Hier wurde nahe vor dem Dia-

1) H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576. 1899. Die nach dreimaliger Reflexion an Flußspatflächen zurückbleibende Reststrahlung hat ihr Energiemaximum bei $24,0\mu$. Wegen des asymmetrischen Abfalles der Energiekurve muß jedoch die mittlere Wellenlänge des Strahlenkomplexes zu $25,5\mu$ angenommen werden, bei viermaliger Reflexion zu Flußspatflächen ist die genaunte Schwerpunktsverschiebung noch etwas größer und ergibt $\lambda = 26\mu$.

phragma, etwas unterhalb desselben, eine große Porzellanschale mit auf 100° erhitztem Quecksilber aufgestellt und über diesem in der Höhe des Diaphragmas eine als Spiegel dienende, schräggestellte Flußspatplatte. Die von dem Quecksilber ausgehende Strahlung wurde dadurch nach dem Diaphragma hin reflektiert. Um dann weiter den Vergleich dieser Strahlung mit der des gleich warmen schwarzen Körpers vorzunehmen, ließ man auf dem erhitzten Quecksilber eine große Scheibe desselben mikroskopischen Deckglases schwimmen, wie solches zu den zuvor beschriebenen Versuchen gedient hatte, und benutzte jene als Vergleichskörper.

Daß bei keinem der Versuche fremde Strahlungen das Resultat gefälscht hatten, wurde in jedem Einzelfalle durch nachträgliches Einschalten einer 1 cm dicken Steinsalz- oder einer Flußspatplatte konstatiert. Eine solche absorbierte die benutzte Strahlung vollständig.¹⁾

In der Tab. 4 sind die Werte für $(100 - R)$ in Kolonne 6 mit Hülfe der Formel (3) für $\lambda = 25,5 \mu$ berechnet. In Kolonne 7 sind die von uns direkt durch Beobachtung gefundenen Beträge neben die aus der Formel (3) errechneten Werte für $(100 - R)$ gestellt. Beide zeigen eine so weitgehende Übereinstimmung, daß schon dadurch die von uns gefundene Gesetzmäßigkeit

$$(100 - R) \sqrt{x} = \text{konst.}$$

eine volle Bestätigung gefunden hat. Das Gleiche geht aus Kolonne 8 hervor²⁾, welche das aus unseren Beobachtungen abgeleitete Produkt $(100 - R) \sqrt{x}$ enthält. Der Betrag dieser Konstanten ergibt sich für die reinen Metalle im Mittel zu

1) H. Rubens u. A. Trowbridge, Wied. Ann. 60. p. 724. 1897.

2) Von den Zahlen der Kolonne 8 stimmen diejenigen für Zn, Cd, Ni, Sn, Hg, Rotguß, Manganin und Konstantan besonders gut mit dem theoretischen Wert 7,23 überein.

Der Grund hierfür liegt höchstwahrscheinlich darin, daß gerade bei diesen Metallen das Leitvermögen sehr genau bekannt war. Bei den genannten drei Legierungen und bei dem Quecksilber, welches im Vergleich zu den festen Metallen leicht außerordentlich rein zu erhalten ist, war dies sicher der Fall. Bezüglich des Goldes ist zu bemerken, daß dessen Leitvermögen bei 18° nur in ganz reinem Zustande gleich 41,3 ist. Schon bei einer Verunreinigung mit nur $\frac{1}{1000}$ Eisen oder Kupfer geht aber sein Leitvermögen, wie uns Hr. Diesselhorst mitteilt, bei 18° auf 24,7 und der Temperaturkoeffizient von 3,68 auf 2,03 hinab.

Tabelle 4.

1	2	3	4	5	6	7	8
	Leitungs- vermögen bei 18° κ_{18}	Temperatur- koeffizient des Wider- standes 10° a	Leitungs- vermögen bei 170° κ_{170}	$\sqrt{\kappa_{170}}$	Emissionsvermögen $J = (100 - H)$ für $\lambda = 25,5 \mu$ und 170° ber. aus Formel (3)	beob.	Produkt der in Kolumne 5 und 7 enthaltenen Werte $(100 - H) \sqrt{\kappa} = C$
Silber	61,4	4,0	39,2	6,26	1,15	1,13	7,07
Kupfer	51,8	4,2	32,5	5,70	1,27	1,17	6,67
Gold	41,3	3,68	27,2	5,21	1,39	1,56	8,10
Aluminium	31,6	3,90	20,4	4,52	1,60	1,97	8,91
Zinn	15,83	3,94	10,2	3,19	2,27	2,27	7,24
Kadmium	13,13	4,25	8,40	2,86	2,97	2,97	7,29
Platin	9,24	3,84	5,98	2,44	2,53	2,55	7,33
Nickel	8,50	4,38	5,26	2,29	2,96	2,82	6,88
Zinn	8,28	4,65	5,01	2,24	3,16	3,20	7,33
Stahl	5,02	3,69	3,80	1,81	3,23	3,27	7,32
Quecksilber	1,044	0,92	0,916 ¹⁾	0,957	3,99	3,66	6,62
Wismut	0,84	4,54	0,513	0,716	7,55	7,66	7,38
Rotgruß	7,89	0,8	7,05	2,65	10,09	(25,6)	(18,3)
Manganin	2,38	0,03	2,37	1,54	2,73	2,70	7,16
Konstantan	2,04	0,01	2,04	1,43	4,69	4,63	7,16
Platinnickel P	3,81	0,25	3,69	1,92	5,05	5,20	7,43
Platinnickel M	2,94	0,20	2,86	1,69	3,77	4,05	7,77
					4,28	4,45	7,53

1) Bei 100°.

7,33, für die Legierungen zu 7,41, während der aus der Formel (4) berechnete *theoretische* Wert $36,5/\sqrt{25,5} = 7,23$ ist. Nur bei dem Aluminium ist die Abweichung einigermaßen beträchtlich und bei dem Wismut¹⁾ stimmt Theorie und Versuch gar nicht. Letzteres kann uns aber bei dem abweichenden Verhalten, das das Wismut auch in anderer Hinsicht vielfach zeigt²⁾, kaum Wunder nehmen.

Nachstehende Zusammenstellung gibt ein Beispiel einer Beobachtungsreihe und deren Berechnung.

Abhängigkeit des Emissionsvermögens der Metalle von der Temperatur.

Die gute Übereinstimmung zwischen den von uns beobachteten und den aus der Maxwellschen Theorie berechneten Emissionswerten $(100 - R)$ läßt bereits erkennen, daß die Änderung des Leitvermögens der Metalle mit der Temperatur eine entsprechende Änderung des Emissionsvermögens für lange Wellen zur Folge hat.³⁾ Andernfalls hätte die Konstante $C = (100 - R)\sqrt{\kappa_{170}}$ für reine Metalle etwa 25 Proz. kleiner ausfallen müssen als diejenige für die Legierungen mit verschwindendem Temperaturkoeffizienten und als die theoretisch berechnete Zahl 7,23. Man kann also aus Emissionsversuchen die Größe und Richtung der Widerstandsänderung mit der Temperatur direkt berechnen, und zwar muß dabei die Emission proportional der Quadratwurzel aus dem Widerstand zunehmen. Um diese Beziehung noch weiter zu prüfen, haben wir folgende Versuche angestellt.

1) Sowohl die Aluminium- wie die Wismutoberfläche waren nicht auf die Dauer oxydfrei zu erhalten. Daß die beobachtete Abweichung hierauf zurückzuführen ist, ist bei dem Aluminium ziemlich sicher. Bei dem Wismut aber liegen offenbar auch noch andere Gründe vor.

2) Vgl. P. Lenard, Wied. Ann. 39. p. 626. 1890.

3) Im sichtbaren Spektralgebiet ist die Änderung der optischen Konstanten der Metalle mit der Temperatur äußerst gering, wie aus den Beobachtungen der Herren R. Sissingh (Arch. Néerland. 20. p. 172. 1886), P. Drude (Wied. Ann. 39. p. 538. 1890), B. Zeeman (Commun. of the Lab. of Physics at the univers. of Leyden Nr. 20. 1895) und A. Pflüger (Wied. Ann. 58. p. 493. 1896) hervorgeht.

Galvanometeranschläge bei Benutzung
des 14 mm weiten Diaphragmas.

Vergleichsplatte	"Schwarzer Körper"
29,9	86,3 (171°)
80,0	88,9
80,0 (171°)	88,6
30,5	89,0
30,6	88,3
30,0 (171°)	86,1 (171°)
30,0	88,8
30,2	88,5
30,1	88,5
80,0	88,4
Im Mittel = 30,13	88,54

Galvanometeranschläge für $\lambda = 25,5 \mu$ bei Benutzung des 32 mm
weiten Diaphragmas.

Vergleichsplatte	Silber	Kadmium	Nickel (nicht rein)
156,5 (172°)	2,5	5,1 (170°)	6,8
156	2,2	5,2	6,6
156	2,5	5,8	6,8
156,5	2,3 (171,5°)	5,5	6,9
157,0	2,4	5,1 (171°)	6,6 (172°)
—	2,2	4,9 (172°)	6,6 (172°)
154,5 (171°)	2,1	5,3	6,4
154,0	2,3	5,0	6,8
155,5	2,1	5,1	6,4
154,5	2,1 (171,8°)	5,1	6,4
Im Mittel = 155,6	2,37	5,16	6,63

Reduktionsfaktor für die Emission der
Vergleichsplatte auf den "schwarzen Körper"

$$f = \frac{88,54}{80,13} = 1,28$$

desgl. nach einem früheren Versuch = 1,30

$$\text{Mittel: } f = 1,29$$

Folglich Emissionsvermögen der untersuchten 3 Metalle:

$$\text{für Silber} \dots \dots E = \frac{2,27 \cdot 100}{156,6 \cdot 1,29} = 1,13 \text{ Proz.}$$

$$\text{" Kadmium} \dots \dots E = \frac{5,16 \cdot 100}{156,6 \cdot 1,29} = 2,57 \quad "$$

$$\text{" Nickel (nicht rein) } E = \frac{6,63 \cdot 100}{156,6 \cdot 1,29} = 3,30 \quad "$$

Vor dem 32 mm weiten Diaphragma C_1 unserer Versuchsanordnung (Fig. 3) wurde ein elektrisch erhitzter, kastenförmiger, flacher Hohlkörper aus blankem Platinblech aufgestellt von der Form, wie ihn die Herren Lummer und Kurlbaum ¹⁾ bei Versuchen über die Emission des blanken Platins angewandt haben. Die Temperatur des Platinhohlkörpers konnte durch ein in seinem Innern befindliches Le Chateliersches Thermo-
element gemessen werden. Für höhere Temperaturen (800 bis 1560°) wurde der Hohlkörper durch einen einfachen, aus demselben Platinblech geschnittenen Streifen ersetzt, dessen Temperatur mit Hilfe des Holborn und Kurlbaumschen ²⁾ optischen Pyrometers bestimmt wurde. Die hiermit direkt beobachtete „schwarze“ Temperatur wurde nach der von den genannten Herren aufgestellten Korrektortabelle auf die Celsiuskala umgerechnet. Bei den Versuchen mit hohen Temperaturen (über 800°) war es erforderlich, die Zahl der reflektierenden Flußspatflächen von drei auf vier zu vermehren, da sonst die Reststrahlen nicht genügend rein waren. Die dann noch vorhandenen geringen Verunreinigungen derselben durch Strahlung kurzer Wellenlänge wurden durch Einschalten einer Steinsalzplatte in den Strahlengang ermittelt und der Betrag in Abrechnung gebracht. Ferner wurde für die höheren Temperaturen das nur 14 mm weite Diaphragma C_2 angewandt, welches einen direkten Vergleich der Strahlung des glühenden Platinbleches mit derjenigen unseres schwarzen Körpers bei 170° C. ermöglichte. Ist aber die Strahlung des schwarzen Körpers für Reststrahlen von Flußspat für eine Temperatur bekannt, so läßt sie sich ohne weiteres für alle Temperaturen angeben, da nach Rubens und Kurlbaum ³⁾ die Intensität der beobachteten Reststrahlung bei Temperaturen oberhalb 20° C. proportional der Temperaturdifferenz zwischen dem schwarzen Körper und der Thermosäule ist, eine Tatsache, welche durch die von Hrn. Planck ⁴⁾ abgeleitete Strahlungsgleichung ihre Begründung gefunden hat. Dadurch war man in der Lage, die

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Verhandl. d. Physikal. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 106. 1898.

2) L. Holborn u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 10. p. 225. 1903.

3) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 4. p. 649. 1901.

4) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 553. 1901.

Strahlung des glühenden Platinbleches stets auf die Strahlung eines gleich temperierten schwarzen Körpers zu beziehen, d. h. die Größe $(100 - R)$ direkt ermitteln zu können. Der Anschluß dieser Versuche bei hoher Temperatur an diejenigen bei tieferer geschah in der Weise, daß zwischen 700° und 800° C. mit *beiden* erwähnten Versuchsanordnungen Galvanometerausschläge beobachtet wurden. Bildet man das Verhältnis zweier Ausschläge, die in beiden Versuchsanordnungen derselben Temperatur der Strahlungsquelle entsprechen, so erhält man einen Reduktionsfaktor, mit welchem die bei höherer Temperatur beobachteten Ausschläge zu multiplizieren sind, um denjenigen bei niedriger Temperatur direkt vergleichbar zu werden. Die Resultate unserer Versuche nach Durchführung dieser Umrechnung sind in der Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

Temperatur des Platinbleches t° Celsius	Beobachteter Ausschlag	Bemerkungen
1556	200	Glühender Platinstreifen vor dem engen Diaphragma C_2 , 4 Fluoritflächen, Tem- peraturmessung mit dem optischen Pyrometer. ¹⁾ Der schwarze Körper ergab bei 170° C. einen (reduzierten) Galvanometerausschlag von 196 mm.
1438	177	
1320	153	
1214	130	
1100	109,5	
976	89,7	
858	74,6	
762	63,6	
804	68,0	Platinhohlkörper vor dem weiten Dia- phragma C_1 , 3 Fluoritflächen, Tempe- raturmessung mit dem Thermoelement.
695	53,2	
614	45,4	
493	32,2	
404	24,4	
323	18,2	
261	12,4	
169	6,5	

1) Die Temperaturmessungen mit dem optischen Pyrometer hat Hr. Günther Schulze, diejenigen mit dem Thermoelement Hr. Rud. Rothe ausgeführt.

Die direkte Bestimmung der elektrischen Konstanten des von uns benutzten Platinbleches ergab das Leitungsvermögen $\kappa_0 = 6,5$ (spezifischer Widerstand gleich 0,154) und zwischen 18 und 65° den Temperaturkoeffizienten $\alpha = 0,0024$. Diese Zahlen lassen erkennen, daß das benutzte Platin nicht rein war; es ist dies jedoch für den vorliegenden Zweck belanglos.

Sehr gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Emissionswerten des Platinbleches erhält man, wenn man setzt

$$(5) \quad \kappa_t = \kappa_0 (1 + \alpha t + \beta t^2),$$

worin

$$\kappa_0 = 0,154$$

$$\alpha = 0,0024$$

$$\beta = 0.0000033$$

ist.

Es wird dies durch die Tab. 6 bewiesen, welche in ihrer ersten Kolumne einige Temperaturen in Celsiusgraden, in der zweiten die aus Formel (5) berechneten hierzu gehörigen spezifischen Widerstände, in der dritten die entsprechenden Leitvermögen κ_t , in der vierten das aus der Gleichung

$$(100 - R) = \frac{7.23}{\sqrt{\kappa_t}}$$

berechnete Emissionsvermögen des benutzten Platins enthält. Die fünfte Kolumne gibt die Strahlung γ_t des schwarzen Körpers, wie sie sich für die betreffende Temperatur aus der Strahlung des schwarzen Körpers bei 170° ableitet. Die sechste Kolumne enthält diejenigen Galvanometerausschläge α für die Emission des erhitzten Platinbleches, welche aus den Zahlen der Tab. 5 für die verschiedenen Temperaturen durch *Interpolation* unmittelbar folgen. Dividiert man nun die mit 100 multiplizierten Zahlen der Kolumne 6 durch die Zahlen der Kolumne 5, so erhält man die in Kolumne 7 aufgeführten „beobachteten“ Emissionsvermögen. Die Übereinstimmung dieser Zahlen mit den „berechneten“ der Kolumne 4 ist um so beweisender, als sie absolute Werte sind und keinen willkürlichen Faktor enthalten.

Tabelle 6.

1	2	3	4	5	6	7
Temperatur t in Celsius-graden	Spezifischer Widerstand $w_t = w_0 \cdot (1 + \alpha t + \beta t^2)$	Leitungsvermögen κ_t	Emissionsvermögen ber. ($100 - R$) $= \frac{7,23}{\sqrt{\kappa_t}}$	Emission des schwarzen Körpers γ_t	Ausschlag α beob.	Emissionsvermögen (100 - R) beob.
170	0,233	4,31	8,49	196	6,6	8,36
220	0,260	3,84	8,68	261	9,6	8,68
300	0,312	3,22	4,04	366	15,7	4,29
600	0,559	1,79	5,40	758	42,8	5,65
900	0,900	1,11	6,86	1150	79,6	6,93
1200	1,33	0,751	8,34	1540	128,0	8,32
1500	1,85	0,540	9,84	1940	189,5	9,78

Die Koeffizienten w_0 und α der Gleichung (5) sind den elektrischen Bestimmungen unmittelbar entnommen. In dem Gebiet tieferer Temperaturen (bis etwa 250°), wo der Einfluß des quadratischen Gliedes nur gering ist, stimmen die beobachteten Emissionswerte mit den aus dem elektrischen Leitvermögen berechneten völlig überein, und zwar sowohl bezüglich ihres absoluten Betrages, als auch hinsichtlich ihrer Änderung mit der Temperatur. Dagegen ist die Annahme eines quadratischen Gliedes mit dem Koeffizienten β unbedingt notwendig, um auch im Gebiet der hohen Temperaturen Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Emissionswerten hervorzubringen.

Der Koeffizient $\beta = 0,0000033$ hat in der Gleichung (5) ein positives Vorzeichen, was auf ein schnelleres Wachsen des Widerstandes bei hohen Temperaturen hinweist. Es steht dies im Widerspruch mit Messungen der Herren Benoit¹⁾, L. Callendar²⁾, sowie von L. Holborn und W. Wien³⁾, welche sämtlich eine geringe Abnahme der Widerstandsänderung mit wachsender Temperatur beobachteten, was einem kleinen, negativen Wert von β entspricht.

1) R. Benoit, Compt. rend. 76. p. 342. 1873.

2) L. Callendar, Phil. Mag. (5) 47. p. 191. 1899.

3) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. 56. p. 360. 1895.

Es ist hiernach zu vermuten, daß das aus unseren Emissionsbeobachtungen berechnete stärkere Anwachsen des Widerstandes bei höheren Temperaturen nur ein scheinbares ist, und daß dort noch andere Faktoren auf die Änderung der Emission des Platins einwirken. Insbesondere ist es nicht unwahrscheinlich, daß bei hohen Temperaturen eine Veränderung der Oberflächenbeschaffenheit (Rauwerden der Oberfläche) eintritt, welche eine merkliche Erhöhung des Emissionsvermögens bedingt. Auch ist nicht ausgeschlossen, daß die beobachteten Abweichungen mit der immerhin unvollkommenen Homogenität der Reststrahlen im Zusammenhang stehen.

Ergebnisse der Untersuchung.

1. Die *Reflexionsvermögen* der untersuchten Metalle für $\lambda = 0,65$ bis 14μ sind in Tab. 1 (p. 881), die *Emissionsvermögen* für $\lambda = 25,5 \mu$ und 170° C. in Tab. 4 (p. 892) enthalten.

2. Die in die Metalle eindringende Strahlungsintensität $(100 - R)$ und die Emission ist für lange Wellen umgekehrt proportional der Wurzel aus dem elektrischen Leitvermögen κ und umgekehrt proportional der Wurzel aus der Wellenlänge λ der auffallenden Strahlung. Diese Gesetzmäßigkeit, welche mit den Forderungen der Maxwellschen Theorie im Einklang ist, gilt um so genauer, je längere Wellen man verwendet. Es wird dies durch die Tab. 7 bewiesen, welche für vier Wellenlängen des ultraroten Spektrums die Mittel aus den beobachteten Werten der Konstanten $C_1 = (100 - R)\sqrt{\kappa}$, ferner die durchschnittliche Abweichung in Prozenten der für die einzelnen Metalle beobachteten Produkte von diesem Mittelwert, endlich die Werte C_2 enthält, wie sie sich aus der Gleichung (4) nach der Maxwellschen Theorie ergeben.

Tabelle 7.

λ	$C_1 = (100 - R)\sqrt{\kappa}$ beob.	Durchschnittliche Abweichung vom Mittel	$C_2 = \frac{36,5}{\sqrt{\lambda}}$ ber.
4 μ	19,4	21,0 Proz.	18,25
8	13,0	14,5	12,90
12	11,0	9,6	10,54
25,5	7,36	4,9	7,23

3. Die Größe $(100 - R)$ zeigt die von der Maxwell'schen Theorie wegen der Widerstandsänderung der Metalle geforderte Abhängigkeit von der Temperatur.

Diese beiden Tatsachen bilden eine wichtige Bestätigung der Maxwell'schen Theorie, und zwar auf einem Gebiet, auf welchem bisher kein Zusammenhang zwischen den beobachteten Erscheinungen und den theoretisch hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten zu erkennen war.

4. Aus unseren Beobachtungen muß geschlossen werden, daß die Eigenschwingung der Moleküle das optische Verhalten der Metalle in dem Gebiet langer Wellen nicht mehr wesentlich beeinflussen.

5. Ein Einfluß der magnetischen Eigenschaften von Eisen und Nickel ¹⁾ auf ihr Verhalten diesen Strahlen gegenüber ist nicht zu konstatieren. Anderenfalls hätte der Wert $(100 - R)$ für diese Metalle erheblich größer ausfallen müssen, als er sich nach der Formel (4) aus dem Leitvermögen für stationären Strom berechnet ²⁾.

6. Man wird daher berechtigt sein, in dem Gebiet langer Wellen die Übereinstimmung auch der übrigen optischen Konstanten mit den aus der Maxwell'schen Theorie berechneten Größen anzunehmen. Nach derselben ergeben sich, wie bereits Hr. Drude ³⁾ gezeigt hat, der Extinktionskoeffizient (g) und der Brechungsindex (n) der Metalle für normale Inzidenz als numerisch gleich und zwar *angenähert* ⁴⁾ zu:

$$(6) \quad g = n = 5,48 \sqrt{x \lambda}.$$

1) Nach Hrn. P. Drude kann dies zu Gunsten der von ihm ausgearbeiteten Theorie des Magnetismus durch zirkular schwingende Elektronen gedeutet werden (vgl. Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 143 u. 148. 1903).

2) Nach den Versuchen von Hrn. V. Bjerknes (Wied. Ann. 47. p. 69. 1892) zeigt sich der Magnetismus der ferromagnetischen Metalle bei einer Schwingungszahl von der Ordnung 10^8 pro Sekunde bereits sehr stark.

3) P. Drude, Physik des Äthers, p. 575, Formel (68). 1894.

4) In Formel (6) ist x das spezifische Leitvermögen des Metalles für die betreffende Temperatur, so daß $1/x = w$ den Widerstand eines Leiters von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt in Ohm bedeutet. λ ist die Wellenlänge in μ .

Ferner ist

$$(7) \quad R = 100 \left(1 - \frac{2}{\nu} \right) = 100 \left(1 - \frac{2}{g} \right)$$

folglich

$$(8) \quad g = \nu = \frac{200}{100 - R}.$$

Beide Größen sind mithin aus dem Emissionsvermögen allein bestimmbar.

7. Eine weitere Folge, welche sich aus der Übereinstimmung unserer Versuche mit der elektromagnetischen Lichttheorie ergibt, verdient besonders hervorgehoben zu werden. In die theoretische Berechnung der Konstante C geht außer Zahlenfaktoren nur die Lichtgeschwindigkeit und die Wellenlänge ein, welche durch Strahlungsversuche ermittelt werden können. Dividiert man nun das Emissionsvermögen eines Metalles für die Wellenlänge λ (die Emission des schwarzen Körpers gleich 100 gesetzt) durch die Konstante C und quadriert den Quotienten, so erhält man den elektrischen Leitungswiderstand in Ohm, den ein Draht aus dem betreffenden Metall bei 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt besitzt. Man ist dadurch also jetzt in der Lage, *absolute* elektrische Widerstandsbestimmungen lediglich mit Hilfe von Strahlungsmessungen vornehmen zu können.

(Eingegangen 26. April 1908.)

2. Elektrische Doppelschicht und absolutes Potential.

*Kontaktelektrische Studien I;
von Jean Billitzer.*

Bei jedem Gleichgewichtszustande, in welchem elektromotorische Kräfte wirksam werden, tritt an bestimmten Stellen des Systems eine Scheidung der Elektrizitäten auf, welche sich durch einen Potentialsprung zu erkennen gibt, dessen Sinn und Größe von den Versuchsbedingungen abhängt. Und wir haben uns nach H. v. Helmholtz¹⁾ vorzustellen, daß diese Scheidung der + und – Elektrizität in Elektrolyten innerhalb einer elektrischen Doppelschicht stattfindet, welche dadurch gekennzeichnet ist, „daß sich auf den entgegengesetzten Seiten einer Fläche, in außerordentlich geringer Entfernung voneinander zwei Schichten ausbilden, deren eine ebensoviel positive Elektrizität enthält, wie die andere negative“.

So gering nun der Abstand der Schichten voneinander ist²⁾, bleibt er immerhin groß genug, daß ein elektrischer Strom, der ein Potentialgefälle und hiermit auch ponderomotorische elektrische Kräfte hervorbringt, auf die Doppelschicht einzuwirken vermag, indem der positive Anteil zum negativen Pol gezogen wird, der negative Anteil hingegen einen Antrieb zum positiven Pol erfährt. Es resultiert also eine Verschiebung beider Schichten zueinander, welche zu Bewegungserscheinungen führen kann, wenn die Doppelschicht in die Grenzfläche zweier Körper fällt, die beide beweglich sind (z. B. Überführung schwebender Partikeln zu den Elektroden), oder in die Trennungsschicht eines starren und eines

1) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 165. p. 228. 1853; Wied. Ann. 7. p. 337. 1877.

2) Lord Kelvin schätzt (Amer. Journ. of Science (2) 50. p. 38. 1870; Nature 31. März und 19. Mai 1870) ca. $0,3 \times 10^{-7}$ mm als seinen unteren Grenzwert, während H. v. Helmholtz l. c. mit Benutzung Kohlrauschscher Zahlenangaben denselben gleich $0,4-0,8 \times 10^{-7}$ findet.

beweglichen Körpers (z. B. Diaphragmenströme, Strömungsströme, Elektroendosmose) etc.

Nun ist es unmittelbar einzusehen, daß unter sonst gleichen Umständen Sinn und Ausmaß der Bewegung durch die Beschaffenheit der Doppelschicht bestimmt wird. Kehrt sich aus irgend einem Grunde das Zeichen ihrer Flächenbelegungen um, so ist — bei Ausschluß aller Nebenwirkungen — ein Gleiches von der Bewegungsrichtung zu erwarten und nur beim völligen Verschwinden der Doppelschicht wird jede Bewegung ausbleiben.

Von diesem Gedanken ausgehend, habe ich es im folgenden unternommen, zu prüfen, ob sich auf Grund der Beobachtung solcher Bewegungserscheinungen Gesetzmäßigkeiten ergeben und ob es gelingt etwas Bestimmtes für den Sinn der Ladung zu finden. Sodann habe ich untersucht, ob das Ausbleiben jeder Bewegung bez. der Punkt, an welchem sich die Bewegungsrichtung umkehrt — die Doppelschicht also nach v. Helmholtz verschwindet — mit dem Maximum der Oberflächenspannung des Quecksilbers zusammenfällt, wie es von der Theorie verlangt wird. Auf Grund der Versuchsergebnisse ließen sich dann allgemeinere Betrachtungen anstellen, welche zu einer Modifikation des Begriffes der Doppelschicht führten.

I. Apparate und Methode.¹⁾

Feine Metalldrähte (0,01—0,05 mm Dicke) wurden an ihrem einen Ende zu kleinen Kugeln verschmolzen, am anderen an einem Quarzfaden befestigt, und so zwischen zwei Elektroden gehängt, durch welche jeweilig ein Strom von 220, 148, 72 oder 10 Volt geschickt werden konnte. Ihre Ablenkung beobachtete ich durch ein kleines Mikroskop mit Mikrometerokular. Um mich hierbei von den rein elektrostatischen Wirkungen frei zu machen, bestimmte ich immer nur den Ausschlag, welcher beim Kommutieren des Stromes auftritt, in diesem Momente kehren sich nämlich alle polaren Erscheinungen um, während die nicht polaren — und nur mit solchen haben wir es bei elektrostatischen zu tun — im gleichen

1) J. Billitzer, Zeitschr. f. Elektrochem. 8. p. 638. 1902.

Sinne und gleicher Stärke fortbestehen. Um weiteren Täuschungen zu entgehen, zog ich nur Metalle in den Kreis meiner Untersuchungen. Isolatoren sind ja leicht Träger zufälliger Ladungen und können deshalb zu irrigen Schlüssen führen. Ursprünglich wurden nur Kugeln verwandt, die *metallisch* mit der Erde verbunden waren, die Ausschläge sind da auch (z. B. mit Pt an einem 0,01 mm dicken, ca. 20 cm langen Pt-Draht) zu beobachten, doch überzeugte ich mich bald, daß es ohne Einfluß auf das Resultat bleibt, wenn man die Erdleitung aufhebt und benutzte des weiteren nur wenige Zentimeter lange Drähte, welche mittels einer Spur Kollodium an Quarzfäden befestigt wurden. Die Empfindlichkeit der Anordnung wächst dadurch bedeutend, und eine Beeinflussung des Resultates ist kaum möglich, wenn man nur dafür Sorge trägt, daß der Quarzfaden nicht in die Flüssigkeit taucht.

Zur Aufnahme der Flüssigkeit diente ein Becherglas, wenn dieselbe ein guter Isolator war und die Elektroden wurden einander möglichst genähert. Hatte ich es hingegen mit besser leitenden Flüssigkeiten zu tun, so benutzte ich auf den Rat des Hrn. Prof. Nernst, dem ich es überhaupt verdanke, mich zu der Vereinfachung meiner Versuchsanordnungen geführt zu

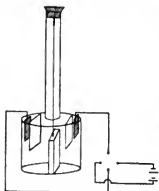


Fig. 1.

haben, zur Erzielung eines höheren Potentialgefälles Bechergläser, welche durch eine isolierende Zwischenwand, die nahe bis an die Flüssigkeitsoberfläche reichte, in zwei Hälften geteilt waren. Durch diesen einfachen Kunstgriff wird eine Einschnürung der Stromlinien an dem Punkte erreicht, wo der Draht hängt und wo eben ein möglichst großer Potentialabfall gewünscht wird. Gelangten Lösungen zur Verwendung, in welchen Elektrolyse auftrat, so benutzte ich

noch außerdem zwei Schutzplatten gegen die aufsteigenden Blasen und die dadurch verursachten Strömungen; ein Mantelrohr schützte den Quarzfaden gegen die Bewegungen der Luft und so gewann der Apparat die Gestalt der beistehenden Fig. 1.

Die Methode ließe sich noch erheblich verfeinern, wenn man statt der Ablenkung pendelartig aufgehängter Körper die Drehung eines Stiftes beobachten wollte, der exzentrisch und parallel zu den Elektroden, im übrigen horizontal zwischen dieselben gehängt wäre. Die Ablesung könnte dann mit Spiegel, Fernrohr und Skala erfolgen und dürfte einen viel höheren Grad der Empfindlichkeit erreichen. Doch war es mir zunächst nicht so sehr darum zu tun, möglichst genaue Zahlenangaben zu erhalten, vielmehr war es mein Hauptbestreben, ein möglichst anschauliches Bild der Erscheinungen zu gewinnen und so zog ich die übersichtlichere Methode der empfindlicheren vor. Auch waren die erzielten Ablenkungen durchaus nicht so geringe, daß der Wunsch sie zu verdeutlichen besonders rege geworden wäre; in günstigen Fällen sind sie sogar gut mit freiem Auge zu beobachten.

In erster Linie prüfte ich nun, ob in verschiedenen Medien deutliche Ablenkungen zu beobachten waren und ob sie bei Wiederholungen der Versuche immer wieder gleichen Sinn und ungefähr gleiche Größe aufwiesen. Nachdem das Ergebnis dieser Vorversuche befriedigend war und ich sogar in Luft einen deutlichen Ausschlag erhielt, überzeugte ich mich, daß die Größe des Ausschlages der Spannung proportional war; denn nur in diesem Falle konnten wir es mit der gesuchten Erscheinung zu tun haben. Um einen Anhaltspunkt dafür zu geben, inwieweit diese Forderung erfüllt wird, sei hier ein Mittel aus sieben Versuchen angeführt:

Spannung	Ausschlag in willkürlichem Maße
220	12
148	8
72	2—3

Ziel der Untersuchung war es nunmehr zu versuchen, ob eine Umkehr der Ablenkung durch verschiedene Zusätze zu erreichen ist, und die Lage dieses Umkehrpunktes in verschiedenen Fällen zu bestimmen. War ein solcher einmal gefunden, so war eine Elektrode gegeben, in welcher zwischen Metall und Flüssigkeit kein Potentialsprung auftritt. Verbindet man dieselbe mit einer konstanten, z. B. mit einer Kalomel-

elektrode, so hat man ein Element vor sich, an welchem der Sitz der elektromotorischen Kraft nur an einem Punkte, z. B. zwischen Quecksilber und Kalomel zu suchen war — wenn man von den äußerst geringen Potentialunterschieden an der Berührungsfläche der Flüssigkeiten und von den möglichen Potentialdifferenzen zwischen den Metallen selbst absieht — und kann somit auf einfache Weise das „absolute“ Potential der betreffenden Anordnung messen.

I. Versuche.

Eine Reihe von Vorversuchen hatte zunächst den Zweck die Methode auszuprobieren und einiges über den Sinn der Ladung, welche ein Platinfaden gegen verschiedene Körper annimmt, in Erfahrung zu bringen.

Es zeigte sich, daß Platin *negative* Ladung erhielt, wenn es mit: Luft, Sauerstoff, destilliertem Wasser, Benzol, Benzol mit HCl geschüttelt, Aceton, Xylol, Wasser dem eine Spur Säure, Base, NaCl, NaBr etc., Brom, Jod zugesetzt war, in Berührung gebracht wurde, dagegen lud es sich *positiv* gegen: Wasserstoff, Methylalkohol, Äthylalkohol, Glyzerin, Äther, Formaldehyd, Acetaldehyd, Benzaldehyd (schwach positiv), KMnO_4 , H_2O_2 (40 proz.), Chloroform, Chlorwasser etc.

In dieser Form sind die Resultate wenig übersichtlich; Oxydations- und Reduktionsmittel scheinen keine wesentlich verschiedene Rolle zu spielen; indifferente Körper wie Aceton, Xylol, Äther, Chloroform wirken verschieden ein und in dem Verhalten gegen Säure und Base ist kein Unterschied vorhanden, wie er nach O. Knoblauch¹⁾ zu erwarten wäre.

Scheinbar regellos also, werden die Erscheinungen doch wohlgeordnet, wenn man nicht nur die chemischen Eigenschaften der Agentien in das Auge faßt, sondern auch ihre Konzentration in Rücksicht zieht. Da zeigt es sich, daß Platin zwar positiv gegen konzentrierte (schwach saure) Formaldehydlösungen, sich negativ gegen dieselben lädt, wenn man sie weitgehend verdünnt, ebenso geht die positive Ladung gegen Alkohole in negative über, wenn man genügend Wasser zusetzt.

1) O. Knoblauch, Zeitschr. f. phys. Chem. **39**, p. 225. 1902.

In saurer Wasserstoffsuperoxydlösung positiv, wird Platin negativ, wenn man alkalische Reaktion erzeugt, in äußerst verdünntem Bromwasser negativ, wird es positiv, wenn man den Bromgehalt erhöht. Mit einem Werte: *Platin verhält sich vollständig wie eine Sauerstoff- oder Wasserstoffelektrode, deren Potential gegen die Lösung, je nach ihrer stärkeren oder schwächeren Beladung und je nach dem Ionengehalt der Lösung wechselt.* Dies noch unter anderen Bedingungen zu prüfen, wurde ein Platindraht als Kathode in alkalischer Lösung verwendet und dann wie gewöhnlich untersucht. Also mit Wasserstoff beladen, zeigte sie sich negativ gegen schwach saure und schwach alkalische Lösungen. Wurde er hingegen erst als Anode in saure Lösung gehängt und hiermit in eine Sauerstoffelektrode verwandelt, so war der Sinn seiner Ladung: *negativ* gegen schwach alkalische Lösungen, *positiv* gegen schwach saure Lösungen.

Mit der Abstufung des Sauerstoff- oder Wasserstoffpotentials haben wir somit ein Mittel gewonnen, den Ladungssinn von Platin gegen verschiedene Lösungen zu regeln. Von dieser Tatsache ausgehend wurde es nunmehr angestrebt, die Lage des Null- oder Umkehrpunktes zu fixieren. Aus rein praktischen Gründen empfiehlt es sich aber nicht so sehr, den Umkehrpunkt selbst aufzusuchen, weil er doch in einem Intervalle liegt, in welchem die Ausschläge recht klein, ihre Beobachtung somit wenig sicher ist, als vielmehr mehrere Punkte knapp oberhalb und unterhalb derselben zu bestimmen, an welchen die Ausschläge deutlich sichtbar sind, und zu konstatieren, daß der Sinn des Ausschlages bei weiterer Entfernung vom Nullpunkte nicht mehr wechselt.

Durch geringfügige Zusätze oxydierender oder reduzierender Substanzen, durch Änderung der Reaktion der Lösung wurde stufenweise der Platindraht mit Sauerstoff oder Wasserstoff beladen. War er einige Zeit mit der Lösung in Berührung geblieben und mit ihr in das Gleichgewicht getreten, so wurde mehrmals der Sinn des Ausschlages beim Kommutieren des nunmehr durchgesandten Stromes beobachtet. Das Potential zu messen, welches sie gegen die Lösung besaß, wurde dann eine größere platiniierte Platinelektrode in eine gleiche Lösung getaucht, Gleichgewicht abgewartet, die Lösung dann vermittelt eines Gelatinehebers mit zwischengeschalteter

KCl-Lösung einer Kalomelektrode (die mit 0,1 KCl beschickt war) verbunden und die elektromotorische Kraft dieses Elementes nach der Kompensationsmethode gemessen. Als Nullinstrument diente ein d'Arsonvalgalvanometer von der Empfindlichkeit ca. 1×10^{-8} , die Spannung wurde an einem Präzisionsvoltmeter von Hartmann & Braun abgelesen, das 0,01 Volt zu schätzen erlaubte.

Um wohl definierten Verhältnissen zu begegnen, wurden immer nur Lösungen mit ausgesprochen (schwach) saurer oder alkalischer Reaktion benützt, anderenfalls eine erhebliche Unsicherheit der Potentialdifferenz nicht zu vermeiden ist.

Recht leicht und bequem läßt sich das Reduktionspotential in Lösungen festhalten, die Ferri- und Ferroionen enthalten, eine Regelung desselben gelingt einfach durch Verschiebung des Konzentrationsverhältnisses dieser Ionengattungen, während ihre absolute Konzentration wesentlich bleibt. Ich ging in mehreren Fällen von einer Ferrisulfatlösung aus, der ich langsam Ferrosulfat zusetzte oder vice versa, die Konzentration der ursprünglichen Lösung wurde in verschiedenen Fällen verschieden, immer jedoch sehr klein gewählt.

Lösung: $\text{FeSO}_4 + \text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ in wechselndem Verhältnis.

	Potential der Meßelektrode in der untersuchten Lösung gegen die Kalomelektrode (0,1 KCl)	Ladungseinn des Platins gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,16	+
	+0,15	+
	+0,14	+
	+0,13	+
	+0,125	+
	+0,10	+
	+0,09	+
		(sehr schwach)
		—
2. Versuchsreihe:	+0,18	+
	+0,16	+
	+0,13	+
	+0,10	+
	+0,08	+
		(schwach)
		—

Die Umkehr findet etwa bei + 0,12 Volt statt. Als starkes Reduktionsmittel, zugleich als sehr schwacher Elektrolyt

empfehlte sich Formaldehyd bei diesen Messungen. Infolge seiner langsamen Oxydation an der Luft enthält er stets etwas Ameisensäure, die Reaktion ist also sauer.

Lösung: Formaldehyd in wechselnder Konzentration.

	Potential der Meßelektrode gegen die Kalomelektrode	Pt ladet sich in derselben Lösung
1. Versuchsreihe:	+ 0,17	+
	+ 0,15	+
	+ 0,14	+
	+ 0,13	+
	+ 0,12	(?)
	+ 0,11	—
	+ 0,10	—
	+ 0,09	—
2. Versuchsreihe:	+ 0,18	+
	+ 0,16	+
	+ 0,14	+
	+ 0,12	—
	+ 0,10	—
	+ 0,08	—

Die Umkehr findet etwa bei + 0,125 Volt statt. Es zeigt sich ferner, daß auch mit Alkohol-Wassergemischen eine Umkehr zu erreichen war, und seine Verwendung empfahl sich wegen seiner Isolationskraft. Der gebrauchte Äthylalkohol war etwa 94 proz.

Lösung: Alkohol-Wassergemisch.

	Alkohol	Wasser	Pt der Meß- elektrode	Pt gegen die Lösung
Volumenverhältnis:	1	0	0,155	+
	9	1	0,15	+
	5	1	0,149	+ (schwach)
	4	1	0,148	±
	3	1	0,147	±
	2	1	0,146	—
	1	1	0,455	—
	1	2	0,139	—

Bei dieser Meßreihe, wie bei der vorigen, mußte es auffallen, daß Alkohol und gar Formaldehyd wider alle Erwartung das Potential der Elektrode nicht wie ein Reduktionsmittel verändern, sondern sich zu derselben wie Oxydationsmittel verhalten. Diese Eigenschaft teilen sie, wie wir schon p. 906

gesehen haben, mit einer ganzen Reihe von Aldehyden und Alkoholen (auch Äther) und nichts lag näher als die schon von Schönbein beschriebenen, von zahllosen Forschern bestätigten und vermehrten Beobachtungen über die Autoxydation zu ihrer Erklärung heranzuziehen. In der Tat führen Richardson und Fortley¹⁾, neben Äthyläther ein Reihe von Alkoholen an, die bei ihrer Oxydation an der Luft Wasserstoffsuperoxyd hilden. Auch hat Jorissen²⁾ gezeigt, daß es gelingt mit Benzaldehyd, Propionaldehyd etc. Ferrocyankalium bei Gegenwart von Luft zu Ferricyankalium zu oxydieren; Bach³⁾ führt noch Methyl-Äthylalkohol, Formaldehyd neben vielen anderen Körpern an, und es ließen sich noch eine ganze Reihe solcher Beispiele anführen, welche dartun, daß Reduktionsmittel unter gewissen Bedingungen vermöge der Autoxydation des Sauerstoffes oxydierend zu wirken befähigt werden. Im Plane der Untersuchung mußte es daher liegen zu prüfen, ob das in geringer Menge auftretende Wasserstoffsuperoxyd auch wirklich ähnliche Effekte hervorzurufen vermag. Und es zeigte sich, daß in der Tat geringe Spuren des Hyperoxydes zumal in saurer Lösung dem Platin ein hohes Sauerstoffpotential erteilen.

Die Umkehrung ist gerade in solchen Lösungen recht bequem zu beobachten, weil minimale Zusätze schon genügen und weil durch die Änderung der Reaktion der Lösung das Oxydationspotential sehr leicht zu regulieren ist.

Lösung: H_2O_2 in wechselnder Konzentration und Reaktion.

	Potential der Meßelektrode gegen die Kalomelektrode:	Pt ladet sich in gleicher Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,4	+
	+0,3	+
	+0,2	+
	+0,15	+
	+0,12	?
	+0,10	—
	+0,08	—

1) Richardson u. Fortley, Zeitschr. f. phys. Chem. 22. p. 650 bis 651. 1898.

2) W. P. Jorissen, Zeitschr. f. phys. Chem. 22. p. 47. 1898.

3) Bach, Compt. rend. 124. p. 2 u. 951. 1897; Moniteur scient. [4] 11. II. p. 479. 1897.

	Potential der Meßelektrode gegen die Kalomelektrode:	Pt ladet sich in gleicher Lösung
2. Versuchsreihe:	+ 0,35	+
	+ 0,25	+
	+ 0,15	+
	+ 0,095	-
	+ 0,05	-

Die Umkehr findet wieder bei etwa + 0,125 Volt statt.

Die erreichte Übereinstimmung legte nun den Wunsch nahe, ähnliche Versuche mit anderen Metallen auszuführen. Leider sind nur wenige derselben zu derartigen Messungen geeignet. Tragen wir nämlich den gefundenen Umkehrpunkt in die Spannungsreihe¹⁾ der Metalle gegen ihre 1-normalen Salzlösungen (Fig. 2) ein und ziehen wir es in Betracht, daß die Anwendung größerer Ionenkonzentrationen in der Lösung

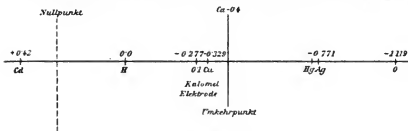


Fig. 2.

durch die Versuchsbedingungen ausgeschlossen ist, und daß das elektromotorische Verhalten der Edelmetalle, wie Au, Pd etc. von dem des Platins nicht wesentlich verschieden ist, so sind analoge Versuchsreihen mit anderen Ionen als H^+ und OH^- fast nur mit Quecksilber und Silber auszuführen. Es gelangten daher zunächst nur diese zwei Metalle zur Untersuchung; ersteres in Form amalgamierter Gold- oder Platindrähte (die sich ja bekanntlich elektromotorisch wie reines Quecksilber verhalten), letzteres in Gestalt feiner Drähte (0,03 mm), die von Heräus bezogen waren.

Quecksilber. Die Umkehr ist bei bloßem Zusatz von $HgNO_3$ schwer zu erreichen. Zur Vermeidung des Eintrittes

1) Die Werte sind den Messungen N. Z. M. Wilsmores, Zeitschr. f. phys. Chem. 35. p. 291. 1906 entnommen, speziell Tabelle p. 318.

einer Elektrolyse am Drahte, der bei der Amalgamierung immer anschwillt, muß der Spannungsabfall ziemlich klein gewählt werden und dieser Umstand erschwert die Beobachtung. Der Nullpunkt wurde daher nur innerhalb etwas weiterer Differenzen eingeschlossen. Eine einzige Versuchsreihe ist mir in diesem Falle einwandfrei gelungen.

I. Meßelektrode war selbstredend Hg, Lösung: HgNO_3 .

Spannung der Meßelektrode	Quecksilber gegen diese Lösung
+ 0,4	+
+ 0,2	+
+ 0,08	-

Mit Anwendung des Wechsels der Reaktion wurde folgende Versuchsreihe erhalten (zur Erreichung konstanter Potentialdifferenzen war der Lösung Quecksilbersalz zugesetzt worden. vor einer auftretenden Trübung wurde die Lösung aus später anzuführenden Gründen abfiltriert).

Lösung: HgSO_4 mit H_2SO_4 angesäuert bei steigendem Zusatze von KOH.

Meßelektrode	Hg gegen die Lösung
+ 0,20	+
+ 0,16	+
+ 0,13	+
+ 0,05	-
+ 0,04	-
+ 0,03	-
+ 0,05	-

Versuche mit Silber.

Unter dem Einflusse des Luftsauerstoffs löst sich Silber so deutlich in reinem Wasser auf, daß die Verhältnisse zur Ausführung der Versuche zu wenig definiert sind, etwas präziser werden dieselben, wenn man mit ausgekochtem Wasser in einer Stickstoffatmosphäre arbeitet. Hier war deutlich negative Ladung des Silbers gegen die Flüssigkeit zu beobachten, dagegen blieb es in weitgehend verdünnter AgNO_3 -Lösung stets positiv. Folgende Daten mögen dies illustrieren.

Lösung: H_2O mit wachsendem Zusatz von $AgNO_3$.

Meßelektrode gegen Kalomelektrode	Silber war gegen die Lösung
+ 0,15	+
+ 0,16	+
+ 0,17	+
+ 0,18	+
+ 0,2	+

Durch Verdünnen ist also keine Umkehr zu erreichen, dieselbe gelingt aber beim Fällen mit HCl und Lösen des gebildeten $AgCl$ mittels Ammoniak. Solche und andere Messungen werden sub II und III angeführt werden, da es geboten schien, eine andere Untersuchungsmethode zu wählen.

II. Methode.

Wurden nämlich auch die vorstehenden Versuche zu wiederholten Malen mit immer gleichem Erfolge ausgeführt [dabei wurde den Messungen nur dann Wert beigelegt, wenn keine sichtbare Elektrolyse am Drahte (d. h. die Wirkung als Mittelleiter) zu beobachten war], so darf man trotz der erzielten Übereinstimmung über eine Fehlerquelle nicht hinwegsehen, die der Methode anhaftet, und über deren Größe von vornherein keine Angabe gemacht werden kann. Vermöge ihrer Eigenschaft als Mittelleiter wirken nämlich die verwendeten Drähte auf die umgebende Lösung ein, indem sie die Lösung auf der einen Seite reduzieren, auf der entgegengesetzten oxydieren, und wenn man auch diese Wirkung dadurch möglichst verkleinert, daß man sehr feine Drähte verwendet, den Strom nur ganz kurze Zeit durchsendet und jedesmal kommutiert, so können doch die verschiedenen chemischen Veränderungen eine ähnliche Bewegung des Drahtes auf sekundäre Weise verursacht oder beeinflußt haben. Der ganze Charakter der Messungszeichen, die Umkehr, zumal die Umkehr am selben Punkte, unter ganz verschiedenen Versuchsbedingungen, die Ablenkungen in Isolatoren wie Luft, H_2 ¹⁾ etc. deuten zwar durchaus nicht darauf, daß eine solche Wirkung empfindlich fühlbar wird, doch lassen sie es immerhin wünschenswert erscheinen, reinere Versuchsbedingungen aufzusuchen.

1) Hier wurde die Ablenkung mit einer Spannung von 400 Volt beobachtet.

Wir können nun die Anordnung verbessern, indem wir die Dicke des Drahtes möglichst klein wählen; aber hier ist praktisch bald eine Grenze gesetzt. Es gelingt zwar dünne Metallfolien oder feineren Metallstaub herzustellen, dessen Überführung man beobachten könnte, aber noch viel feiner ist jedenfalls die Verteilung, die ein Metall in seinen kolloidalen „Lösungen“ aufweist, welche man nach Bredig¹⁾ leicht durch Zerstäubung von Drähten unter Wasser in reiner Form erhalten kann. Solche kolloidale Lösungen, oder, besser gesagt, kolloidale Suspensionen bestehen aus Metallteilchen, die kleiner sind als $0,1 \mu$.²⁾ Bei einem (niemals angewandten) Potentialabfall von 1 Volt pro Zentimeter erlangen sie an ihren Enden erst eine Potentialdifferenz von 0,0001 Volt, eine elektromotorische Kraft, die zur Erzeugung der besagten Veränderungen nicht in Betracht kommt.

Um also reinere Versuchsbedingungen zu erhalten beobachtete ich auf den Rat des Hrn. Prof. Nernst die Wanderung kolloidaler Metalle in elektrische Stromgefälle bez. die Beeinflussung ihrer Überführung durch bestimmte Zusätze.

Verhalten sich aber die metallischen Teilchen der kolloidalen Suspensionen elektromotorisch wie das feste Metall? Diese Frage ist, glaube ich, unbedingt zu bejahen. Eine kleine Differenz ist zwar vorauszusehen, so kleine Teilchen besitzen ja bekanntlich etwas größere Löslichkeit, etwas höheren Dampfdruck etc., müssen also auch elektromotorisch etwas verschieden wirken, der Unterschied beträgt aber höchstens Millivolts und ändert um so weniger an der Schlußweise, als meine Potentialmessungen nur auf etwa 0,01—0,02 Volt genau sind, so kleine Unterschiede also unter die Fehlergrenze fallen.

Die Verwendung kolloidaler Metalle bedeutet somit eine wesentliche Verbesserung der Methode, sie gewinnt aber noch durch das Augenfällige der beobachteten Erscheinung an Wert und Überzeugungskraft.

Das kolloidale Metall wurde nach der von Bredig angegebenen Methode³⁾ dargestellt; bei Zusatz von Elektrolyten

1) G. Bredig, *Anorganische Fermente*, Leipzig 1901.

2) l. c. p. 21; H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, *Ann. d. Phys.* 10. p. 1. 1902.

3) G. Bredig, *Zeitschr. f. angew. Chem.* Heft 41. 1898; *Anorganische Fermente* p. 22 ff. Leipzig 1901.

verhinderte eine Spur Gelatine die Koagulation während des Versuches. Die Wanderung wurde in U-Röhren beobachtet, deren unteres Drittel vom Kolloid erfüllt war, während darüber eine gleiche Lösung geschichtet war.

Eine Probe dafür zu gewinnen, daß während des Versuches keine Beeinflussung des Kolloids eintrat, war in den unteren Teil der U-Röhre ein platinierter Platindraht eingeschmolzen, der eine Messung des Potentials in verschiedenen Stadien des Versuches ermöglichte. Der Sinn der Wanderung wurde immer mehrmals durch Kommutieren des Stromes beobachtet und kontrolliert.

Das Übersichten zu erleichtern, wurde endlich dann vor der Potentialmessung dem Kolloide Harnstoff zugesetzt. (Ich habe mich davon überzeugt daß dieser Zusatz ohne Einfluß auf die Wanderung bleibt.)

Versuche.

Kolloidales Platin: Zusatz Formaldehyd.

	Potential der Meßelektrode (platinirtes Platin) gegen die Kalomelektrode	Pt wandert zur	Pt ladet sich gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,16 ———>	Kathode	+
	+0,14 - - ->	Kathode	+
	+0,13 - - ->	?	±
	+0,12 ———>	Anode (?)	±
	+0,11 - - ->	Anode	-
	+0,10 ———>	Anode	-
	+0,05 - - ->	Anode	-
2. Versuchsreihe:	+0,18 ———>	Kathode	+
	+0,15 ———>	Kathode	+
	+0,13 ———>	?	±
	+0,11 ———>	Anode	-
	+0,04 ———>	Anode	-

Kolloidales Platin: Zusatz Kaliumbromat.

+0,20 ———>	Kathode	+
+0,17 ———>	Kathode	+
+0,155 ———>	Kathode	+
+0,13 ———>	?	±
+0,11 ———>	Anode	-
+0,08 ———>	Anode	-

Kolloidales Platin: Zusatz FeSO_4 , $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ in wechselnder Proportion.

	Potential der Meßelektrode (platinirtes Platin in der gleichen Lösung) gegen die Kalomelektrode		Das Kolloid wandert zur	Pt ladet sich in gleicher Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,34	———>	Kathode	+
	+0,3	———>	Kathode	+
	+0,21	———>	Kathode	+
	+0,08	———>	Anode	—
	+0,04	———>	Anode	—
2. Versuchsreihe:	+0,4	———>	Kathode	+
	+0,28	———>	Kathode	+
	+0,2	———>	Kathode	+
	+0,10	———>	Anode	—
	+0,05	———>	Anode	—

Kolloidales Platin: Zusatz H_2O_2 .

1. Versuchsreihe:	+0,3	———>	Kathode	+
	+0,193	———>	Kathode	+
	+0,12	———>	?	?
	+0,08	———>	Anode	—
	+0,06	———>	Anode	—
2. Versuchsreihe:	+0,4	———>	Kathode	+
	+0,2	———>	Kathode	+
	+0,1	———>	Anode	—
	+0,07	———>	Anode	—

Kolloidales Platin wurde mittels durchgeleiteten Sauerstoffs (ca. 20 Min. lang) in schwach saurer Lösung mit O geladen:

Meßelektrode		Das Kolloid wandert zur	Pt ladet sich gegen die Lösung
+0,18	———>	Kathode	+
+0,16	———>	Kathode	+
+0,14	———>	Kathode	+
+0,135	———>	Kathode	+

in schwach alkalischer Lösung:

+0,12	———>	Anode (langsam)	—
+0,11	———>	Anode	—
+0,10	———>	Anode	—

Ebenso wurde Wasserstoff in schwach alkalischer Lösung durchgeleitet

MeBelektrode		Das Kolloid wandert zur	Pt ladet sich gegen die Lösung
+ 0,08	→	Anode	—
+ 0,02	→	Anode	—
+ 0,00	→	Anode	—
+ 0,05	→	Anode	—

Kolloidales Platin, welches durch Zerstäuben des Metalles in absolutem Alkohol erhalten wird, wandert zur Kathode; verdünnt man es mit Wasser, so kehrt sich die Wanderung um, wenn der Alkohol etwa 70 proz. geworden ist, um bei weiterer Verdünnung gleich zu bleiben (vgl. p. 909).

Versuche mit Quecksilber.

Die gewöhnliche Zerstäubungsmethode auf Quecksilber angewendet führt nicht zum kolloidalen Metall. Es entsteht vielmehr eine graue bis schwarze Flüssigkeit, in welcher die einzelnen Quecksilbertröpfchen nur zum Teil den Grad der feinen Verteilung besitzen, das Kolloiden eigen ist. Durch sorgfältige Zerstäubung gelingt es aber, zumal bei kleineren Stromstärken, derartig suspendiertes Quecksilber dennoch fein genug zu erhalten, daß in einem Tage nur wenig ausfällt und die nur ziemlich kurze Zeit beanspruchenden Versuche damit angestellt werden können. Man beobachtet, daß solches Quecksilber im durchfallenden Lichte einen Stich ins Bräunliche besitzt, das von beigemengtem kolloidalen Quecksilber herrührt. Im Laufe der Untersuchungen ist es mir gelungen, auch kolloidales Quecksilber auf elektrischem Wege herzustellen, und dies auf zwei verschiedene Arten; erstlich bildet es sich bei der Elektrolyse sehr verdünnter Merkuronitratlösungen an der Kathode unter Bedingungen, die ich l. c.¹⁾ beschrieben habe, zweitens durch die Zerstäubung von Amalgamen, wie amalgamierten Zinks etc., endlich unter gewissen Bedingungen, die ich später bekannt geben werde direkt bei der Zerstäubung von Quecksilber. Das erstere Kolloid ist nicht rein

1) J. Billitzer, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 35. p. 1929. 1902.

und enthält neben überschüssigem Merkuronitrat noch etwa entstehende Reduktionsprodukte. Das Kolloid, welches aber durch Zerstäubung von Amalgamen der Metalle erhalten wird, die selbst unter den gleichen Bedingungen nicht zerstäuben (z. B. von Zn), ist ganz rein und frei von fremden Beimengungen, dasselbe gilt a fortiori vom letzterwähnten Kolloide.

Ersteres wollen wir im folgenden mit Kolloid I, letzteres mit Kolloid II bezeichnen.

Zerstäubtes graues Quecksilber: Zusatz HgNO_3 .

	Meßelektrode gegen die Kalomelektrode		Das Metall wandert zur	Hg ladet sich gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,48	—>	Kathode	+
	+0,32	—>	Kathode	+
	+0,115	—>	Anode	—
	+0,06	—>	Anode	—
2. Versuchsreihe:	+0,4	—>	Kathode	+
	+0,28	—>	Kathode	+
	+0,22	—>	Kathode	+
	+0,08	—>	Anode	—
	+0,05	—>	Anode	—

Kolloidales Quecksilber I: Zusatz KOH bez. JK.

	Meßelektrode gegen die Kalomelektrode		Das Metall wandert zur	Hg ladet sich gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,49	—>	Kathode	+
	+0,40	—>	Kathode	+
	+0,36	—>	Kathode	+
	+0,21	—>	Kathode	+
	+0,18	—>	Kathode	+
	+0,11	—>	Anode	—
	+0,08	—>	Anode	—
2. Versuchsreihe:	+0,23	—>	Kathode	+
	+0,18	—>	Kathode	+
	+0,15	—>	Kathode	+
	+0,10	—>	Anode	—
	+0,07	—>	Anode	—
	+0,04	—>	Anode	—

Kolloidales Quecksilber II: Zusatz HgNO_3 .

	Meßelektrode gegen die Kalomelektrode		Das Metall wandert zur	Hg ladet sich gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,3	→	Kathode	+
	+0,26	→	Kathode	+
	+0,2	→	Kathode	+
	+0,115	→	?	±
	+0,05	→	Anode	—
	+0,03	→	Anode	—
2. Versuchsreihe:	+0,28	→	Kathode	+
	+0,22	→	Kathode	+
	+0,18	→	Kathode	+
	+0,11	→	?	±
	+0,08	→	Anode	—
	+0,09	→	Anode	—

Versuche mit Silber.

Kolloidales Silber: Zusatz AgNO_3 .

	Meßelektrode gegen die Kalomelektrode		Das Kolloid wandert zur	Ag ladet sich gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,10	→	Anode	—
	+0,18	→	Kathode	+
	+0,26	→	Kathode	+
	+0,35	→	Kathode	+
2. Versuchsreihe:	+0,11	→	Anode	—
	+0,19	→	Kathode	+
	+0,23	→	Kathode	+
	+0,32	→	Kathode	+

AgNO_3 wurde mehr oder minder vollständig mit KBr gefällt und die also erhaltene, mit AgBr gesättigte Lösung nach einer Filtration dem Kolloid zugesetzt.

	Meßelektrode gegen die Kalomelektrode		Das Kolloid wandert zur	Ag ladet sich gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+0,20	→	Kathode	+
	+0,16	→	Kathode	+
	+0,10	→	Anode	—
	+0,02	→	Anode	—
2. Versuchsreihe:	+0,19	→	Kathode	+
	+0,17	→	Kathode	+
	+0,105	→	Anode	—
	+0,07	→	Anode	—
	+0,04	→	Anode	—

Zusatz: AgNO_3 , sodann Ag , $\text{Ag}(\text{CN})_2$ in überschüssigem CNK (klare Lösung).

Meßelektrode gegen die Kalomelektrode		Das Kolloid wandert zur	Ag ladet sich gegen die Lösung
+0,24	>	Kathode	+
+0,21	>	Kathode	+
+0,19	>	Kathode	+
+0,16	>	Kathode (langsam)	+
+0,11	>	Anode (langsam)	—
+0,08	>	Anode	—
+0,02	>	Anode	—
-0,10	>	Anode	—
-0,18	>	Anode	—

Gold und Palladium.

Das elektromotorische Verhalten des Goldes und Palladiums gleiche völlig dem des Platins, d. h. wir haben es wieder mit Wasserstoff- bez. Sauerstoffelektroden zu tun.¹⁾ Suchen wir daher den Umkehrpunkt bei diesen Metallen auf, so kann er nur dann eine Verschiebung gegen den Umkehrpunkt des Platins erfahren, wenn die Metalle Gold, Palladium und Platin gegeneinander eine Potentialdifferenz aufweisen. Die nachstehenden Versuche beweisen — wie mir scheint in exakterer Weise als es bisher geschehen ist —, daß dies, wenigstens innerhalb der Versuchsfehler nicht der Fall ist. Gold, Platin und Palladium besitzen also höchstens Potentialdifferenzen, die wenige Zentivolt betragen.

Kolloidales Gold, in saurer Lösung durch H_2O_2 bez. HCOH , Sauerstoff bez. Wasserstoff beladen.

	Meßelektrode (Goldblech)		Das Kolloid wandert zur	Au gegen die Lösung
1. Lösung:	+0,4	>	Kathode	+
	+0,33	>	Kathode	+
	+0,20	>	Kathode	+
	+0,14	>	Kathode (langsam)	+
	+0,10	>	Anode	—
	+0,05	>	Anode	—
	+0,025	>	Anode	—

1) Le Blanc, Zeitschr. f. phys. Chem. 12. p. 333. 1893.

	Meßelektrode (Goldblech)		Das Kolloid wandert zur	Au gegen die Lösung
2. Lösung:	+ 0,51	—>	Kathode	+
	+ 0,465	—>	Kathode	+
	+ 0,41	—>	Kathode	+
	+ 0,34	—>	Kathode	+
	+ 0,15	—>	Kathode	+
	+ 0,105	—>	Anode (langsam)	—
	+ 0,08	—>	Anode	—
	+ 0,05	—>	Anode	—
	+ 0,02	—>	Anode	—

Kolloidales Palladium in ähnlichen Lösungen:

	Meßelektrode (Palladiumblech)		Das Kolloid wandert zur	Pd gegen die Lösung
1. Lösung:	+ 0,36	—>	Kathode	+
	+ 0,22	—>	Kathode	+
	+ 0,18	—>	Kathode	+
	+ 0,14	—>	Kathode (langsam)	+
	+ 0,105	—>	Anode (langsam)	—
	+ 0,08	—>	Anode	—
	— 0,04	—>	Anode	—
	— 0,195	—>	Anode	—
2. Lösung:	+ 0,20	—>	Kathode	+
	+ 0,17	—>	Kathode	+
	+ 0,15	—>	Kathode	+
	+ 0,09	—>	Anode	—
	+ 0,06	—>	Anode	—
	+ 0,02	—>	Anode	—

III. Methode.

In den bisher beschriebenen Versuchen war die Bewegung aufgehängter oder schwebender Teilchen durch den elektrischen Strom untersucht worden. Nunmehr war es aber erwünscht, eine Methode zu finden, welche den Zeichenwechsel der Doppelschicht erkennen ließ, ohne daß hierzu der elektrische Strom durchgesandt zu werden brauchte, um auf diese Weise sämtliche Fehlerquellen, die etwa durch denselben noch bedingt sein könnten, von vornherein auszuschließen.

Nun hat bekanntlich schon Dorn¹⁾ gezeigt, daß die von

1) E. Dorn, Wied. Ann. 10. p. 70. 1880.

Reuss (l. c.) gefundene, von Quincke (l. c.) u. a. näher studierte Erscheinung der Überführung schwebender Partikeln zu den Elektroden eine umkehrbare ist. Verursacht ein durchgesandter Strom die Bewegung der Teilchen, so erzeugt umgekehrt die Bewegung der Teilchen einen elektrischen Strom, welchen Dorn am Galvanometer beobachten konnte, als er Quarzsand, Glaspulver etc. in einer längeren Röhre durch Wasser fallen ließ und zwei Elektroden an den Enden der Röhren mit dem Galvanometer verband.

Dieselbe einfache Anordnung kann nun zur Bestimmung absoluter Potentiale benutzt werden, wenn man Metallpulverdraht oder -folie durch eine Flüssigkeit fallen läßt, mit welcher es eine umkehrbare Elektrode bildet, und im übrigen genau so verfährt, wie es in den früheren Abschnitten beschrieben wurde.

Sorgt man dafür, daß die Elektroden völlig gleich sind (was durch längeres Kurzschließen in einer geeigneten Lösung erreicht werden kann), daß die Röhre vollständig dicht abgeschlossen (zur Vermeidung von Strömungsströmen) und ganz mit Flüssigkeit gefüllt ist (eingeschlossene Luftblasen sind zu vermeiden), so liefert die geschickte Röhre in horizontaler Lage keinen Strom. Bringt man sie jedoch in vertikale Lage, so erhält man Ströme, die beim Umlegen der Röhre umgekehrt werden, leicht in der Größenordnung 10^{-6} bis 10^{-5} Amp. und selbst darüber erhalten werden können, und welche man daher bequem an einem d'Arsonvalgalvanometer mittlerer Empfindlichkeit beobachten kann.

Nun ist diese, gelegentlich von Dorn (l. c.) beschriebene Erscheinung, nicht näher untersucht worden. Es war daher erst zu prüfen, ob eine solche Anwendung derselben zulässig sei. Die Ergebnisse dieser und anderer sich anschließender Versuche habe ich in der zweiten Abhandlung zusammengestellt und es sei hier schon betont, daß diese Untersuchungen durchaus für die Zuverlässigkeit der Methode sprechen.

Wichtig ist es, sich zu überzeugen, daß die gebrachten Elektroden dieselbe elektromotorische Wirksamkeit besitzen, wie die fallenden Teilchen. Bei den Edelmetallen, die ich in erster Linie in den Kreis der Untersuchungen zog, ist dies einfach zu konstatieren. Hat man sich nämlich davon über-

zeugt, daß die Elektroden aus reinem Metall bestehen und die berechneten Potentialdifferenzen geben, so überschichtet man sie mit dem Metalldraht bez. Metallpulver etc., welcher also nur unedler sein kann, darauf erst mit der betreffenden Lösung und wiederholt nach einiger Zeit, welche man zur Erreichung des Gleichgewichtes abwartet, die Potentialmessung. Die Spannung der Elektrode darf sich nicht im mindesten geändert haben.

Um möglichst reine Verhältnisse vorzufinden, benutzte ich zuvörderst Kombinationen, die als Typus unpolarisierbarer Elektroden gelten, Silberpulver oder Silberdrähte in Silber-salzlösungen. (In der Regel verwendete ich ein Silberpulver, das ich von Heräus-Hanau bezog, dasselbe war völlig frei von unedlen Metallen und sehr feinkörnig.)

Versuche.

Silber zwischen Silberelektroden in einer Silbernitratlösung.

1. Lösung:

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelektrode	Silber hält sich gegen die Lösung
+0,46	+
+0,40	+
+0,32	+
+0,20	+
+0,18	+
+0,10	—
+0,04	—
+0,00	—
—0,05	—
—0,08	—

Bei den letzten fünf Versuchen dieser Meßreihe war der Lösung $\text{KCl} + \text{NH}_3$ zur Entfernung von Silberionen zugesetzt worden. In anderen Fällen wurden Brom oder Jodkalium und Ammoniak, endlich überschüssiges Cyankalium zugesetzt. Eine gewisse Vorsicht ist bei diesen Versuchen stets zu beobachten, die Lösungen sind nur dann zu verwenden, wenn sie vollständig klar sind und keinen Niederschlag an den Elektroden etc. absetzen, denn dies kann, wie ich mich in vielen Fällen überzeugt habe, die Quelle mancher Fehler sein, sei es, daß Meßelektrode und Teilchen nicht mehr identisch sind und daher falsche Potentialbestimmungen geben, oder es erzeugten die

suspendierten AgCl- etc. Teilchen ihrerseits beim Fallen einen Strom, der zu einer weiteren fehlerhaften Bestimmung führen kann, auch scheint eine Wirkung des Lichtes dann zu bestehen. Vermied ich hingegen die Bildung einer Trübung durch entsprechende Wahl der Konzentration, so erhielt ich durchwegs übereinstimmende Resultate¹⁾, und vermute daher, daß sie in allen ähnlichen Fällen erhalten werden dürften.

2. Lösung AgNO₃, Zusatz
KBr + NH₃.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Silber hält sich gegen die Lösung
+0,32 +	
+0,28 +	
+0,22 +	
+0,18 +	
+0,16 +	
+0,14 ±	
+0,12 ±	
+0,09 -	
+0,05 -	
-0,1 -	
-0,22 -	

3. Lösung AgNO₃, Zusatz KJ
(filtriert, klare Lösung).

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Silber hält sich gegen die Lösung
+0,44 +	
+0,32 +	
+0,20 +	
+0,08 -	
+0,00 -	
-0,18 -	

4. Lösung AgNO₃, Zusatz CNK.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelektrode	Silber hält sich gegen die Lösung
+0,46 +	
+0,28 +	
+0,20 +	
+0,16 +	
+0,10 -	
+0,02 -	
-0,12 -	
-0,23 -	

1) Mit Ausnahme einiger vorübergehender Abweichungen in Lösungen von Komplexsalzen, die aber immer durch längeres Kurzschließen, Reiben der Elektroden mit dem fallenden Silberteilchen unter der Lösung etc. zu eliminieren waren und ihren Grund wohl darin fanden, daß die fallenden Teilchen vorübergehend elektromotorisch anders wirkten wie die Elektroden (Passivität?).

Platin. Feines Platinpulver werde zwischen platinirten Platinelektroden fallen gelassen.

In der Lösung H_2O_2 bez. sauer oder alkalisch.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Silber hält sich gegen die Lösung	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Silber hält sich gegen die Lösung
1. +0,32 +		2. +0,28 +	
+0,24 +		+0,21 +	
+0,19 +		+0,17 +	
+0,11 -		+0,10 -	
+0,06 -		+0,08 -	
		+0,03 -	

In der Lösung Formaldehyd (sauer).

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelektrode	Silber hält sich gegen die Lösung
+0,20 +	
+0,16 +	
+0,10 -	
+0,05 -	

In der Lösung $FeSO_4$ und $Fe_2(SO_4)_3$ in wechselnden Proportionen.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Die Teilchen gegen die Lösung	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Die Teilchen gegen die Lösung
1. +0,35 +		2. +0,38 +	
+0,28 +		+0,29 +	
+0,21 +		+0,205 +	
+0,14 + ?		+0,17 +	
+0,08 -		+0,10 -	
+0,06 -		+0,05 -	
		+0,02 -	

In der Lösung $FeCl_2$ und $FeCl_3$ in wechselndem Verhältnis.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Die Teilchen gegen die Lösung	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Die Teilchen gegen die Lösung
1. +0,30 +		2. +0,25 +	
+0,24 +		+0,18 +	
+0,18 +		+0,09 -	
+0,105 -		+0,05 -	
+0,04 -			

Gold. Reines Goldpulver¹⁾ wurde zwischen Goldelektroden fallen gelassen.

In der sauren Lösung Formaldehyd oder H_2O_2 .

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelektrode	Goldteilchen gegen die Lösung
+0,38	+
+0,30	+
+0,22	+
+0,19	+
+0,18	+
+0,16	+
+0,11	—
+0,10	—
+0,09	—
+0,065	—
+0,04	—
+0,03	—

Quecksilber. Zwischen amalgamierten Goldelektroden wurden kleine Quecksilbertröpfchen, wie man sie als schwarzbraune feine Trübung bei der Zerstäubung im elektrischen Lichtbogen unter Wasser erhält, fallen gelassen.

In der Lösung $HgNO_3$ oder $Hg(NO_3)_2$.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Hg-Teilchen gegen die Lösung	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Hg-Teilchen gegen die Lösung
1. +0,4	+	2. +0,33	+
+0,35	+	+0,25	+
+0,3	+	+0,18	+
+0,24	+	+0,10	—
+0,19	+	+0,08	—
+0,17	+		
+0,10	—		
+0,09	—		

In den zwei letzten Versuchen beider Messungsreihen enthielt die Lösung KOH, wurde aber aus bereits angeführtem Grunde vor dem Gebrauche filtriert.

Bekanntlich wird das Maximum der Oberflächenspannung des Quecksilbers bei der Anwesenheit komplexer Quecksilbersalze verschoben, es erschien mir daher nicht unwichtig zu prüfen, ob eine ähnliche Anomalie auch hier zu beobachten ist.

1) Erhalten durch Ausfällen kolloidalen Goldes mit Säure.

Die folgenden Meßresultate zeigen, daß dies nicht der Fall ist (wie es übrigens nach den Erfahrungen an Silber zu erwarten war).

Versetzt man eine Merkuronitratlösung mit Cyankalium, so scheidet sich Quecksilber ab und fällt langsam aus. Eine derartige Lösung kann direkt zur Messung verwendet werden, wobei aber wie bei den früheren Versuchen mit Quecksilber besonders zu prüfen ist, ob das ausgefällte Quecksilber sich elektromotorisch wie die Elektrode verhält (vgl. p. 928), nur in diesem Falle ist dem Versuchsergebnisse eine Bedeutung beizumessen.

Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Hg-Teilchen gegen die Lösung	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelelekt.	Hg-Teilchen gegen die Lösung
1. +0,3 +		2. +0,28 +	
+0,21 +		+0,20 +	
+0,18 +		+0,17 +	
+0,145 + ?		+0,10 -	
+0,11 -		+0,055 -	
+0,09 -		+0,005 -	
-0,08 -		-0,14 -	
-0,22 -		-0,25 -	

Kupfer. Wir hatten im ersten und zweiten Teile nur Edelmetalle in den Bereich unserer Untersuchungen gezogen, weil sich nur diese für unsere Messungen eigneten. Nun wir aber durch den Besitz dieser dritten Methode in den Stand gesetzt werden, auch mit ganz konzentrierten Lösungen zu arbeiten, ist unser Meßbereich erweitert worden. Freilich haben wir damit nicht allzuviel gewonnen, da es im allgemeinen nicht gelingt, bei unedeln Metallen durch Anreicherung der Lösung den Umkehrpunkt zu erreichen. So besitzt Kupfer, das in unserer Fig. 2 (p. 911) dem Quecksilber zunächst kommt, in gesättigter CuSO_4 -Lösung die Potentialdifferenz $-0,308 (+0,031)$ gegen die Kalomelektrode nach unserer bisherigen Bezeichnungsweise), in 1-normaler $\text{Cu}_2\text{N}_2\text{O}_6$ -Lösung $-0,338 (+0,061)$ gegen 0,1 Kalomelektrode). Ich konnte mich überzeugen, daß Kupfer in allen diesen Lösungen negativ ist, doch konnte ich selbst in hochkonzentrierten $\text{Cu}_2\text{N}_2\text{O}_6$ -Lösung den Umkehrpunkt nicht erreichen. Nur einmal gelang es mir in einer heißen äußerst

gesättigten $\text{Cu}_2\text{N}_2\text{O}_6$ -Lösung das Potential $+0,16$ gegen Kalomel zu erhalten und hier war Kupfer positiv gegen die Lösung; doch möchte ich diesem Resultate aus mehreren Gründen keinen zu großen Wert beilegen.

Eisen. Was bei Kupfer nicht zu erreichen war, gelingt durch einen kleinen Kunstgriff beim viel unedleren Metall Eisen; wenn man dieses durch Passivieren in die edlere Form verwandelt.

A. Finkelstein ¹⁾ hat gezeigt, das Eisen durch Eintanchen in Cyankaliumlösungen passiviert wird und daß es in diesem Zustande in Ferro- und Ferricyankaliumlösungen die Potentiale:

$$1\text{-normal } \text{K}_4\text{FeCy}_6 - 0,38,$$

$$1\text{-normal } \text{K}_3\text{FeCy}_6 - 0,57$$

aufweist. Diese Werte schließen unseren Umkehrpunkt ($-0,4$) ein und legten den Wunsch nahe, ihn auch bei diesem Metalle aufzusuchen. Weil aber verschiedene Eisensorten verschiedene Potentialdifferenzen aufweisen (vielleicht weil der Grad ihrer Passivität ein verschiedener ist), mußte bei diesen Versuchen das Augenmerk ganz besonders darauf gerichtet sein, mit den Elektroden identischen Eisendraht oder -pulver zu verwenden. Dies erreichte ich auf folgende Weise. Zum Versuche wurden immer eine Reihe von Elektrodenpaaren mit dem Pulver passiviert. Die einzelnen Elektrodenpaare bestanden aus ähnlichen, aber nicht gleichen Eisensorten, so daß ihre Potentiale immer eine Differenz von wenigen Zentivolt besaßen.

Die Elektrodenpaare selbst bestanden aus völlig gleichem Eisen und wurden nur verwendet, wenn keine Potentialdifferenz zwischen ihnen zu beobachten war. Sodann wurden die Elektroden der Reihe nach abgespült und in die verwendeten Eisenlösungen getaucht, um ihre Potentialdifferenz gegen dieselben zu messen. War dieselbe bestimmt, so wurden sie mit dem passivierten und durchgewaschenen Eisenpulver überschichtet und die Potentialdifferenz nun abermals gemessen. Das Elektrodenpaar, dessen einzelne Elektrode die gleiche Potentialdifferenz aufwies und sie beim Überschichten mit dem Eisenpulver nicht änderte, wurde dann zum Versuche verwendet.

1) A. Finkelstein, Zeitschr. f. phys. Chem. 39. p. 195. 1902.

Auf diese Weise erhält man in wohlverschlossenen, gänzlich mit der Flüssigkeit gefüllten Röhren recht konstante Resultate, die sich auch nach stundenlangem Stehen der Röhre nicht ändern. Bei jeder Umkehr der Röhre erfolgt eine Umkehr des Stromes, während die horizontale Röhre keinen Strom liefert.

Eisen (in Cyankalium passiviert) in K_4FeCy_6 -Lösungen verschiedener Konzentrationen.

	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelektrode	Eisen ist gegen die Lösung
1. Versuchsreihe:	+ 0,42	+
	+ 0,26	+
	+ 0,21	+
	+ 0,18	+
	+ 0,05	+
	+ 0,11	—
	+ 0,10	—
	+ 0,06	—
	+ 0,04	—
	+ 0,00	—
2. Versuchsreihe:	+ 0,36	+
	+ 0,29	+
	+ 0,24	+
	+ 0,19	+
	+ 0,17	+
	+ 0,14	+
	+ 0,11	—
	+ 0,065	—
	+ 0,05	—
Aktiviert:	— 0,85	—

Eisen in HNO_3 (konz.) passiviert.

	Meßelektrode gegen die 0,1 Kalomelektrode	Eisen ist gegen die HNO_3 -Lösung
	+ 0,75	+
	+ 0,5	+
	+ 0,41	+

Verdünt man die Salpetersäure, so geht das Eisen leicht in den aktiven Zustand über, daher wurden diese Versuche nicht weiter ausgedehnt.

Eisen in KCN passiviert gegen Lösungen von K_2FeCy_6 .	
MeBelektrode gegen die	Eisen ist gegen
0,1 Kalomelelektrode	die Lösung
1. Versuchsreihe:	
+ 0,14	+
+ 0,10	—
+ 0,06	—
+ 0,05	—
2. Versuchsreihe:	
+ 0,15	+
+ 0,12	±
+ 0,07	—
+ 0,04	—

Eisen in HNO_3 passiviert gegen Lösungen von K_2FeCy_6 und K_4FeCy_6 .	
MeBelektrode gegen die	Eisen ist gegen
0,1 Kalomelelektrode	die Lösung
K_2FeCy_6 {	+ 0,44 +
	+ 0,32 +
	+ 0,21 +
	+ 0,16 +
K_4FeCy_6 {	+ 0,10 —
	+ 0,05 —

Schließlich mag es noch erwähnt werden, daß derselbe Umkehrpunkt auch mit MnO_2 zwischen Mangansuperoxydelektroden in Lösungen von KOH erhalten wurde.

Theorie.

Wir waren bei diesen Untersuchungen von dem v. Helmholtz'schen Begriffe der elektrischen Doppelschicht ausgegangen, und wollen nun dieselben an der Hand der Versuchsergebnisse diskutieren.

Ihrer Definition gemäß als: „Zweier Schichten, welche auf den entgegengesetzten Seiten einer Fläche, in außerordentlich kleiner Entfernung von ihr liegen und deren eine ebensoviel positive Elektrizität enthält, wie die andere negative“¹⁾, kann die elektrische Doppelschicht nach außenhin keinerlei Wirkung ausüben. Um das Auftreten einer solchen, wie sie bei der Bewegung suspendierter Teilchen, dem Durchgange von Flüssigkeit durch Röhren etc. stattfindet, sowie um die Einwirkung äußerer elektrischer Kräfte auf die Doppelschicht zu erklären, muß v. Helmholtz eine Verschiebung derselben bei

1) H. v. Helmholtz, Pog. Ann. 165. p. 228. 1853; Wied. Ann. 7. p. 337. 1877.

der Bewegung wie unter Einfluß eines elektrischen Potentialgefälles annehmen.

Die Bewegung suspendierter Teilchen im Stromgefälle erklärt dann v. Helmholtz auf folgende Art: ... „ohne daß der elektrische Schwerpunkt des Systems fester Teilchen und eine elektrische Flüssigkeitsschicht fortbewegt werden kann, ... kann eine relative Verschiebung der z. B. positiven Wasserschicht und des negativ geladenen Körperchens gegeneinander hervorgebracht werden. ... Wäre nun die Flüssigkeit vollkommen isolierend, so würde die neue Lage als Gleichgewichtslage bestehen bleiben. Da aber durch die Verschiebung der Schichten das Gleichgewicht der galvanischen Spannung zwischen festem Körper und Flüssigkeit gestört ist, und dieses sich durch Leitung immer wieder herzustellen sucht, so wird immer wieder der erste Zustand elektrischer Verteilung hergestellt, und werden immer neue Verschiebungen des Körperchens gegen die umgebende Wasserschicht veranlaßt werden müssen.

Diese Erklärung ist schwer zu verstehen. Rückt der in die Flüssigkeit fallende Teil der Doppelschicht dem Körperchen nach? Dann wird der elektrische Schwerpunkt des Systems negativer Teilchen und positive Wasserschicht fortgeführt! Stellt aber der Zustand der ersten Verschiebung eine Gleichgewichtslage vor, so ist kein Grund vorhanden, weshalb der eine Teil der Doppelschicht dem anderen nachrückt, gleichgültig ob sie ein Isolator trennt oder nicht. Und endlich fragt es sich, ob durch eine solche Verschiebung überhaupt eine Gleichgewichtslage erreicht wird? Denn eine Trennung durch äußere elektrische Kräfte kann nur erfolgen, wenn die gegenseitige elektrostatische Anziehung beider Teile der Doppelschicht überwunden wird. Tritt aber eine erste Verschiebung überhaupt ein, so ist wieder kein Grund vorhanden, warum sie nicht bis zur vollständigen Trennung der Doppelschicht führen sollte, nimmt doch die widerstehende elektrostatische Anziehung mit der Entfernung ab, ohne daß gleichzeitig die äußere Kraftwirkung geändert würde! ¹⁾

1) Von der Möglichkeit, daß ein Teil sich mit der Flüssigkeitsschicht eines anderen Teilchens wieder vereine, können wir absehen, da die Betrachtung auch für den Fall gelten muß, daß überhaupt nur ein Teilchen in der Flüssigkeit suspendiert sei.

Ein Vorgang, wie er zuletzt beschrieben wird, wäre von einer Grotthusschen Elektrolyse kaum zu unterscheiden.

Andere Schwierigkeiten bieten sich bei der Betrachtung analoger Erscheinungen, wie der Elektrizitätserregung durch fallende Teilchen, aufsteigende Gasblasen, von einer Platte abfließendem Wasser etc. etc. Da fällt es auf, daß schon so geringe mechanische Kräfte eine Trennung der so nahe gegenüberstehenden, zudem entgegengesetzt elektrostatisch geladenen Schichten bewirken sollen, während bei Flüssigkeitsströmungen an festen Körpern eine solche Trennung nicht angenommen wird. Vielmehr bewegen sich in allen analogen Fällen die unmittelbar anliegenden Flüssigkeitsschichten mit dem festen Körper.

Alle diese Schwierigkeiten drängen uns die Frage auf, ob sie nicht in der Definition der Doppelschicht gelegen sind, ob es zweckentsprechend ist, anzunehmen, daß sie sich dadurch kennzeichnet, daß ihre Belegungen entgegengesetzt gleich sind. Und ich glaube die letztere Frage kann auf Grund der angeführten Versuche wie einiger a. a. O. beschriebenen Untersuchungen¹⁾ entschieden verneint werden.

Betrachten wir, um ein spezielles Beispiel zu wählen, den Fall, welchen uns eine umkehrbare, z. B. eine Silberelektrode vorstellt. Solange die Lösung nur wenig Silberionen enthält, wird das feste Metall positive Ionen in die Lösung entsenden und selbst negative Ladung erhalten, bis durch Zusätze der Ionendruck in der Lösung seinem eigenen Lösungsdrucke eben gleichkommt. Anfänglich negativ, wird es bei diesem Punkte ungeladen sein, um bei zunehmender Ionenkonzentration in der Lösung (etwa durch Zusatz von AgNO_3) umgekehrt Ionen aus der Lösung aufzunehmen und positiv zu werden. Fragen wir nun, wie es dabei um die Doppelschicht steht, so erfahren wir zunächst, daß sie an dem Punkte der Zeichenumkehr verschwindet, und daß in konzentrierten Lösungen ihr positiver Anteil in das Metall, umgekehrt bei größeren Verdünnungen in die Flüssigkeit fällt.

Denken wir uns nun, daß ein Silberstab in eine Flüssigkeit eingeführt wird, die keine Silberionen enthält, so wird

1) J. Billitzer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. 111. p. 1393. 1902.

sich alsbald eine Doppelschicht an ihm ausbilden, indem positive Silberionen in die Lösung treten werden.

Sollen aber bei diesem Vorgange die Belegungen der Doppelschicht entgegengesetzt gleich bleiben, so müßten sämtliche entsandten Ionen an der Berührungsfläche des Stabes haften bleiben, also gar nicht in die Lösung treten, oder es müßten ebensoviele fremde positive Ionen an die Elektrode gelangen, als Silberionen in die Lösung diffundieren.

Dies ist aber durchaus nicht der Fall, es werden vielmehr nach der Nernstschen Theorie so lange Silberionen in die Lösung diffundieren, bis die dadurch auftretende elektrostatische Wirkung eine weitere Diffusion verhindert und hiermit ein Gleichgewicht hergestellt ist; umgekehrt werden sich aus einer konzentrierteren Lösung Silberionen am Metall niederschlagen, bis eben wieder die elektrostatische Wirkung einer weiteren Änderung das Gleichgewicht hält, bis also die Potentialdifferenz auftritt, die der Nernstschen Formel $E = RT \ln P/p$ entspricht.

Freilich wird vermöge der ungeheuren elektrostatischen Kapazität der Ionen ein solcher Gleichgewichtszustand eintreten, noch ehe wägbare Mengen in Lösung gegangen sind; doch kommt es für unsere Betrachtung im Grunde auf dasselbe hinaus, als wäre ein Teil der Doppelschicht quasi „dissoziiert“¹⁾, indem einige der sie bildenden Ionen in die Flüssigkeit treten, gleichviel entgegengesetzte aber in dem Metall enthalten bleiben, wobei der Dissoziationsdruck der Doppelschicht dem Lösungsdrucke der Metalle entspricht.

Ziehen wir aber alle diese Vorstellungen heran, so sehen wir, daß die Schwierigkeiten verschwinden, die sich der Helmholtzschen Auffassung entgegenstellten. Wir brauchen nicht mehr anzunehmen, daß unmittelbar benachbarte Schichten bei jeder leisen Bewegung auseinander gerissen werden und die Überführung schwebender Teilchen beim Stromdurchgange erklärt sich einfach dadurch, daß die Teilchen sich in gewissem Sinne wie Ionen verhalten, daß wir es also mit einer Art Elektrolyse zu tun haben. Denn für gewisse Betrachtungen können wir von dem Teile der Doppelschicht, der sich gegen-

1) Diese Ausdrucksweise verdanke ich einem Gespräche mit Hrn. Nernst.

seitig neutralisiert, völlig absehen und lediglich die überschüssige Ladung am festen Körper oder in der Flüssigkeit (die natürlich entgegengesetzt gleich sind, weil sie, wie beschrieben, von einer Dissoziation herrührend gedacht werden können) ins Auge fassen. Dies ist aber damit gleichbedeutend, als hätten wir z. B. Anionen in der Lösung und die entsprechenden Kationen mit dem schwebenden Körper fest verbunden, eine Vorstellung, die sich um so mehr aufdrängt, als es überaus wahrscheinlich ist, daß die Doppelschichte in allen Fällen durch Ionenverteilungen entsteht.

Die Stromerzeugung durch fallende Teilchen ergibt sich ebenso einfach und soll in der folgenden Abhandlung ausführlicher besprochen und dargelegt werden. Dabei wird sich eine Gelegenheit bieten, auf die hier ausgeführten Vorstellungen zurückzukommen und dieselben zu erweitern.

Zusammenfassung.

Vom Helmholtzschen Begriffe der elektrischen Doppelschicht ausgehend wird die Ablenkung feiner, in verschiedene Lösungen gehängter Metallfäden durch ein elektrisches Potentialgefälle, ferner die Wanderung kolloidaler Metalle im elektrischen Strome unter gleichen oder ähnlichen Versuchsbedingungen, endlich der Sinn von Strömen beobachtet, die durch fallende Metallteilchen in bestimmten Lösungen geliefert werden. Als die Hauptergebnisse dieser Untersuchungen mögen folgende Punkte bezeichnet werden:

Durch bestimmte Zusätze zu der Lösung ist eine durch die Nernstsche Theorie der Stromerzeugung wohl definierte Beeinflussung bez. Umkehr der Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung zu erreichen. Der Sinn des Ausschlages, die Wanderung der Kolloide etc. gibt über den Sinn der Potentialdifferenz Metall-Lösung Aufschluß.

An dem Punkte, in welchem die Bewegungserscheinungen ausbleiben, um sich alsbald umzukehren, muß die Potentialdifferenz Metall-Lösung verschwunden sein. Dies setzt uns in den Stand, bei Kenntnis seiner Lage in der Spannungsreihe „absolute Potentiale“ zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke wurde der Umkehrpunkt unter wesentlich verschiedenen Bedingungen mit den Metallen Platin, Gold,

Palladium, Silber, Quecksilber (Kupfer) und Eisen aufgesucht und mit den verschiedenen Metallen sowohl als nach den verschiedenen drei Methoden übereinstimmend bei ca. $-0,4$ Volt (bezogen auf $H = 0,0$) gefunden; um etwa $0,75$ gegen die Seite des Sauerstoffs vom Ostwaldschen Nullpunkte entfernt.

Eine Verschiebung des Umkehrpunktes bei Anwendung komplexer Salze war in den untersuchten Fällen nicht (wie bei dem Aufsuchen des Oberflächenmaximums von Quecksilber etc.) zu beobachten.

Es ergibt sich, daß die Metalle Platin, Gold, Palladium etc. höchstens eine Potentialdifferenz, welche kleiner als ca. $0,02$ Volt sein muß, gegeneinander besitzen.

Die Helmholtzsche Hypothese der Doppelschicht muß eine wesentliche Modifikation erfahren, um mit der Erfahrung in Übereinstimmung gebracht zu werden. Auf Grund ionentheoretischer Betrachtungen wird es daher versucht, eine etwas andere Definition dieses Begriffes zu geben.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Winter 1901/02 im physikalisch-chemischen Institut zu Göttingen begonnen, März-April 1902 und im Winter 1902/03 im II. physikalischen Institut der Universität Wien fortgeführt. Und zwar wurden die Untersuchungen, welche p. 904—917 geschildert sind, in Göttingen, die übrigen sämtlich in Wien ausgeführt. Die Vorsteher beider Institute, die Herren Prof. Nernst und F. Exner haben mir in der lebenswürdigsten Weise die nötigen Apparate und Arbeitsräume zur Ausführung meiner Versuche zur Verfügung gestellt.

Es sei mir gestattet, Ihnen hierfür sowie für das wohlwollende Interesse, daß sie an meinen Untersuchungen nahmen auch an dieser Stelle auf das wärmste zu danken.

(Eingegangen 7. März 1903.)

Nach Abschluß dieser Untersuchungen gelangte eine von Zakrzewski ausgeführte, von Wilkowski angeregte Arbeit¹⁾

1) Physik. Zeitschr. 2. p. 146. 1902.

zu meiner Kenntnis, in welcher die Richtung von Strömungsströmen beobachtet wird, die beim Durchpressen einer Silber-salzlösung durch eine Silberkapillare entstehen. Die Umkehr des Stromes soll in einer $1/3000$ -normalen Silbernitratlösung erfolgen.

Die Potentialdifferenz hat der Autor leider nicht gemessen; für ganz reines Silber entspräche diese Konzentration einer Abweichung von etwa 0,1 Volt (nach der Seite des Sauerstoffs) von meinem Werte, doch wird das Resultat erst als ein vorläufiges bezeichnet.

3. Über die Elektrizitätserregung durch die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten.

Kontaktelektrische Studien II;

von Jean Billitzer.

In der vorstehenden Abhandlung war ich von der Annahme ausgegangen, daß fallende Teilchen einen Strom erzeugen, in welchem die positive Elektrizität im Sinne der Fallbewegung fließt, wenn die Teilchen positiv gegen die Flüssigkeit geladen sind, im umgekehrten Sinne aber, wenn die Teilchen eine negative Ladung annehmen, während im Grenzfall jede Stromerzeugung ausbleibt.

Die Methode stützt sich allein auf diese Annahme, und es soll im folgenden geprüft werden, ob sie zulässig ist, d. h. ob es sich um eine reine Erscheinung handelt, welche auf gut bekannte elektrische Vorgänge zurückgeführt werden kann, ferner welchen Einfluß störende Nebenwirkungen ausüben, welche Faktoren von maßgebender Bedeutung sind etc.

Vorversuche. Die Erscheinung, welche wir näher studieren wollen, ist zuerst von Dorn ¹⁾ im Jahre 1880 beobachtet worden und wurde — soviel mir bekannt — seitdem nicht wieder aufgenommen.

Dorn beschickte 48 cm lange Röhren, in welche mittels zweier seitlicher Ansätze zwei Platinelektroden eingeführt waren, mit destilliertem Wasser und etwa zu $\frac{1}{4}$ mit Glasperlen (in einem anderen Versuche mit Seesand). Wurde die Röhre um eine horizontale Achse gedreht, so fielen die Perlen aus dem oberen Ende der Röhre durch die Flüssigkeit herab und erzeugten hierbei einen Strom, der im Galvanometer einen Ausschlag hervorrief. Hörte die Bewegung, auf so kehrte das Galvanometer fast genau in seine Ruhelage zurück. Seesand gab einen etwas größeren Effekt wie die Glasperlen, verhielt sich aber im übrigen völlig gleich.

1) E. Dorn, Wied. Ann. 10. p. 70. 1880.

Stärkere und dauernde Effekte erhält man, wie ich mich überzeugen konnte, zugleich mit besser definierten Versuchsbedingungen, wenn man die Elektroden an die Enden der Röhre verlegt und statt der Glasperlen elektromotorisch wirksamere Körper, am besten Metalle, durch Lösungen ihrer Salze fallen läßt. So wurden alle Versuche, deren Beschreibung folgen soll, mit Silber zwischen Silberelektroden in bestimmten Silbersalzlösungen ausgeführt.

Wenn nun solche Silberteilehen — ich verwendete in der Regel einen zu einer ebenen Spirale gewundenen dünnen Silberdraht — durch die Röhre fallen und einen Strom dabei erzeugen, so entsteht vor allem die Frage, wieviel von dem beobachteten Effekte auf Rechnung undefinierter Nebenumstände zu setzen ist. Reibungsströme, Thermostrome, Gravitationsströme etc. könnten zugleich auftreten und das Messresultat entstellen.

Von diesen Störungen kommen die Gravitationsströme wohl in erster Linie in Betracht.

In einer vertikalen Röhre stehen ja beide Elektroden unter verschiedenem Drucke und dadurch kann die Lösungstension des Metalles beeinflußt werden, wie es Des Condres¹⁾ für Quecksilber, das unter Druck stand, beobachtet hat.

Ich beschickte eine etwa 80 cm lange Röhre von 37 mm Durchmesser, an deren Enden zwei kreisförmige Silberelektroden (Durchmesser 35 mm) sich befanden, mit einer verdünnten Silbernitratlösung unter völligem Ausschlusse von Luftblasen. Die Röhre wurde vertikal aufgestellt und an die Zuleitungsdrähte eines d'Arsonvalgalvanometers der Empfindlichkeit ca. 2×10^{-8} geschlossen. Hatte ich die Vorsichtsmaßregel gebraucht, die Elektroden einige Tage lang vor dem Versuche in einer Silbernitratlösung kurz zu schließen, so zeigte das Galvanometer keinen Strom an; auch dann nicht, als die Röhre umgekehrt wurde.

Nun wird das untere Ende von kälterer Luft umgeben, wie das obere. Thermostrome könnten dadurch entstanden sein, könnten den etwaigen Gravitationsstrom verdeckt haben.

Deshalb führte ich diesen Versuch noch in anderer Form aus, indem ich den spiralförmigen Silberdraht (der gleichfalls

1) Th. Des Condres, Wied. Ann. 46. p. 292. 1892.

mit den Elektroden kurzgeschlossen worden war und keine Potentialdifferenz gegen dieselben aufwies) in die Röhre warf und die Röhre wieder unter Ausschluß von Luftblasen verschloß. Das Galvanometer zeigte nun einen Strom an, dessen Richtung sich beim Umlegen der Röhre umkehrte. Im Mittel von sechs Beobachtungen betrug der Ausschlag bei der Umkehr 11,4 Skt. Nun wurde die Röhre unmittelbar nach der Umkehr nahe horizontal gelegt (die Silberspirale blieb in Berührung mit der Elektrode) und es wurden abermals sechs Ablesungen ausgeführt, die im Mittel einen Ausschlag von 11,3 Teilstreichen der Skala bei der Umkehr ergaben. Endlich umschloß ich das eine Ende der Röhre mit der Hand oder berührte verschiedene Drähte etc. ohne einen deutlichen oder regelmäßigen Einfluß der Erwärmung beobachten zu können.

Thermo- und Gravitationsströme geben somit bei der gewählten Anordnung, wenn überhaupt, so nur Effekte einer anderen Größenordnung und können daher völlig vernachlässigt werden.

Nun könnten ferner durch Gleitung an den Glaswänden etc. Reibungsströme entstehen. Ich ließ daher den Silberdraht zu wiederholten Malen durch die Flüssigkeit fallen, indem ich abwechselnd die Berührung mit der Glaswand vermied oder herbeiführte ohne eine sichere Beeinflussung des Effektes beobachten zu können.

Weiter war noch die Wirkung zu prüfen, welche der Stoß des fallenden Silbers auf die Elektrode ausübt. Ich wählte ein kompakteres Silberstück, ließ es entweder frei durch die Flüssigkeitssäule auf die Elektrode fallen oder ganz sanft auf der geneigten Rohrwand herabgleiten; auch diesmal erhielt ich fast identische Werte.

Dorn führt an, daß die Intensitäten von einem Tage zum anderen abnehmen. Ich habe diese Beobachtung bei frisch beschickten Röhren bestätigen können, nicht aber dann, wenn die Elektroden und der Draht in demselben Elektrolyten mehrere Tage kurzgeschlossen worden waren. Offenbar braucht es einige Zeit, bis sich Draht und Elektroden ins Gleichgewicht mit der Lösung gesetzt haben. Mehrere Tage vor jedem Versuche wurden deshalb (und aus einem fernerem Grunde, der später besprochen werden soll) die Röhren mit der betreffenden Lösung und dem Silberdrahte beschickt, die Elektroden

in Berührung mit dem Drahte kurzgeschlossen und sie blieben während des Versuches auch stetig durch das Galvanometer und gelegentlich durch einen Widerstand verbunden.

Einfluß der Rohrlänge. Nunmehr die Vorversuche ein günstiges Resultat ergeben hatten, schritt ich dazu, die Abhängigkeit des Effektes von der Länge des durchfallenen Raumes zu prüfen. Es ist vorauszusehen, daß mit ihr die Potentialdifferenz anwachsen wird; ist aber ein Gleiches von der Stromintensität zu erwarten? Schon die erste Versuchsreihe zeigte, daß dies keineswegs der Fall ist; im Gegenteil: die Stromintensität nimmt mit der Länge des Rohres ab.

Die Rohre hatten 37 mm Durchmesser und waren an ihren Enden durch zwei kreisförmige Silberelektroden von 35 mm Durchmesser abgeschlossen. (Silberspirale. Silbernitratlösung.)

I. Abstand der Elektroden 77,3 cm.¹⁾

Röhre vertikal	Röhre unmittelbar nach der Umkehr nahe horizontal gelegt
$\frac{i}{2 \cdot 10^{-8}}$ Amp.	$\frac{i}{2 \cdot 10^{-8}}$ Amp.
8,1	8,3
6,4	7,9
7,5	6,8
6,7	7,3
7,3	7,1
7,0	7,6
Mittel: 7,2	Mittel: 7,5

II. Abstand der Elektroden 37,3 cm.

Röhre vertikal	Röhre horizontal
$\frac{i}{2 \cdot 10^{-8}}$ Amp.	$\frac{i}{2 \cdot 10^{-8}}$ Amp.
10,2	10,4
10,0	9,4
10,4	9,4
10,3	10,8
10,2	11,0
10,1	11,0
Mittel: 10,2	Mittel: 10,9

1) Die Messung der Intensitäten wurde erst nach mehreren Umdrehungen begonnen.

III. Abstand der Elektroden 17 cm.

Röhre vertikal

Röhre horizontal

 $\frac{i}{2 \cdot 10^{-8}}$ Amp. $\frac{i}{2 \cdot 10^{-8}}$ Amp.

17,8

18,2

14,4

15,4

17,1

17,2

18,2

18,2

16,4

15,7

17,3

18,2

Mittel: 16,8

Mittel: 17,1

Kürzere Röhren liefern also größere Stromintensitäten und dies kann nicht befremden, wenn man die Röhre als stromlieferndes Element betrachtet: es muß die im äußeren Schließungskreise auftretende Intensität eine Funktion der elektromotorischen Kraft, aber auch des inneren Widerstandes der Röhre sein.

Nun ist jedenfalls die elektromotorische Kraft eine Funktion der Länge des Fallraumes, da es anzunehmen ist, daß eine Trennung der Elektrizitäten auf jedem einzelnen Wegstücke erfolgen wird. Andererseits wird eine durch die Elektrizitätstrennung erlangte Potentialdifferenz der weiteren Trennung entgegenwirken, d. h. es wird

$$dv = \frac{dl}{f(l)},$$

$$(1) \quad v = \ln k \cdot f(l)$$

sein, wenn wir die Potentialdifferenz mit v , die Länge des Fallraumes mit l , eine Integrationskonstante mit k bezeichnen.

Dagegen wird die Intensität eine inverse Funktion des inneren Widerstandes und somit der Länge des Rohres sein, weil der Ausgleich der Potentialdifferenzen durch die Flüssigkeit getrennt wird, die der Draht beim Herabfallen hervorgerufen hat. Wir erhalten daher

$$(2) \quad i = \frac{v}{w_a + \frac{l}{q} w_f},$$

wenn wir die Intensität mit i , den Widerstand des äußeren Schließungskreises mit w_a , den der Elektrolyten (in Ohm/cm) mit w_f , endlich den Querschnitt durch q bezeichnen.

Durch Verbindung von (1) und (2) erhalten wir

$$(3) \quad i \left(w_a + \frac{l}{q} w_f \right) = \ln k f(l)$$

und

$$(4) \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{w_{a1} + \frac{l_1}{q} w_f}{w_{a2} + \frac{l_2}{q} w_f} \frac{\log f(l_1)}{\log f(l_2)},$$

indem wir die natürlichen Logarithmen durch Briggsche ersetzen, da sie nur als Quotienten in die Gleichung eingehen.

Nun könnte man versuchen, die auftretenden elektromotorischen Kräfte zu messen und daraus i nach Gleichung (2) für jeden einzelnen Fall zu berechnen. Doch sind leider die auftretenden Potentialunterschiede, wie leicht begreiflich, nur minimale — sie erreichen selten Millivolts —. Wenn ich es gleichwohl versucht habe sie zu messen, um öfters zu konstatieren, daß sie mit der Rohrlänge etwa in dem zu erwartenden Verhältnisse zunehmen, so sind die Zahlen doch zu wenig genau, um eine Berechnung von i zu ermöglichen.

Bei Unkenntnis der $f(l)$ ist aber nur eine qualitative Prüfung des Versuchsmateriales möglich; auch glaube ich, daß die Genauigkeit der Versuchsdaten für die quantitative Auswertung zu gering wäre. Immerhin lassen sich auch aus diesen Versuchen einige Schlüsse ziehen, deren Richtigkeit durch das Experiment geprüft werden kann. So kann man durch Einsetzen der betreffenden Werte in Gleichung (3) kontrollieren, ob durch die graphische Einzeichnung der erhaltenen Werte wirklich eine Kurve von logarithmischem Verlaufe erhalten wird.

So ergibt sich aus dem angeführten Versuche, bei welchem die Röhren direkt durch das Galvanometer (200 Ω) kurzgeschlossen waren:

Tabelle 1.

Silberspirale. AgNO_3 ca. 0,01-normal.

$w_f = 813 \Omega/\text{cm}$. $w_a = 200 \Omega$.

l	i gef.	$\ln k f(l)$
77,3	7,2—7,5	13
37,3	10,2—10,3	9,1
17,0	16,8—17,2	7,1

In der graphischen Darstellung Fig. 1 (die Kurven tragen darin die Nummer der Tabelle, auf die sie sich beziehen) tritt in der Tat der erwartete Verlauf hervor.

Soll die gegebene Erklärung aber richtig sein, so müßte ferner die prozentuelle Abnahme der Stromintensität mit der Länge des Rohres um so größer sein, je schlechter der Elektrolyt leitet, während in sehr gut leitenden Flüssigkeiten größere Effekte und vielleicht sogar eine Zunahme der Intensität mit der Rohrlänge erhalten werden könnten.

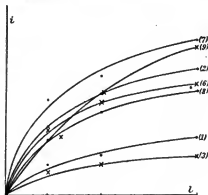


Fig. 1.

Um zunächst die erste Konsequenz zu prüfen, verdünnte ich die verwendete Silberlösung und wiederholte den Versuch unter sonst gleichen Bedingungen.

Tabelle 2.

Silberspirale. AgNO_3 verdünnt. $\kappa_1 = 10766 \, \Omega/\text{cm}$. $\kappa_2 = 200 \, \Omega$.

l	i gef.	Mittel	$\ln k f(l)$
76,5	1,2	1,2	26
	1,7		
	0,9		
	0,8		
37,3	1,4	2,0	23
	2,3		
	1,7		
	1,9		
	2,0		
17,0	2,1	2,9—3	14
	3,3		
	2,9		
	2,5		
	2,8		
	3,3		

Auch dieser Schluß wird also durch das Experiment bestätigt. Denn wie wir es erwartet hatten, überwiegt hier die Widerstandswirkung derartig, daß die Intensitäten der Rohrlänge nahezu umgekehrt proportional werden.

Die zweite Konsequenz ist nicht unmittelbar zu verwirklichen, weil selbst recht konzentrierte Silbernitratlösungen einen erheblichen Widerstand noch besitzen; doch zeigt es sich, daß mit der Verwendung besser leitender Lösungen die Stromintensitäten derart anwachsen, daß wir dem Galvanometer einen Widerstand vorschalten können, gegen welchen der innere Widerstand des Rohres klein bleibt.

Ich prüfte zunächst, ob noch in 30 proz. Silbernitratlösungen ohne vorgeschalteten Widerstand eine Abnahme der Intensitäten mit der Rohrlänge zu beobachten ist. Dabei fand ich die Intensitäten so groß, daß ich die bisher verwendete Drahtspirale durch ein kurzes Drahtstück ersetzen mußte, um nicht Ausschläge über die ganze Skala zu erhalten.

Tabelle 3.
Kurzer Silberdraht. ca. 30 proz. AgNO_3 -Lösung.
 $\kappa_r = 9,8$ (Ohm/cm). $\kappa_a = 200$ Ohm.

l	i gef.	Mittel
77,5	8,2	7,9
	7,6	
	8,0	
	7,9	
	7,9	
37,3	11,0	11,2—11,3
	11,4	
	11,6	
	11,1	
	11,2	
17,0	13,0	13,1—13,2
	13,1	
	13,6	
	12,9	
	13,2	

Um nunmehr von der Widerstandswirkung unabhängig zu werden, wurde dem Galvanometer ein Widerstand von 5000 Ohm vorgeschaltet. Dadurch nähert sich der erste Bruch auf der

rechten Seite der Gleichung (4) der Eins und die Änderungen der Intensitäten werden auf die der elektromotorischen Kräfte zurückzuführen sein.

Tabelle 4.

Silberspirale. AgNO_3 ca. 1 normal. $w_f = 11,74 \, \Omega/\text{cm}$. $w_n = 5200 \, \Omega$.

l	i gef.	Mittel
77,3	38,0	35,1
	36,0	
	36,6	
	35,1	
	34,8	
87,8	32,4	32,1
	30,3	
	33,9	
	32,1	
	31,5	
17,0	27,3	25,8
	27,0	
	22,5	
	26,4	
	25,2	

Die gesuchte Erscheinung gibt sich nunmehr durch die Zunahme der Intensität mit der Rohrlänge zu erkennen.

Potentialabfall im Rohre. Nun aber genügend starke Effekte erhalten wurden, um große Widerstände in den äußeren Stromkreis legen zu können, war es verlockend den Potentialabfall im Rohre zu messen, dessen Kenntnis einiges Licht auf die Natur der Stromerzeugung im Rohre zu werfen versprach. Deshalb wurde eine Röhre von 48 cm Länge mit vier gleich weit (12,5 cm) voneinander entfernten Ansätzen versehen, durch welche vier halbkreisförmig gebogene Silberdrähte als Sonden eingeführt worden waren. Durch die Korke an den Enden der Röhre ragten gleich lange kreisförmig gebogene Silberdrähte in die Lösung, welche 44,5 cm Abstand voneinander besaßen, je 3,5 cm von der nächsten Sonde entfernt. Die so vorbereitete Röhre wurde mit konzentrierter Kaliumnitratlösung, die Silberchlorid enthielt, und einer Silberspirale beschickt und es blieben mehrere Tage vor den einzelnen Versuchen Sonden, Elektroden und Draht

kurzgeschlossen, bis keine Potentialdifferenz mehr zu finden war. Nunmehr wurde zur Messung geschritten, indem man

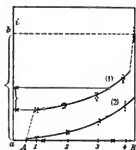


Fig. 2.

den Draht durch die ganze Länge der Röhre fallen ließ, hierauf den einen Zuleitungsdraht des Galvanometers, dem 100 000 Ohm vorgeschaltet waren, an das eine Ende der Röhre anlegte, den anderen sukzessive an die übrigen Drähte anschloß und die einzelnen beobachteten Intensitäten verzeichnete. Die beigezeichneten Kurven (Fig. 2) geben das Ergebnis vieler Messungsreihen graphisch wieder.

Denken wir uns die Abstände der Elektroden (A und B) und der Sonden (1—4) als Abszissen, die Potentialdifferenzen zwischen ihnen, als Ordinaten aufgetragen und lassen wir die Silberspirale von B auf A fallen, so entspricht dem Potentialabfalle im Rohre eine Kurve der Gestalt (1). Von B bis 4 fällt sie rapid, nimmt von hier ab etwa logarithmischen Verlauf, um unmittelbar vor A wieder steil abznfallen. Diese sonderbare Gestalt erweckte die Vermutung, daß in A und B andere Verhältnisse bestehen wie in 1—4. Und eine solche Verschiedenheit ist auch zu erwarten, wenn wir unsere Begriffe und Vorstellungen über die Art der Stromerzeugung im Rohre fixieren.

Um uns dieselbe bildlich vorzuführen, wollen wir uns der Hypothese der elektrischen Doppelschicht bedienen.

Es ist in der früheren Abhandlung schon darauf hingewiesen worden, daß die experimentellen Ergebnisse eine viel ungezwungenere Darstellung erfahren, wenn man den Helmholtz'schen Begriff der elektrischen Doppelschicht modifiziert und nicht mehr zwei Schichten darunter versteht, die in außerordentlich geringer Entfernung voneinander entgegengesetzt gleiche Ladungen tragen, sondern wenn man annimmt, daß diese Schichten sich unmittelbar an der Berührungsfläche elektrisch nicht ganz neutralisieren, und daß der Rest der Ladung in der umgebenden Flüssigkeit verteilt ist. Konkreter und anschaulicher zugleich wird das Bild, wenn man sich vorstellt, daß die Doppelschicht durch Ionen gebildet wird — wie es in vielen Fällen, z. B. gerade in dem

betrachteten, daß wie es mit einem Metalle in Lösungen seiner Salze als erwiesen, in den anderen zum mindesten als sehr wahrscheinlich hingestellt worden ist — und daß einige dieser Ionen in die Flüssigkeit diffundieren, mit anderen Worten: daß die Doppelschicht dissoziiert ist. Dann wird die Bildung der Doppelschicht (z. B. auf der Seite des Sauerstoffs vom Umkehrpunkte aus betrachtet) folgendermaßen zu denken sein.

Das Metall entsendet kraft seiner Lösungstension positive Ionen in die Flüssigkeit und erhält dadurch selbst negative Ladung, während die entsandten Ionen sich in bestimmter Art verteilen werden bis die elektrostatische Gegenwirkung weiterer Ionenaussendung das Gleichgewicht hält. Solange das System in Ruhe bleibt, kann nach außen keine elektrische Wirkung ausgeübt werden. Bewegen wir aber das Metall, so werden zwar die unmittelbar angrenzenden Flüssigkeitsschichten der Bewegung folgen, die zum Teil weiter entsandten Ionen (ihre Zahl sei γ) werden aber wegen ihrer viel geringeren Beweglichkeit¹⁾ in der Lösung verharren. Das Metall gelangt aber in neue Flüssigkeitsschichten, deren Ionenkonzentration gegen die erste um γ differiert; um wieder Gleichgewicht herzustellen, müssen daher wieder Ionen entsandt werden und dieser Vorgang wiederholt sich auf jedem Wegdifferential, bis die untere Elektrode oder bis ein Grenzzustand erreicht ist. Dabei wird die durch Ionenaussendung erlangte Ladung neuerlicher Ionenaussendung entgegenwirken.

Wir haben es also mit einer Wirkung zu tun, die sich selbst schwächt; die Zahl abgespaltener Ionen wird daher auf jedem folgenden Wegstücke etwa in logarithmischem Verhältnisse abnehmen.

Sei dieselbe in 4, 3 ... (Fig. 2): x_4, x_3 ... etc., so wird die Potentialdifferenz zwischen B und 4: $R T \ln c + \gamma/c + x_4$, zwischen 4 und 3: $R T \ln c + x_4/x + x_3$ etc.

Je kleiner c ist, desto größer wird der numerische Wert der einzelnen Brüche, desto steiler wird die Kurve verlaufen (vgl. Kurve 9, Fig. 1). Wäre vollends c gegen x zu vernach-

1) Unter dem Einflusse eines Potentialabfalles von 1 Volt/cm bewegt sich das Wasserstoffion mit einer Geschwindigkeit von 0,00825 cm/sec, das Chlorion von 0,000678 cm/sec, während die Silberspirale etwa eine Geschwindigkeit von 1—10 cm/sec annimmt.

lässigen und nähme x linear mit der Länge ab, so würde die ganze Kurve linear verlaufen. Nun nimmt aber x , wie oben ausgeführt wurde, viel rascher ab und wird in den meisten Fällen gegen c sehr klein bleiben, daher fällt die Kurve anfangs viel steiler ab.

Werden Ionen nicht ausgesandt, sondern aus der Lösung aufgenommen, so gelten mutatis mutandis die gleichen Betrachtungen. Daß für diesen Fall γ Ionen wirklich aus der Lösung beim Falle mitgenommen werden, hat Palmaer durch seine schönen Experimente mit der Tropfelektrode¹⁾, wie mir scheint, in ganz unzweifelhafter Weise dargetan. Den umgekehrten Fall, daß Ionen in die Lösung entsandt und beim Falle oben zurückgelassen werden, habe ich durch eine Reihe von Versuchen, die ich a. a. O. publizieren werde, gleichfalls bestätigt gefunden.²⁾

Der Effekt in unseren Röhren ist also der, daß eine Konzentrationsverschiebung bewirkt wird, die sich durch den äußeren Schließungskreis und durch den Elektrolyten ausgleicht und dabei einen Strom erzeugt, welcher im Prinzip dem einer Konzentrationskette gleichkommt. Denken wir uns zwei Silberelektroden, die in zwei Silbernitratlösungen verschiedener Konzentration (die etwa durch einen Heber miteinander in Verbindung stehen) eingeführt sind und nun durch einen Draht verbunden werden, so gelingt es diesem Systeme Strom zu entnehmen, und man stellt sich nach der Nernst'schen Theorie vor, daß er dadurch geliefert wird, daß die Silberelektrode in der konzentrierteren Lösung Silberionen aufnimmt, während ebenso viele Silberionen von der zweiten Elektrode in die Lösung entsandt werden; dabei werden auf der ersten Seite negative Ionen frei, welche durch die Lösung in die verdünntere Lösung diffundieren.

Umgekehrt werden in unserem Falle im oberen Teile der Röhre negative Ionen zurückgelassen, positive unten angesammelt und es findet ein Ausgleich statt, indem aus der oberen Elektrode Silberionen in die Lösung entsandt, ebenso

1) W. Palmaer, Zeitschr. f. phys. Chem. 25. p. 265. 1898; 28. p. 257. 1891; 36. p. 164. 1901.

2) Hieraus folgt, daß bei den ersten Umdrehungen der Röhre Effekte erhalten werden müssen, die etwas voneinander differieren, bei späteren Umdrehungen aber immer kleinere Differenzen erhalten werden. Aus diesem Grunde habe ich die Messung immer erst nach einigen Umdrehungen begonnen, vgl. Fußnote p. 940.

viele von der unteren Elektrode aufgenommen werden, während sich die Unterschiede durch den Elektrolyten ausgleichen. Ist das Silber positiv gegen die Lösung, so wird also die obere Elektrode einen negativen, die untere einen positiven Pol darstellen, und umgekehrt, wenn das Silber negativ ist (also Silberionen in die Lösung sendet). Die Richtung des Stromes läßt uns somit einen Rückschluß auf den Sinn der Potentialdifferenz ziehen.¹⁾

Mit dem geschilderten Verlaufe haben wir es zu tun, wenn das fallende Metall auf die untere Elektrode nicht auftrifft, sondern etwa neben dieselbe fällt, berührt das Silber aber die Elektrode, so ist dieselbe nicht mit einer Lösung umgeben, deren Veränderung der Bewegung des Silbers durch die unmittelbar benachbarten Gebiete entspricht, sondern die Lösung, welche sie umgibt, wird der entsprechen, die das gefallene Silber umspült und die naturgemäß eine erheblich größere Konzentrationsverschiedenheit aufweist.

Diesen Schluß zu prüfen, wurde zwischen den ringförmigen Elektroden an den Enden der Röhre und den Korken, durch welche sie geführt waren, ein freier Spielraum gelassen (ohne etwas an den Entfernungen zu ändern), so daß die Silberspirale durch die Elektrode fallen konnte, ohne sie zu berühren. War der eben gezogene Schluß richtig, so mußte nun der plötzliche Abfall zwischen *B* und 4, 1 und *A*, den wir auf p. 946 beschrieben haben, verschwinden, mußte die Kurve vollständig stetigen Verlauf erhalten. Eine Reihe von Experimenten, deren Ergebnisse in Kurve 2 dargestellt sind, überzeugte mich, daß diese Konsequenz zutrifft. Daß der Potentialfall bei *B* jetzt viel langsamer ist als auf Kurve (1) ist dadurch bedingt, daß die Konzentration daselbst nicht wie früher $c + \gamma$ sondern $c + x_B$ ist.

Nun verstehen wir aber auch, warum Dorn bei seinen Versuchen nur einen einmaligen starken Ausschlag bekam, der nach dem Aufhören der Bewegung nach seiner Beschreibung *fast* völlig verschwand. An seinen Elektroden, die von den Enden ca. 6 cm weit abstanden (und deren Entfernung in der Figur durch \times bezeichnet sind), konnten nur solange erheblichere

1) Es versteht sich wohl von selbst, daß vermöge der ungeheuren elektrostatischen Kapazität der Ionen eine Trennung ganz unwägbarer Mengen schon große Effekte liefern können und daß also hier nur von solchen Mengen gesprochen wird, die unter die Grenze der Wägbarkeit fallen.

Potentialdifferenzen auftreten als sie durch den herabfallenden Seesand berührt wurden, hörte die Bewegung (und damit der Konvektivstrom) auf, so entsprach ihr Potentialabfall nur mehr der Differenz der Ordinaten in den Punkten, die auf der Kurve 1 durch Kreise bezeichnet sind, also einer erheblich kleinen Differenz, welchedurch den großen Widerstand der (destillierten) Wassersäule nur minimale Intensitäten und fast verschwindende Ausschläge im Galvanometer liefern konnten, und es zeigt von großem experimentellen Geschick, daß diese der Beobachtung nicht entgingen.

Verlegt man die Elektroden an die Enden der Röhre, so verfügt man aber über den gesamten Potentialabfall, der besonders groß im oberen Teile der Röhre und unmittelbar an der unteren Elektrode (bei Berührung mit dem gefallenem Draht) gefunden wurde und erhält so, zumal mit gutleitenden Lösungen, wie bereits erwähnt, viel größere und dauernde Effekte (stunden-, ja tagelang).

Temperatureinfluß. Weiter läßt sich aus der Vorstellung, daß die Konzentrationsverschiedenheiten durch Dissoziation auf dem Wege durch die Flüssigkeit und Wegdiffusion der bei der Dissoziation abgespaltenen Ionen von der unmittelbaren Umgebung des fallenden Körpers vermuten, daß diese Geschwindigkeiterscheinung wie alle anderen einem großen Temperatureinfluß unterliegen wird.¹⁾ Je schneller die vom fallenden Körper ausgesandten Ionen in benachbarte Gebiete gelangen, von welchen aus sie dem fallenden Körper nicht mehr folgen können, desto größer wird die Elektrizitätstrennung, desto stärker der Effekt sein müssen.

Indem ich die Röhre mit einem Mantelrohr umgab, durch welches warmes temperiertes Wasser floß, konnte ich die Änderung des Effektes mit der Temperatur bestimmen.

Tabelle 5.

w , vernachlässigt. $w_a = 100\ 200\ \Omega$.

Temperatur	18°	28°	38°	48°	58°
i	7	15	28	50	94
Verhältnis	1	2,1	4	7,1	13,4

Der sehr große Temperaturkoeffizient ist etwa von der Größe wie er bei den gewöhnlichen Geschwindigkeitsmessungen

1) Hierbei ist von dem doch nur geringen Temperaturkoeffizienten der elektromotorischen Kraft der Konzentrationskette abgesehen worden.

gefunden wird. Der große vorgeschaltete Widerstand gestattet die Änderung des Leitvermögens der Lösung zu vernachlässigen.

Hiernach wäre es zu erwarten, daß die Größe des Effektes auch von der Fallgeschwindigkeit des Drahtes abhängig wäre. Einen solchen Einfluß habe ich nicht beobachten können (p. 939), offenbar bleibt auch bei langsameren Gleiten des Drahtes seine Geschwindigkeit überaus groß gegen die der differenzierenden Ionen.

Einfluß der Kapazität. Mit der Kapazitätsänderung des fallenden Körpers ist eine Änderung des Effektes in dem Sinne zu erwarten, daß mit steigender Kapazität größere Effekte erzielt werden. Dünne Silberdrähte geben in der Tat größere Effekte wie ebenso schwere dicke Drähte. Bindet man viele quadratische Silberblättchen mit einem Silberdraht zu einem Parallelepiped zusammen, so ist der Effekt viel kleiner, als wenn die Blättchen frei voneinander durch die Flüssigkeit fallen.

Silberpulver gibt erheblich größere Effekte wie Silberdraht, dennoch habe ich es vorgezogen, wo es anging, mit Drähten zu arbeiten, da feines Silberpulver zumal in konzentrierteren Lösungen koaguliert, dabei gewisse Mengen eines Ions mitreißt und auf diese Weise Fehler veranlassen kann. Außerdem findet beim Auflösen des Satzes in eine Staubwolke und der Wiedervereinigung desselben am Boden der Röhre zu neuem Satze eine doppelte Kapazitätsänderung (wie bei den Tropfelektroden statt) und wir haben es daher mit einer etwas anderen Erscheinung zu tun, als die wir beschreiben wollen.

Um den Einfluß der Kapazität annähernd zu bestimmen, habe ich sukzessive in derselben Röhre und durch dieselbe Lösung (abwechselnd Ag NO_3 und Cyankalium) gleich schwere Drähte verschiedener Dicke fallen lassen. Im Mittel vieler Versuche betrug der Ausschlag für:

Silberdraht (Durchmesser ca.	1 mm)	17 mm lang	30
"	"	ca. 0,65 "	41 "
"	"	ca. 0,05 "	in Knäuelform 82

Neben der beschriebenen Möglichkeit, daß ein fester Körper durch seine elektromotorische Wirksamkeit eine Potentialdifferenz gegen die umgebende Lösung erlangt, könnte aber nach den Knoblauchschen Anschauungen¹⁾ eine solche noch

1) O. Knoblauch, Zeitschr. f. phys. Chem. 39. p. 225. 1902.

dadurch erzeugt werden, daß sich das Metall in einer Lösung befindet, in welcher Anion und Kation ungleiche Beweglichkeiten aufweisen, indem das beweglichere Ion schneller an das Metall dringt und demselben seine Ladung erteilt, und könnte so die Größe und in der Nähe des Umkehrpunktes den Sinn der Potentialdifferenz beeinflussen. Obgleich ich nun in einer Reihe von Versuchen über Kontaktelektrizität, deren Publikation in einiger Zeit erst erfolgen wird, diese Annahme nur selten bestätigt finden konnte, habe ich doch, wie eingangs erwähnt, die Vorsichtsmaßregel gebraucht, diese Wirkung von vornherein durch Kurzschluß zu eliminieren, da sie ja nur in offenen Stromsystemen mit einem Konzentrationsabfall an der Elektrode zu stande kommen kann.

Die „absolute“ Potentialdifferenz. Eine weitere Frage, die nunmehr ihre Beantwortung verlangt und die besonders für die eingangs berührte Verwertung der Methode zur Erkennung des Sinnes der Potentialdifferenzen zwischen festen Körpern und Lösungen an Interesse gewinnt, ist die nach der Abhängigkeit der Effekte von der Größe der Potentialdifferenz, die zwischen dem Metalle und der jeweilig gebrauchten Lösung besteht.

Wie die Größe dieses Potentialsprunges ermittelt werden kann, habe ich in der ersten Abhandlung bereits beschrieben, und den Punkt, an welchem die Potentialdifferenz verschwindet, zu Anfang dieser Studie angeführt. Da derselbe nicht allein durch Versuche im Fallrohre ermittelt, sondern auch auf anderem Wege (l. c.) an derselben Stelle gefunden worden ist, wollen wir im folgenden alle „absoluten“ Potentialdifferenzen auf diesen Punkt ($-0,4$ gegen die Wasserstoffelektrode) als Nullpunkt beziehen. Und zwar sind die Potentialsprünge nicht wie sonst üblich auf das Elektrodenmetall gleich Null bezogen, sondern der Anschaulichkeit halber, um den Ladungssinn des Metalles direkt entnehmen zu können, wie in den früheren Abhandlungen auf den Elektrolyten gleich Null. (Das Zeichen der Potentialdifferenz wird dadurch verkehrt.)

In den einzelnen Versuchsreihen vergleichbaren Verhältnissen zu begegnen, wurden hier immer gutleitende Elektrolyte verwendet, um einen großen Widerstand in den äußeren Stromkreis legen zu können.

Schon beim Übergange von der 0,01-normalen Silber-

nitratlösung (Tab. 1) zu einer noch weiter verdünnten Lösung (Tab. 2) mußte es auffallen, daß bei der etwa 13 maligen Widerstandsvermehrung die Intensität nur auf etwa $\frac{1}{6}$ sank. Gleichzeitig war die „absolute“ Potentialdifferenz des Silbers gegen die Lösung von + 0,25 Volt in der 0,01-normalen Lösung auf etwa + 0,20 Volt in der zweiten Lösung gefallen, die Intensität war also — auf gleichen Widerstand bezogen — etwa im Verhältnisse 1:2,6 gestiegen.

Dieser Gang der Zahlen bleibt, wie ich mich durch weitere Versuche überzeugen konnte, zunächst mit weiterer Abnahme der absoluten Potentiale erhalten, um einer raschen Intensitätsabnahme in unmittelbarer Nähe des Umkehrpunktes zu weichen. Dann folgt ein scharfes Wiederansteigen in entgegengesetztem Sinne und wieder eine, diesmal langsamere, Abnahme mit weiterer Entfernung vom Umkehrpunkte.

Von den Messungsreihen, die ich zur Fixierung dieser Kurve ausführte, seien noch drei Beispiele angeführt, während das Ergebnis der übrigen aus einer graphischen Darstellung zu entnehmen ist.

Tabelle 6.

Silberspirale. Lösung: KNO_3 mit einer Spur AgNO_3 versetzt. Absolutes Potential festen Silbers in dieser Lösung + 0,07 Volt.

ω_f vernachlässigt. $r_s = 100\ 200\ \Omega$.

l	i gef.	Mittel
77,3	9,0	8,6
	8,4	
	8,5	
	8,6	
37,3	7,5	7,3
	7,2	
	7,3	
	7,3	
17,0	5,4	5,6
	5,8	
	6,0	
	5,2	

Um jenseits des Umkehrpunktes zu gelangen, kann man eine Chlorkaliumlösung, die an AgCl gesättigt ist, verwenden.

Tabelle 7.

Silberspirale. KCl-Lösung an
AgCl ges. Ag in dieser Lösung
-0,13 Volt (abs.). $w_s = 100\,200\ \Omega$.

l	i gef.	Mittel
77,8	11,7	12,4
	12,6	
	12,2	
	13,0	
37,8	9,0	9,45
	9,9	
	9,9	
	9,0	
17	7,6	7,6
	8,1	
	7,6	
	7,2	

Tabelle 8.

Silberspirale. Lösung der Tab. 7
mit konz. KCl versetzt.
Ag - 0,24 Volt. $w_s = 100\,200\ \Omega$.

l	i gef.	Mittel
77,8	9,1	8,9
	8,4	
	8,7	
	9,5	
37,8	7,0	6,5
	6,1	
	7,0	
	5,8	
17	5,3	4,9
	4,0	
	6,3	
	4,0	

Tabelle 9.

Silberspirale. CNK-Lösung. Ag in dieser Lösung - 0,55 Volt (absol.).
 $w_s = 100\,200\ \Omega$.

l	i gef.		Mittel
	I	II	
77,5	10,0	13,0	11,5—11,9
	11,2	12,2	
	11,8	11,7	
	12,4	11,5	
	11,5	11,2	
	12,0	11,7	
36,5	10,9	8,9	9,7— 8,0
	9,6	8,7	
	9,7	7,6	
	9,7	7,7	
	9,1	7,1	
	9,5	5,0	
22	4,9	4,7	4,3— 4,4
	4,4	4,3	
	4,0	4,4	
	4,1	4,4	
	4,3	4,5	
	4,0	4,3	

Rechnet man die Intensitäten der Tab. 1—2 und 4—7 auf den Widerstand von 100 000 Ohm um, so erhält man Werte, welche die Abhängigkeit der Intensität vom „absoluten“ Potentiale darstellen.

Tabelle 10.

Berechnet aus Tabelle	4	1	2	6	7	8	9
„Absolutes“ Potential	+0,389	+0,25	+0,20	+0,07	-0,13	-0,24	-0,55
i für gleichen Widerstand (100 000 Ohm)	1,8	3	8	7,3	9,5	7,7	8
Verhältnis der i	1	1,7	4,4	4	5,3	4,3	4,4

Stellt man diese (durch eine Reihe weiterer Messungen ergänzten) Ergebnisse graphisch dar, indem man die den Potentialdifferenzen proportionalen Intensitäten als Ordinaten, die „absoluten“ Potentiale als Abszissen aufträgt, so erhält man Kurven der Gestalt α auf Fig. 2. Diese Kurven weisen eine auffallende Ähnlichkeit mit denen auf, die J. J. Thomson zur Erläuterung der Verhältnisse bei der Elektrizitätserregung

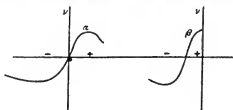


Fig. 3.

durch Tropfen, welche durch ein Gas fallen, anführt, wenn gewisse Substanzen der tropfenden Flüssigkeit zugesetzt werden. Mit steigendem Zusatze nimmt die Potentialdifferenz erst ab, um im entgegengesetzten Sinne erst anzusteigen und wieder abzufallen. Dabei nimmt das absolute Potential erst ab, geht durch den Nullpunkt und wächst im entgegengesetzten Sinne wieder an. (Den Vergleich herzustellen, stelle ich diese Kurve β neben die andere.) Diese Ähnlichkeit scheint keine bloß äußere zu sein; Versuche, an deren Ansarbeitung ich noch beschäftigt bin, zeigen vielmehr, daß die Erscheinungen der Elektri-

zitätserregung durch Tropfen, welche durch Gase fallen, Gase, die in Flüssigkeiten aufperlen etc. völlig wesensverwandt sind, d. h. sich auf einen ähnlichen Ionenaustausch zurückführen lassen. Und wenn wir diese Vorstellungen zur Verfolgung des Laues der Kurven α und β heranziehen, so folgt es unmittelbar aus den früheren Erörterungen, daß die erhaltenen Potentialdifferenzen und somit die Effekte um so größer sein werden, je größer die beim Fallen erzeugten perzentuellen Konzentrationsverschiedenheiten sind. Die prozentuelle Konzentrationsverschiebung wird aber um so größer ausfallen, je kleiner die Ionenkonzentration der Lösung ist.

Analytisch gesprochen ist diese Bedingung in der Integrationskonstante der Gleichung (1) enthalten (neben einer anderen, auf die wir vielleicht gelegentlich näher zu sprechen kommen werden) und ist aus der Formel p. 941 direkt zu ersehen.

Für die Verwertung der Erscheinung zur Erkennung „absoluter“ Potentialdifferenzen gewährt der Umstand, daß die Empfindlichkeit der Methode eben an den Punkten groß ist, wo wir sie am meisten benötigen (z. B. bei den Edelmetallen, H_2 , O_2 etc.), ferner der hier geschilderte, durchwegs gesetzmäßige Verlauf der Erscheinungen, endlich die zuletzt berührte Vielseitigkeit, daher die Möglichkeit der Ausführung zahlreicher Kontrollversuche ebenso viele nicht zu unterschätzenden Vorteile.

Wien, II. Physik. Institut.

(Eingegangen 7. März 1903.)

**4. Elektrische Eigenschaften und Eigenschwingungen von Drahtspulen mit angehängten geraden Drähten oder Metallplatten;
von P. Drude.**

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich die Eigenschwingungsperiode von Drahtspulen bestimmt. Mein Hauptzweck war dabei, Konstruktionsregeln für Teslatransformatoren zu gewinnen. Bevor ich weiter in dieser Aufgabe gehe, möchte ich das in der Überschrift genannte Thema behandeln, weil es wegen seiner Anwendung bei der drahtlosen Telegraphie (Spulen mit angehängten Antennen) noch ein aktuelleres Interesse besitzt und die Aufstellung theoretischer Grundsätze für die wirksamste Konstruktion von Erregern bei der drahtlosen Telegraphie (nach dem Braunschen System mit induktiver Koppelung) die Erledigung dieser Voraufgabe erfordert. Auch hoffe ich, daß das hier behandelte Thema Nutzen gewährt bei der Konstruktion aufeinander abgestimmter Erreger und Empfänger bei der drahtlosen Telegraphie.

I. Spulen mit angehängten geraden Drähten.

1. *Theoretisches und experimentelles Hauptresultat.* Die Änderung der Eigenschwingungsdauer einer Spule durch zwei angehängte, gleich lange, gerade Drähte hängt sowohl von den Parametern ab, welche die Eigenschwingungsdauer der freien Spule bestimmen, als auch von der Länge, der Dicke, der Natur der Umgebung (Isolation) der angehängten Drähte. (Letztere sollen kurz *Antennen* genannt werden.) Um nun bei der Mannigfaltigkeit der verfügbaren Variablen die Verhält-

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902.

nisse übersehen zu können, erweist sich eine theoretische Betrachtung als nützlich, ja notwendig, welche nicht als eine strenge Theorie zu betrachten ist, die aber für die vorliegenden praktischen Zwecke auszureichen scheint.

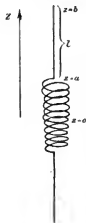


Fig. 1.

Die Spule soll konstante Ganghöhe haben und die Länge $2a$ (vgl. Fig. 1). Den Koordinatenanfang legen wir in ihre Mitte, die z -Achse sei parallel zur Spulenachse gerichtet. Bei $z = \pm a$ soll die Spule in je einen geraden Draht der Länge $l = b - a$ auslaufen. Das Ende dieser Antennen liegt also bei $z = \pm b$. Wir nehmen an, daß sich in der Spule zeitlich ungedämpfte¹⁾ elektrische Wellen mit der längs der z -Achse gemessenen konstanten Geschwindigkeit c' fortpflanzen können, so daß wir die Stromstärke i' in der Spule setzen können:

$$(1) \quad i' = A' \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda'}, \quad \text{wobei } \lambda' = c' T \text{ ist.}$$

Ebenso nehmen wir an, daß die Stromstärke i in der auf der positiven z -Achse gelegenen Antenne dargestellt werden kann durch

$$(2) \quad i = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{b-z}{\lambda}, \quad \text{wobei } \lambda = c T \text{ ist.}$$

Die Annahme konstanter Geschwindigkeiten c' und c wird nicht streng erfüllt sein, weil sie nur gelten würde, wenn das Produkt aus Selbstinduktion und Kapazität der Längeneinheit längs der Spule einen von z unabhängigen Wert hätte, und ebenso längs des Drahtes, was nicht streng gilt.²⁾ Wir werden sehen, wie weit man mit dieser vereinfachenden Annahme die tatsächlichen Verhältnisse darstellen kann.

Die Geschwindigkeit c längs des geraden Drahtes ist, falls derselbe in Luft lagert und genügend dünn ist, und nicht mit Isoliermaterial umgeben ist, gleich der Lichtgeschwindigkeit

1) Die Dämpfung spielt für Berechnung der Eigenschwingungen nur eine unbedeutende Rolle, vgl. weiter unten p. 966.

2) Vgl. dazu M. Abraham, Wied. Ann. 66. p. 458. 1898.

$c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, da die Eigenperiode T eines graden, genügend dünnen Drahtes der Länge l in Luft sich berechnet¹⁾ zu $\frac{1}{2} c T = l$, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec ist.

Bezeichnet man nun die auf der Länge dz der Spule an einer beliebigen Stelle vorhandene elektrische Ladung durch $\epsilon' dz$, analog auf dem Drahte durch ϵdz , so muß diese dadurch entstehen, daß an dieser Stelle weniger Strom aus dem Drahtquerschnitt austritt, als in ihm eintritt. Daher entsteht die bei Drahtwellen stets gültige Relation

$$(3) \quad -\frac{\partial i'}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon'}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t}.$$

Andererseits ist für jede Stelle z der Spule und des Drahtes

$$(4) \quad \epsilon' = \mathfrak{C}' V', \quad \epsilon = \mathfrak{C} V,$$

wobei $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}$ die Kapazität der Längeneinheit ($dz = 1$) der Spule und des Drahtes an der Stelle z bedeuten, V' und V das Potential.

Aus (1), (2), (3) und (4) gewinnt man

$$(5) \quad V' = -\frac{A' T}{\mathfrak{C}' \lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda},$$

$$(6) \quad V = -\frac{A T}{\mathfrak{C} \lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{b-z}{\lambda}.$$

Die Form der Stromgleichungen (1) und (2) ist gleich so gewählt, daß bei $z = 0$ ein Potentialknoten liegt ($V' = 0$), bei $z = b$ ein Stromknoten ($i = 0$). Ersterer ist notwendig, weil $z = 0$ ein Symmetriezentrum der Anordnung ist, letzterer, weil bei $z = b$ der Draht ohne angehängte Kapazität endigen soll.²⁾ Als weitere Grenzbedingungen bestehen daher nur noch die Gleichungen:

$$(7) \quad i = i' \text{ für } z = a, \quad V = V' \text{ für } z = a.$$

1) Nach M. Abraham, Wied. Ann. 66. p. 471. 1898, ist, falls ϱ den Drahtradius bedeutet, und $\epsilon = 1:4 \log n a l/\varrho$ bezeichnet, die halbe Wellenlänge $\frac{1}{2} c T$ der Grundschiwingung um den Bruchteil $5,6 \cdot \epsilon^2$ größer als die Drahtlänge l . Wenn $l = 1$ m und $\varrho = 1$ mm ist, beträgt daher diese Korrektur 0,73 Proz. Inwieweit die Versuche diesem theoretischen Resultat entsprechen, soll weiter unten erörtert werden.

2) Dies steht auch mit der Theorie von Abraham, l. c. p. 458 im Einklang.

Diese ergeben nach (1), (2), (5), (6), da $b - a = l$ ist:

$$(8) \quad \begin{cases} A \sin 2\pi \frac{l}{\lambda} = A' \cos 2\pi \frac{a}{\lambda}, \\ \frac{A}{\mathfrak{U}} \cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{A'}{\mathfrak{U}'\lambda'} \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}, \end{cases}$$

woraus man gewinnt:

$$(9) \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{a}{\lambda'} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{\mathfrak{U}'\lambda'}{\mathfrak{U}} = \beta.$$

Der Koeffizient

$$(10) \quad \beta = \frac{\mathfrak{U}'\lambda'}{\mathfrak{U}} = \frac{e'\mathfrak{U}'}{c\mathfrak{U}}$$

ist charakteristisch für die gewählte Anordnung, d. h. hängt von dem charakteristischen Parameter der Spule und des Drahtes ab. Wir wollen ihn kurz *Durchlaßindex* nennen, da von ihm die beim Übergang von elektrischen Wellen von Spulen auf gerade Drähte und umgekehrt eintretenden Veränderungen der Strom- und Potentialamplitude abhängen. $e':c$ ist jedenfalls < 1 , da aber $\mathfrak{U}' > \mathfrak{U}$ sicher > 1 , so kann man über die Größe von β von vornherein nichts Bestimmtes aussagen. Gleichung (9) können wir dadurch praktischer gestalten, daß wir die Periode T_0 der freien Spule ohne Antenne, d. h. für $l = 0$, einführen. Nennen wir die diesem Fall entsprechenden Wellenlängen λ_0 und λ'_0 , d. h. setzen wir

$$(11) \quad \lambda_0 = c T_0, \quad \lambda'_0 = e' T_0,$$

und berücksichtigen, daß für $l = 0$ $\sin 2\pi l/\lambda_0 = 0$ ist, so folgt aus (9) [oder der ersten Gleichung (8)] $a = \frac{1}{4} \lambda'_0$; setzen wir diesen Wert für a in (9) ein, so folgt:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \lambda'_0}{\lambda'} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda_0} = \beta$$

oder da $\lambda'_0:\lambda' = T_0:T = \lambda_0:\lambda$, so folgt

$$(12) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda_0}{\lambda} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \beta,$$

oder

$$(12') \quad \cotg \frac{\pi}{2} \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} = \beta.$$

λ_0 ist nun die als Eigenwellenlänge einer Spule in meiner zitierten letzten Arbeit bezeichnete Größe, die man in der dort angegebenen Weise aus den Parametern der Spule berechnen kann. Aus Beobachtungen von λ (auch λ_0 kann zur

Kontrolle mit beobachtet werden) erhält man also nach (12) oder (12') eine experimentelle Bestimmung des Durchlaßindex β .

Der Durchlaßindex β hängt nun, wie auch die Beobachtungen bestätigen, sowohl von den Parametern der Spule, als auch dem Verhältnis $l:\rho$ des Antennendrahtes ab, wobei ρ den Radius des Antennendrahtes bedeutet. Die Abhängigkeit des β von l/ρ entsteht bei genügend großem l/ρ (vgl. Anm. 1 auf p. 959) nur durch den Nenner \mathfrak{C} , die Kapazität der Längeneinheit des Antennendrahtes. Für einen isolierten dünnen Draht der Länge l ist die Kapazität der Längeneinheit¹⁾ in elektrostatischem Maß:

$$(13) \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{2 \log nat l/\rho}.$$

Nun tragen die Antennen entgegengesetzte elektrische Ladungen. Wenn sie kurz sind, und sich (bei nicht zu langer Spule) relativ nahe kommen, so wäre die Kapazität \mathfrak{C} ihrer Längeneinheit jedenfalls *größer*, als der Formel (13) entspricht, und \mathfrak{C} würde bei längeren Antennen beständig nach dem freien Antennenende hin abnehmen und dem Werte (13) zustreben. Nun ist aber zu berücksichtigen, daß die Spule, deren Ende ja auch elektrische Ladung von gleichem Vorzeichen, wie die angehefteten Antennendrähte tragen, die benachbarten Antennenteile teilweise elektrostatisch abschirmt, wenn der Spulenradius viel größer als der Antennenradius ist. Dieser elektrostatische Spulenschutz, der um so wirksamer ist, je kürzer die Antenne ist, würde also die Kapazität \mathfrak{C} der Längeneinheit der Antenne um so *kleiner* machen, je kürzer die Antennen sind.

Nun haben wir aber bei unserem theoretischen Ansatz ein längs der Antenne konstantes \mathfrak{C} angenommen. Es liegt nahe, die Formel (13) zu benutzen, und demgemäß für β zu setzen:

$$(14) \quad \beta = \beta' \log vulg l/\rho,$$

1) Vgl. K. R. Johnson, Öf. Svensk. Vet. Ak. Förh. 59. p. 53. 1902. Referiert in Beibl. z. Ann. d. Phys. 27. p. 67. 1903. — Die betreffende Formel ist auch aus älteren Lehrbüchern leicht abzuleiten, z. B. aus Mathieu, Theorie des Potentials, deutsch von H. Maser, Berlin 1890. p. 239.

wobei β' eine Größe bedeutet, die nur noch von den Spulenparametern abhängt. In der Tat ergeben für längeres l ($l: \frac{1}{2}\lambda > 0,06$)¹⁾ die beobachteten Werte β , wenn man sie durch $\log l/\varrho$ dividiert, annähernd einen nur von der angewendeten Spule abhängenden Quotienten β' . Für kleinere l ($l: \frac{1}{2}\lambda < 0,06$) wird dagegen β' um so größer, je kleiner l ist (elektrostatische Schirmwirkung der Spulendenen), für sehr große l ($l: \frac{1}{2}\lambda > 0,25$) scheint ebenfalls β' (bei derselben angewendeten Spule) ein wenig abzunehmen mit wachsender Antennenlänge l (Einfluß der wachsenden relativen Distanz der entgegengesetzt geladenen Antennenteile). Jedoch kommt bei sehr großem l noch ein anderer störender Umstand in Betracht, von dem weiter unten (p. 966) die Rede sein soll.

Jedenfalls kann man mit dem Ansatz (14) in einer für die Praxis wohl ausreichenden Weise die Verhältnisse darstellen, da er die Eigenwellenlänge innerhalb höchstens 5 Proz. Fehler (meist genauer) zu berechnen erlaubt.

Hinsichtlich des Koeffizienten β' ergeben die Beobachtungen folgendes Resultat.

Nennt man n die Windungszahl der Spule, h die Spulenhöhe ($h = 2a$), $2r$ den Spulendurchmesser, g Ganghöhe der Spule, δ' die Drahtdicke des Spulendrahtes, l' die Länge des Spulendrahtes, und f jenen für eine Spule charakteristischen Koeffizienten, welcher gleich ist dem Verhältnis der halben Eigenwellenlänge der freien Spule (d. h. der Größe $\frac{1}{2}cT_0 = \frac{1}{2}\lambda_0$) zu der Spulendrahtlänge l' , d. h.

$$(15) \quad f = \frac{1}{2}\lambda_0 : l',$$

so ergibt sich nach den Beobachtungen:

$$(16) \quad \frac{\beta}{\log l/\varrho} = \beta' = \frac{f}{n} \sqrt{h/2r} \cdot \varphi(h/2r, g/\delta'),$$

wobei φ eine Funktion von $h/2r$, g/δ' bedeutet, die aber von g/δ' nur sehr wenig und von $h/2r$ auch nicht stark abhängt.

Den Spulenkoeffizienten f habe ich in meiner zitierten letzten Arbeit in seiner Abhängigkeit von den Spulenparametern

1) Nach den Beobachtungen scheint wesentlich nur der Quotient $l:\lambda$ maßgebend dafür zu sein, mit welcher Genauigkeit der Ansatz (14) zutrifft.

bestimmt. Daß β bez. β' bei konstantem n , $h/2r$, und g/δ' proportional mit f sein müssen, ergibt sich aus der Überlegung, daß, da

$$c' = \frac{\lambda_0'}{T_0'} = \frac{4a}{T_0'},$$

wir schreiben können nach (10)

$$\beta = \frac{4a}{c T_0'} \cdot \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}} = \frac{4a}{\lambda_0'} \cdot \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}}.$$

Wenn nun zwei Spulen miteinander verglichen werden, für die n , $h/2r$, g/δ denselben Wert hat, so können sie sich nur hinsichtlich der Natur des Spulenkernes oder ihrer Umgebung unterscheiden, d. h. nur hinsichtlich \mathfrak{C}' . Da nun nach der Thomson-Kirchhoffschen Formel ist:

$$\lambda_0 = 2\pi\sqrt{L'C'},$$

so folgt $\mathfrak{C}' \sim \lambda_0^2$, d. h. für konstantes n , $h/2r$, g/δ' ist

$$\beta \sim \lambda_0, \text{ d. h. nach (15) } \beta \sim f.$$

Wenn wir die Funktion η kennen, so ist nach (16) β zu berechnen, da f aus den Tabellen meiner zitierten Arbeit zu entnehmen ist. *Daher ergibt sich dann aus (12) auch die Eigenperiode einer Spule mit angehängter Antenne.*

Die Berechnung wird sehr einfach, wenn l/λ_0 klein gegen 1 ist. Denn dann ist λ_0 nur wenig von λ verschieden und aus (12') folgt dann:

$$(17) \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{4l}{\beta} \text{ (falls } l/\lambda_0 \text{ klein).}$$

Ebenfalls ist λ einfach zu berechnen, wenn l/λ_0 sehr groß gegen 1 ist. Denn dann ist $\lambda_0:\lambda$ klein und aus (12) folgt

$$(18) \quad \lambda = 4l + \frac{\lambda_0}{\beta} \text{ (falls } l/\lambda_0 \text{ groß).}$$

Wenn $l:\lambda_0$ nicht klein oder groß gegen 1 ist, so können die Wurzeln der transzendenten Gleichung (12) am besten durch Probieren und graphische Interpolation gefunden werden, wobei man zunächst von dem durch (17) oder (18) bestimmten Werte λ ausgehen kann, von denen einer eventuell als näher Näherungswert gelten wird.

Aus (12) ersieht man, daß die Spule mit Antenne zwei Systeme von Grund- und Oberschwingungen besitzt; die Grundschwingung des einen Systems richtet sich wesentlich nach λ_0 [nach (17)], die des anderen wesentlich nach l [nach (18)].

Beide Grundschrwingungen werden identisch nach (12), wenn $l = \frac{1}{4} \lambda_0$ ist; dann ergibt sich nach (12):

$$(19) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\beta}.$$

Im folgenden handelt es sich immer nur um die langsamste Eigenperiode, die ich allein experimentell bestimmt habe. In dieser wird das System (Spule und Antennen) am stärksten erregt und sie kommt für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie bei weitem am meisten in Betracht.

2. *Der Einfluß eines Fehlers des Durchloßindex β auf die Berechnung der Eigenperiode* ist im allgemeinen klein. Aus (12) folgt durch Differentiation:

$$(20) \quad \frac{d\beta}{\beta} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{\pi \cdot \lambda_0 / \lambda}{\sin \pi \lambda_0 / \lambda} + \frac{4 \pi \cdot l / \lambda}{\sin 4 \pi l / \lambda} \right\} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \cdot A.$$

Der Faktor A ist im allgemeinen groß, und zwar ist er stets größer als 2, wie sich sofort aus (20) ergibt, da $\sin \pi \lambda_0 / \lambda$ und $\sin 4 \pi l / \lambda$ stets positiv sind, und $\sin \varphi$ stets kleiner als φ ist. *Der prozentische Fehler für λ ist also stets kleiner als die Hälfte des prozentischen Fehlers von β . β hat sehr wenig Einfluß auf λ , sowohl wenn l sehr klein, als auch wenn l sehr groß ist.*

Denn falls l/λ_0 klein ist, folgt aus (17) oder (20):

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\beta}{\beta} \cdot \frac{4l}{\beta \lambda_0 + 4l},$$

d. h. für $l: \frac{1}{2} \lambda_0 = 0,10$ und für $\beta = \frac{1}{2}$ (eine Zahl, in deren Bereich meist die Werte β liegen), würde der prozentische Fehler in λ nur $\frac{2}{7}$ vom prozentischen Fehler in β betragen. Es dürfte also eine Kenntnis von β mit selbst 20 Proz. Fehler für die Bedürfnisse der Praxis ausreichen. — Wenn l/λ_0 groß ist, so folgt aus (18) oder (20)

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\beta}{\beta} \cdot \frac{\lambda_0}{4l\beta + \lambda_0},$$

d. h. für $\beta = \frac{1}{2}$ und $l: \frac{1}{2} \lambda_0 = 4$ würde der prozentische Fehler in λ nur $\frac{1}{6}$ vom prozentischen Fehler in β betragen. Es ist sehr günstig, daß gerade in dem Bereiche, in welchem der Einfluß des β auf λ am stärksten ist, die Formeln (12) und (14) die tatsächlichen Verhältnisse am besten darstellen können.

3. *Die Eigenperiode eines geraden Drahtes* soll nach den theoretischen Entwicklungen von Abraham (l. c. p. 457 vgl. auch oben p. 959, Anm. 1) aus der Länge l zu berechnen sein

nach der Gleichung $\frac{1}{2} c T = l$. Dieses Resultat haben meine Beobachtungen nicht bestätigt¹⁾, vielmehr war die beobachtete halbe Eigenwellenlänge um 5 Proz. größer als die Drahtlänge. Es wurde zunächst ein 4 m langer, 1 mm dicker Kupferdraht etwa 10 cm über dem in meiner letzten Arbeit²⁾ beschriebenen Erreger ausgespannt (die Enden wurden durch Fäden gehalten), eine Vakuumröhre in die Nähe des einen Drahtendes gestellt, und der Kondensator des Erregers vermittelst seiner Mikrometerschraube so verstellt, daß die Röhre maximal leuchtete. Die vom Erreger erzeugte Wellenlänge betrug dann 421 cm.³⁾ Wurde dagegen in 8 cm Distanz vom Draht ein zweiter, ebenfalls 4 m langer Draht parallel gespannt, so fiel die Resonanzwellenlänge auf den theoretisch zu erwartenden Wert (ich erhielt 401 cm anstatt 400 cm). — Ebenso ergab ein 250 cm langer, einzelner Draht $\frac{1}{2} \lambda = 262$ cm, dagegen zwei Paralleldrähte $\frac{1}{2} \lambda = 250$ cm.

Zunächst könnte man denken, daß die Kapazität der leuchtenden Röhre die Eigenperiode des Drahtes verlangsamt habe. Dagegen spricht aber einerseits, daß bei zwei Paralleldrähten sich der theoretische Wert für $\frac{1}{2} \lambda$ ergab (bei denen auch die Vakuumröhre zur Anwendung kam), und daß andererseits die Resonanzstellung des Erregerkondensators sich durchaus nicht änderte, wenn das Leuchten der Röhre schwächer gemacht und sie vom freien Drahtende und vom Drahte selbst mehr entfernt wurde.

Sodann konnte man an einen Einfluß der Dämpfung denken, da diese (wegen größerer Strahlung) bei einem Drahte stärker ist, als bei zwei Paralleldrähten. Da nun die Vakuumröhre auf maximale Amplitude (der elektrischen Kraft) anspricht, und diese nach M. Wien⁴⁾ für langsamere T ein Maximum erreicht, als der Resonanz entspricht, so wäre die Differenz zu erklären, wenn die Dämpfung genügend groß wäre. Letzteres ist nun aber nicht der Fall. Setzt man die elektrische Kraft

1) Auch Hr. Hudson hat unabhängig von mir hier im Institut die gleichen Resultate gefunden, wie ich.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 295. 1902.

3) Der Erreger wurde sowohl durch darüber gelegte Paralleldrähte ohne als auch mit Kondensator, geeicht, wie ich es l. c. beschrieb.

4) M. Wien, Wied. Ann. 58. p. 725. 1896.

am Drahte proportional zu $e^{-\gamma t/T}$ (d. h. ist γ das natürliche logarithmische Dekrement), so wird maximale Amplitude durch den Erreger im Drahte erregt, wenn die Erregerperiode T ist:

$$(21) \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1 + \gamma^2/4\pi^2}{1 - \gamma^2/4\pi^2}},$$

falls T_0 die Eigenperiode des Drahtes ohne Rücksicht der Dämpfung bezeichnet. Wenn also T um 5 Proz. größer ist als T_0 , so müßte $\gamma^2 = 2$, d. h. $\gamma = 1,4$ sein. Gegen einen so hohen Wert von γ spricht aber einerseits die noch recht gute experimentelle Einstellbarkeit ¹⁾ der Resonanzlage, andererseits die Theorie ²⁾, nach der ist

$$(22) \quad \gamma = \frac{9,74}{4 \log_{\text{nat}} l/q}.$$

Für den 4 m langen Draht müßte also $\gamma = 0,27$, für den 2,5 m langen Draht müßte $\gamma = 0,29$ sein. Daher müßte nach (21) eine Differenz zwischen T und T_0 nicht zu beobachten sein (sie müßte unter $1/5$ Proz. bleiben). — Auch nach der Resonanztheorie von Bjerknes ³⁾ würde die Periode der Maximalerregung um etwa nur 1 Proz. größer sein können, als die Eigenschwingungsperiode.

Auch Blankschmireln des Drahtes änderte nichts, als Beweis dafür, daß nicht etwa durch schlechtleitende Oberflächenschicht ein größeres γ hervorgebracht sein konnte.

Die Differenz zwischen Theorie und Experiment scheint mir, abgesehen von einem geringen Dämpfungseinfluß (nach der Bjerknesschen Theorie), wesentlich daran zu liegen, daß es nicht möglich ist, einen einzelnen Draht so fern von allen anderen Gegenständen, die stets auf Kapazitätsvergrößerung hinwirken, auf seine Eigenschwingung hin zu untersuchen, als dies die Theorie voraussetzt. In der Tat wurde die Resonanzperiode durch Annäherung eines 2 m langen Holzmaßstabes an den 2,5 m langen Draht merklich weiter vergrößert, ja sogar wenn nur ein kleines eisernes Tischchen (auf 20 cm Distanz) oder ein größerer Holztisch (auf 50 cm Distanz) dem Drahte genähert wurden, zeigte sich ihr Einfluß in weiterer Verlangsamung der Resonanzperiode und in stärkerer Dämpfung der Schwingung im Drahte (schwächeres

1) Sie war allerdings deutlich schlechter, als bei zwei Paralleldrähten.

2) M. Abraham, l. c. p. 469.

3) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55, p. 150. 1895.

Leuchten der Vakuumröhre im Resonanzfall). Die Drähte waren nun bei den Versuchen mindestens 1 m über dem Fußboden und von den Wänden entfernt, in der Mitte lagen sie aber 25 cm über dem Holztisch, auf welchem der Erreger stand. Dieser, das Induktorium, der Körper des Beobachters wird vermutlich die Kapazität des Drahtes so vermehrt haben, daß die Resonanzperiode um 5 Proz. größer ausfiel, als sie nach der Theorie sein sollte.¹⁾ Bei der drahtlosen Telegraphie wird man, wenn man mit genügend langen Antennen operiert, die nicht nahe an einem Gebäude geführt werden, sich viel eher den theoretischen Verhältnissen eines freien Drahtes nähern. Wir lassen daher die Theorie unverändert, haben aber zu berücksichtigen, daß bei Versuchen im kleinen, wenn die Drahtlänge l sehr groß gegen die Spulenwellenlänge λ_0 wird, eventuell bei Anwendung der Formel (12) die Drahtlänge um etwa 5 Proz. größer zu nehmen ist, als sie wirklich ist, wenigstens wenn Holz, Stein oder Metallmassen dem Drahte auf Distanzen nahe kommen, die mit seiner Länge vergleichbar sind.

4. Die Beobachtungen zur Ermittlung von λ_0 und λ sind in derselben Weise angestellt, wie ich es in meiner letzten Arbeit²⁾ ausführlich beschrieben habe. Die Spule wurde hoch über den Erregerkreis gestellt, von den Antennen hing die obere an einem an der Zimmerdecke über eine Rolle geleiteten Faden, während das untere Ende zu einer möglichst kleinen Öse gebogen war, welche um das obere Spulendrahtende gelegt wurde³⁾; die untere Antenne hing in einer kleinen Öse am unteren Spulendrahtende und endigte frei, d. h. mindestens noch 20 cm vom Fußboden entfernt. Der Draht ging (bei

1) Diese Versuche zeigen deutlich, welcher Fortschritt in der exakten Messung elektrischer Wellen erzielt wurde, als Lecher von dem *einen* Drahte, den Hertz angewandt hatte, zu seinem System von *zwei* Drähten überging. Daß die Differenz zwischen Theorie und Experiment sich in der dargelegten Weise erklärt, wird auch dadurch noch wahrscheinlicher gemacht, daß Hr. Hudson je nach der angewandten Drahtlänge etwas verschiedene große Differenzen zwischen Theorie und Experiment erhielt.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902.

3) Klemmschrauben mußten vermieden werden, weil ihre Kapazität die Verhältnisse störte. Durch besondere Kontrollversuche wurde festgestellt, daß die Anlegung durch die Ösen ebenso wirkte, als wenn sich der Spulendraht kontinuierlich in die Antenne fortsetzte, d. h. mit ihr einen zusammenhängenden Draht bildete.

größeren Längen) zentral durch ein 4 cm großes Loch der Tischplatte; bei den Versuchen mit sehr langen Antennen ($l = 500$ cm) traten die Antennen aus dem Beobachtungszimmer durch 42 cm im Durchmesser haltende Löcher im Fußboden bez. der Decke in ein unteres bez. oberes Stockwerk. Sämtliche Drähte bestanden aus Kupfer.

Ich gebe zunächst einige Beobachtungen an, welche die Anwendbarkeit der Formeln (12) und (14) dartun sollen.

Spule α , auf Ebonithohlring.

$$f = 1,94, \quad n = 10, \quad h/2r = 0,33, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$r = 192 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 373 \text{ cm}, \quad h = 2,0 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

Antennendicke $\delta = 0,9$ mm, isoliert.

Antennenlänge l cm	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Beob. $\frac{1}{2}\lambda$ cm	392	411	430	450	469	486	502	520	535	550
Ber. β nach (12)	0,511	0,509	0,516	0,507	0,504	0,509	0,518	0,515	0,521	0,527
logvulg l/ϱ	2,05	2,35	2,52	2,65	2,74	2,82	2,89	2,95	3,00	3,04
$\beta' = \beta : \log l/\varrho$	0,250	0,217	0,205	0,191	0,184	0,180	0,180	0,174	0,174	0,173

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, daß von $l = 5$ bis $l = 50$ cm β annähernd konstant ist, jedenfalls viel besser konstant als β' . Es liegt dies aber an der Kleinheit von l . Es ist bei $l = 35$ cm $l : \frac{1}{2}\lambda = 0,07$. Für kleinere l ergibt die Tabelle, daß β nahezu konstant ist, für größere l dagegen daß β' nahezu konstant ist. Dies tritt noch deutlicher bei einer anderen Beobachtung mit längeren Antennen zu Tage.

Spule α , Antennendicke 1 mm, blanker Draht.

l	10	25	50	75	100	150	200	300	400	500
$\frac{1}{2}\lambda$	410	467	543	609	670	787	904	1120	1350	1560
β	0,533	0,518	0,556	0,585	0,604	0,628	0,631	0,643	0,621	0,620
β'	0,232	0,192	0,185	0,184	0,183	0,181	0,175	0,170	0,159	0,155
$l : \frac{1}{2}\lambda$	0,024	0,054	0,092	0,123	0,149	0,191	0,221	0,269	0,296	0,321

Man bemerkt aus der Tabelle, und besonders aus der Fig. 2, in welcher β und β' als Funktion von $l : \frac{1}{2}\lambda$ dargestellt ist, daß im allgemeinen β' viel besser konstant ist als β , und daß besonders im Intervall $0,05 < l : \frac{1}{2}\lambda < 0,25$

β' als konstant angesehen werden kann. Die Inkonstanz des β' bei kleinem l ist oben (p. 962) theoretisch erklärt, ist aber für praktische Berechnung von λ aus l und β' unwesentlich (vgl. oben p. 964). Das Abnehmen von β' mit wachsendem l von $l: \frac{1}{2}\lambda > 0,25$ an ist jedenfalls mindestens teilweise durch die oben p. 966 erwähnte Störung veranlaßt, weil auch bei den vertikal gespannten Antennen eine Vergrößerung ihrer Kapazität durch die Zimmerwände und die an ihnen verlaufenden Metallleitungen und Gasrohre nicht ganz zu vermeiden war. Wenn z. B. für $l = 500$ cm $\frac{1}{2}\lambda$ um 5 Proz. kleiner beobachtet wäre, so würde sich β' zu 0,184 berechnen, d. h.

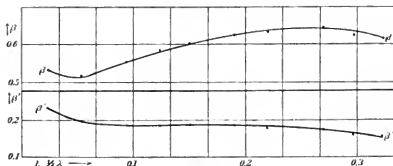


Fig. 2.

β' hätte dann für diese langen Antennen noch denselben Wert, wie für die zehnmal kürzeren Antennen. Wahrscheinlich ist also bei Versuchen in großem Maßstabe, bei denen die obere Antenne freier liegt, β' noch besser konstant, als bei diesen Versuchen. Das Verhalten von β' bei sehr langen Antennen ist deshalb aber praktisch nicht wichtig, weil einerseits β' auf λ dann wenig Einfluß hat (vgl. oben p. 964), und weil andererseits zur Erzielung scharfer Resonanz zwischen Sender und Empfänger bei der drahtlosen Telegraphie die Dämpfung des Senders durch Strahlung zweckmäßig stark niedrig zu halten ist, was um so mehr eintritt, je kleiner $l: \frac{1}{2}\lambda$ ist.

Wie ein Vergleich der beiden mitgeteilten Tabellen ergibt, bewirkt die Isolation der Antenne (ihr Draht war mit $\frac{1}{2}$ mm dicker Baumwollisolation versehen) ein etwas größeres λ als eine blanke Antenne gleicher Länge (und daher auch

kleineres β bez. β' . Dieses ist wegen der durch die Dielektrizitätskonstante des Isoliermaterials vergrößerte Antennenkapazität erklärlich.

Im folgenden sind nur blanke Antennen berücksichtigt.

Der Einfluß der Antennendicke δ geht aus folgenden Tabellen hervor, aus denen auch zu beurteilen ist, inwieweit β bez. β' konstant, d. h. unabhängig von l ist. Die Spulen sind geordnet nach wachsendem Verhältnis $h/2r$.

Spule ϵ , auf Ebonitvollscheibe.

$$f = 2,87, \quad n = 4, \quad h/2r = 0,066, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$l' = 128 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 368 \text{ cm}, \quad h = 0,67 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

l cm	10	25	50	75	100
$l : \frac{1}{2}\lambda$	0,03	0,06	0,11	0,16	0,19
$\delta = 0,4 \text{ mm}$					
$\frac{1}{2}\lambda$	385	408	449	481	—
β	1,11	1,16	1,23	1,37	—
β'	0,411	0,374	0,362	0,373	—
$\delta = 1 \text{ mm}$					
$\frac{1}{2}\lambda$	387	414	454	497	532
β	1,04	1,08	1,17	1,19	1,27
β'	0,452	0,400	0,390	0,375	0,385
$\delta = 2 \text{ mm}$					
$\frac{1}{2}\lambda$	394	425	466	—	—
β	0,78	0,86	1,01	—	—
β'	0,366	0,357	0,374	—	—

Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß von $l : \frac{1}{2}\lambda \cong 0,06$ an β' innerhalb der Messungsfehler (hier im Mittel 4 Proz. für β') konstant ist, und zwar auch für verschiedene Antennendicke δ . Der Mittelwert dieser β' (bei dem also nur die für $l = 10 \text{ cm}$ beobachteten β' ausgeschlossen sind) beträgt

$$\beta' \text{ Mittel} = 0,366.$$

Nach (16) ergibt sich daraus

$$q = 1,99 \text{ für } h/2r = 0,066, \quad g/\delta' = 2,4.$$

Spule *m*, kernlos.

$f = 2,11$, $n = 10$, $h/2r = 0,20$, $g/\delta' = 2,4$.
 $l' = 317,5$ cm, $1/2 \lambda_0 = 670$ cm, $h = 2,0$ cm, $\delta' = 0,9$ mm.

l cm	10	25	50
$l: 1/2 \lambda$	0,01	0,03	0,06
$\delta = 0,4$ mm			
$1/2 \lambda$	700	757	838
β	0,66	0,57	0,58
β'	0,25	0,18	0,171
$\delta = 1$ mm			
$1/2 \lambda$	707	770	865
β	0,54	0,50	0,50
β'	0,24	0,18	0,166
$\delta = 2$ mm			
$1/2 \lambda$	716	785	886
β	0,48	0,43	0,44
β'	0,22	0,18	0,165

Mittel¹⁾ $\beta' = 0,167$, $\varphi = 1,77$.

Spule *d*, auf Holzring.

$f = 2,24$, $n = 7$, $h/2r = 0,21$, $g/\delta' = 2,4$.
 $l' = 134$ cm, $1/2 \lambda_0 = 300$ cm, $h = 1,3$ cm, $\delta' = 0,9$ mm.

$\delta' = 1$ mm.

l cm	10	25	50
$l: 1/2 \lambda$	0,03	0,07	0,12
$1/2 \lambda$	325	369	425
β	0,79	0,71	0,78
β'	0,34	0,263	0,260

$\varphi = 1,77$.

1) Auch hier sowie im folgenden sind bei Berechnung des Mittelwertes von β' nur die bei $l: 1/2 \lambda \leq 0,06$ beobachteten Werte berücksichtigt.

$$f = 2,58, \quad n = 13, \quad h/2r = 0,22, \quad g/\delta' = 1,1.$$

$$l' = 244 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2} \lambda_0 = 630 \text{ cm}, \quad h = 1,3 \text{ cm}, \quad \delta' = 1 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$ $l: \frac{1}{2} \lambda$	10	25	50
	0,02	0,03	0,06
$\frac{1}{2} \lambda$	674	733	830
β	0,45	0,48	0,48
β'	0,20	0,18	0,161

$$\varphi = 1,75.$$

Spule a, auf Ebonitring.

$$f = 1,94, \quad n = 10, \quad h/2r = 0,33, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$l' = 192 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2} \lambda_0 = 373 \text{ cm}, \quad h = 2,0 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$ $l: \frac{1}{2} \lambda$	10	25	50	75	100
	0,02	0,05	0,09	0,12	0,15
	$\delta = 0,2 \text{ mm}$				
$\frac{1}{2} \lambda$	—	—	511	571	—
β	—	—	0,70	0,72	—
β'	—	—	0,189	0,187	—
	$\delta = 0,4 \text{ mm}$				
$\frac{1}{2} \lambda$	405	453	521	579	—
β	0,62	0,61	0,65	0,69	—
β'	0,23	0,20	0,191	0,193	—
	$\delta = 1 \text{ mm}$				
$\frac{1}{2} \lambda$	410	467	543	609	670
β	0,53	0,52	0,56	0,58	0,60
β'	0,23	0,19	0,185	0,184	0,183
	$\delta = 2 \text{ mm}$				
$\frac{1}{2} \lambda$	420	478	560	630	—
β	0,42	0,46	0,50	0,53	—
β'	0,21	0,19	0,185	0,183	—

$$\varphi = 1,68.$$

Spule c, auf Weißbuchenkern.

$$f = 2,24, \quad n = 10, \quad h/2r = 0,33, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$l' = 191 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2} \lambda_0 = 427 \text{ cm}, \quad h = 2,0 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

l	10	25	50	75
$l: \frac{1}{2} \lambda$	0,02	0,05	0,09	0,12
$\frac{1}{2} \lambda$	460	510	577	640
β	0,61	0,60	0,64	0,67
β'	0,26	0,22	0,213	0,211

$$\varphi = 1,66.$$

Spule n, auf Eichenkern.

$$f = 2,80, \quad n = 13, \quad h/2r = 0,33, \quad g/\delta' = 1,1.$$

$$l' = 161 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2} \lambda_0 = 451 \text{ cm}, \quad h = 1,3 \text{ cm}, \quad \delta' = 1 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

l	10	25	50	75	100
$l: \frac{1}{2} \lambda$	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14
$\frac{1}{2} \lambda$	484	545 (?)	606	667	722
β	0,61	0,52 (?)	0,62	0,66	0,70
β'	0,26	0,19 (?)	0,207	0,208	0,210

$$\varphi = 1,68a.$$

Spule p, auf Weißbuchenkern.

$$f = 1,85, \quad n = 15, \quad h/2r = 0,65, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$l' = 218 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2} \lambda_0 = 404 \text{ cm}, \quad h = 3,0 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l: \frac{1}{2} \lambda$	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14
$\frac{1}{2} \lambda$	456	513	596	665	727
β	0,47	0,49	0,52	0,54	0,55
β'	0,20	0,18	0,173	0,173	0,167

$$\varphi = 1,72.$$

Spule o, auf Weißbuchenkern.

$$f = 2,01, \quad n = 20, \quad h/2r = 0,70, \quad g/\delta' = 1,1.$$

$$l' = 185 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 393 \text{ cm}, \quad h = 2,0 \text{ cm}, \quad \delta' = 1 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l: \frac{1}{2}\lambda$	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14
$\frac{1}{2}\lambda$	440	504	589	661	728
β	0,42	0,44	0,47	0,50	0,52
β'	0,18	0,16	0,158	0,158	0,158

$$\varphi = 1,88.$$

Spule r, auf Weißbuchenkern.

$$f = 1,63, \quad n = 29, \quad h/2r = 1,02, \quad g/\delta' = 1,1.$$

$$l' = 268 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 438 \text{ cm}, \quad h = 3,0 \text{ cm}, \quad \delta' = 1 \text{ mm}$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l: \frac{1}{2}\lambda$	0,02	0,04	0,07	0,09	0,11
$\frac{1}{2}\lambda$	499	591	711	806	887
β	0,32	0,31	0,33	0,35	0,36
β'	0,14	0,11	0,109	0,109	0,110

$$\varphi = 1,92.$$

Spule q, auf Rotbuche.

$$f = 1,40, \quad n = 20, \quad h/2r = 1,28, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$l' = 201 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 282,5 \text{ cm}, \quad h = 4,1 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l: \frac{1}{2}\lambda$	0,03	0,07	0,11	0,14	0,16
$\frac{1}{2}\lambda$	321	382	475	541	610
β	0,49	0,48	0,46	0,50	0,50
β'	0,21	0,177	0,155	0,157	0,152

$$\varphi = 2,02.$$

Spule *g*, kernlos.

$f = 1,19$, $n = 54$, $h/2r = 1,96$, $g/\delta' = 1,1$.
 $l' = 451$ cm, $1/2 \lambda_0 = 549$ cm, $h = 5,7$ cm, $\delta' = 1$ mm.

l cm $l: 1/2 \lambda$	10	25	50	75
	0,02	0,03	0,05	0,07
$1/2 \lambda$	647	790	968	1077
β	0,20	0,19	0,20	0,23
β'	0,09	0,07	0,068	0,072

$$\varphi = 2,26. ^1)$$

Spule *s*, auf Weißbuchenkern.

$f = 1,14$, $n = 29$, $h/2r = 2,01$, $g/\delta' = 2,4$.
 $l' = 276$ cm, $1/2 \lambda_0 = 316$ cm, $h = 6,1$ cm, $\delta' = 0,9$ mm.

$$\delta = 1$$
 mm.

l cm $l: 1/2 \lambda$	10	25	50	75	100
	0,03	0,05	0,09	0,12	0,14
$1/2 \lambda$	366	446	550	630	701
β	0,39	0,36	0,37	0,39	0,41
β'	0,17	0,13	0,124	0,124	0,125

$$\varphi = 2,23.$$

Spule *i*, auf Eichenkern.

$f = 1,03$, $n = 36$, $h/2r = 2,49$, $g/\delta' = 2,4$.
 $l' = 340$ cm, $1/2 \lambda_0 = 363$ cm, $h = 7,5$ cm, $\delta' = 0,9$ mm.

$$\delta = 1$$
 mm.

l cm $l: 1/2 \lambda$	10	25	50	75	100
	0,02	0,05	0,08	0,11	0,13
$1/2 \lambda$	417	500	621	710	796
β	0,37	0,35	0,35	0,37	0,37
β'	0,16	0,13	0,116	0,116	0,112

$$\varphi = 2,45.$$

1) Hier ist auch der bei $l: 1/2 \lambda = 0,05$ beobachtete Wert von β' mit berücksichtigt, weil β' schon von $l: 1/2 \lambda = 0,03$ an konstant ist.

Spule f , auf Rotbuchenkern.

$$f = 1,10, \quad n = 83, \quad h/2r = 2,56, \quad g/\delta' = 1,2.$$

$$l' = 400 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 439 \text{ cm}, \quad h = 3,93 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,4 \text{ mm}.$$

	$\delta = 0,4 \text{ mm}$			$\delta = 1 \text{ mm}$			$\delta = 2 \text{ mm}$		
$l \text{ cm}$	10	25	50	10	25	50	10	25	50
$l : \frac{1}{2}\lambda$	0,02	0,03	0,06	0,02	0,03	0,05	0,02	0,03	0,05
$\frac{1}{2}\lambda$	550	705	889	572	741	942	603	785	993
β	0,18	0,17	0,18	0,14	0,14	0,15	0,11	0,12	0,13
β'	0,07	0,05	0,0514	0,06	0,05	0,051	0,06	0,05	0,049

$$\varphi = 2,43.$$

Spule t , auf Weißbuchenkern.

$$f = 0,84, \quad n = 60, \quad h/2r = 4,15, \quad g/\delta' = 1,4.$$

$$l' = 374 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 314 \text{ cm}, \quad h = 8,25 \text{ cm}, \quad \delta' = 1 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l : \frac{1}{2}\lambda$	0,03	0,05	0,08	0,10	0,12
$\frac{1}{2}\lambda$	389	491	630	731	825
β	0,26	0,25	0,25	0,27	0,27
β'	0,11	0,09	0,085	0,084	0,083

$$\varphi = 2,95.$$

$$f = 0,84, \quad n = 60, \quad h/2r = 4,28, \quad g/\delta' = 3,5.$$

$$l' = 363 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 307 \text{ cm}, \quad h = 8,25 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,4 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l : \frac{1}{2}\lambda$	0,03	0,05	0,08	0,10	0,12
$\frac{1}{2}\lambda$	379	489	627	730	821
β	0,27	0,24	0,25	0,26	0,27
β'	0,12	0,09	0,083	0,082	0,081

$$\varphi = 2,84.$$

Spule *b*, auf Weißbuchenkern.

$$f = 0,83, \quad n = 47, \quad h/2r = 4,74, \quad g/\delta' = 3,4.$$

$$l' = 451 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 374 \text{ cm}, \quad h = 14,5 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

$$\delta = 1 \text{ mm}.$$

$l \text{ cm}$	10	25	50	75	100
$l: \frac{1}{2}\lambda$	0,02	0,05	0,08	0,10	0,12
$\frac{1}{2}\lambda$	422	508	635	731	816
β	0,41	0,36	0,34	0,35	0,35
β'	0,18	0,13	0,112	0,109	0,107

$$\varphi = 2,84.$$

Spule *k*, auf Ebonitkern.

$$f = 0,79, \quad n = 65, \quad h/2r = 4,70, \quad g/\delta' = 2,4.$$

$$l' = 597 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 470 \text{ cm}, \quad h = 13,8 \text{ cm}, \quad \delta' = 0,9 \text{ mm}.$$

$$\varphi = 3,10.$$

Spule *l*, auf Weißbuchenkern.

$$f = 0,84, \quad n = 83, \quad h/2r = 4,70, \quad g/\delta' = 1,1.$$

$$l' = 489 \text{ cm}, \quad \frac{1}{2}\lambda_0 = 411 \text{ cm}, \quad h = 8,8 \text{ cm}, \quad \delta' = 1 \text{ mm}.$$

$$\varphi = 3,19.$$

Aus diesen Tabellen ergibt sich, daß φ außer von $h/2r$ nur sehr wenig von g/δ' abhängt, indem es mit abnehmenden g/δ' etwas größer wird. Indes ist diese Abhängigkeit nur bei

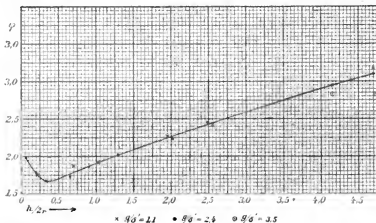


Fig. 3.

großem $h/2r$ ($h/2r > 4$) überhaupt bemerkbar. Dies geht noch deutlicher aus der graphischen Darstellung der Beobachtungswerte für φ hervor (vgl. Fig. 3).

Durch graphische Interpolation gewinnt man folgende Tabelle für φ :

Tabelle für φ .															
$h/2r$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	
φ	2,00	1,93	1,77	1,68	1,67	1,70	1,74	1,82	1,90	1,98	2,06	2,13	2,19	2,25	
bei $g/\delta' = 1,1$ bis 2,4															
$h/2r$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0								
φ	2,25	2,43	2,60	2,75	2,90	3,10	3,26	bei $g/\delta' = 1,1$							
bei $g/\delta' = 1,1$ bis 2,4					2,90	3,04	3,17	„ $g/\delta' = 2,4$							
					2,85	2,85	2,85	„ $g/\delta' = 3,5$							

Aus dieser Tabelle berechnet sich also der Durchlaß-index β nach der Formel

$$(16) \quad \beta = \text{brigglog } l/\rho \cdot \frac{f}{n} \sqrt{h/2r} \cdot \varphi$$

und daraus die Eigenwellenlänge λ nach Formel (12)

$$(12) \quad \text{tg } \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} \text{tg } 2\pi \frac{l}{\lambda} = \beta,$$

wobei nach (15) ist:

$$(15) \quad \frac{1}{2} \lambda_0 = f \cdot l.$$

l' bedeutet die Spulendrahtlänge, l die Länge einer Antenne, ρ ihren Radius (halbe Dicke). n ist Windungszahl der Spule, h die Spulenhöhe, g die Ganghöhe, $2r$ der Spulendurchmesser. f ist aus den Tabellen Ann. d. Phys. 9. p. 322 u. 323. 1902 zu entnehmen.¹⁾ Dort bedeutet δ die Spulendrahtdicke, hier ist dafür δ' geschrieben.

II. Spulen mit angehängten Käfigantennen.

Die Antennen der Erreger bei der drahtlosen Telegraphie bestehen oft aus einem System mehrerer paralleler oder konisch angeordneter Drähte. Da diese die Gestalt eines Drahtkäfigs besitzen, so will ich sie kurz als Käfigantennen bezeichnen.²⁾

Es ist von vornherein zu erwarten, daß diese Käfigantennen so wirken werden, wie eine Einfachantenne aus einem Drahte,

1) Die Werte von f bei den hier benutzten Spulen weichen in einigen Fällen etwas von den dort angegebenen (normalen) Werten ab, weil die hier benutzten Spulen zum Teil Siegelackklümpchen zur Drahtbefestigung trugen.

2) Vielleicht empfiehlt sich auch die Bezeichnung: *Vielfachantenne*, im Gegensatz zur *Einfachantenne*. Ich weiß nicht, ob bisher ein Name eingeführt ist. Man könnte auch von *geschlossenen* und *offenen* Vielfachantennen sprechen, je nachdem die Drahtenden eine geschlossene Kurve (bei den Käfigantennen), oder eine offene, z. B. gerade Linie bilden.

dessen Radius $\bar{\rho}$ jedenfalls größer ist, als der Radius der Einzeldrähte der Käfigantennen. Der äquivalente Radius $\bar{\rho}$ der Käfigantenne muß wesentlich durch den mittleren Querschnitt des Drahtkäfigs bestimmt sein, etwas auch durch Anzahl und Dicke der zu dem Käfig verwendeten Drähte. Im folgenden beschreibe ich Versuche, aus denen der Äquivalentradius $\bar{\rho}$ der Käfigantenne hervorgeht.

1. *Käfigantennen, zylindrisch angeordnet.* Die Käfigantenne bestand aus sechs straff gespannten, 1 mm dicken, blanken Kupferdrähten von je 25 cm Länge. An einem Ende waren dieselben zusammengelötet und zu einer Öse umgebogen, welche am das freie Ende der Spule a (vgl. oben p. 972) gelegt wurde. Von da an bildeten die sechs Drähte auf 5 cm Länge einen Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis von 1 cm Radius war. Dieser Kreis wurde aus einer dünnen Holzplatte gebildet, in deren Rand in gleichen Abständen sechs kleine Rillen eingefeuert waren, in welche die Drähte eingeklemmt wurden. Von da an bildete auf 20 cm Länge die Käfigantenne einen Kreis-zylinder vom Radius $R = 1$ cm, an dessen Ende wiederum eine dünne Holzplatte mit sechs Rillen zur Aufnahme der Drähte sich befand. Zwei solcher, ganz gleich gebaueter Antennen wurden an die beiden Spulenenden angelegt, so daß die Achsen beider Käfigantennen in eine Linie (Vertikale) fielen.

Diese Antenne lieferte $\frac{1}{2}\lambda = 550$ cm, während die freie Wellenlänge (ohne Antennen) $\frac{1}{2}\lambda_0 = 373$ cm betrug.

Nach p. 972 ergibt sich also bei der Antennenlänge $l = 25$ cm für die Spule a folgendes Resultat¹⁾:

Spule a , $l = 25$ cm.

$\frac{1}{2}\lambda_0 = 373$ cm.

	Einfachantennen. Drahtdicke δ				Zylinder- Käfigantenne $R = 10$ mm
	$\delta = 0,4$ mm	$\delta = 1$ mm	$\delta = 2$ mm	$\delta = 3$ mm	
$\frac{1}{2}\lambda$	453 cm	467 cm	478 cm	489 cm	550 cm
β	0,615	0,518	0,461	0,413	0,260
$\log l/\varrho$	3,10	2,70	2,40	2,22	—
$\beta' = \beta : \log l/\varrho$	0,198	0,192	0,192	0,186	—

1) Dasselbe wurde noch ergänzt durch eine Beobachtung mit einer Antenne von 3 mm dickem Draht.

Nimmt man also als Mittelwert für β' an 0,192, so berechnet sich das der Käfigantenne äquivalente $\bar{\rho}$ aus

$$\beta : \log l / \bar{\rho} = 0,192, \quad \text{d. h.} \quad \log 25 / \bar{\rho} = \frac{0,260}{0,192} = 1,352,$$

$$\text{d. h. } 25 : \bar{\rho} = 22,5 \text{ oder } \bar{\rho} = 11 \text{ mm.}$$

Diese Käfigantenne wirkt also wie eine Einfachantenne, deren Draht $\bar{\rho} = 11$ mm Radius hat.

Dieselbe Antenne wurde bei der Spule *b* (vgl. oben p. 977) verwendet. Es ergab sich $\frac{1}{2} \lambda = 624$ cm. Da $\frac{1}{2} \lambda_0 = 374$ cm, so ergibt sich nach (12) $\beta = 0,174$. Für Einfachantenne von $\delta = 1$ mm ergab sich $\frac{1}{2} \lambda = 508$ cm, d. h. $\beta = 0,355$, $\beta' = 0,135$. Legt man diesen Wert von β' auch für die Käfigantenne zu Grunde, so folgt für sie $\log l / \bar{\rho} = 0,174 : 0,135 = 1,288$, d. h. $\bar{\rho} = 12,9$ mm. Daß dieser Wert etwas größer als der bei Spule *a* erhaltene $\bar{\rho} = 11$ mm ist, liegt wohl wesentlich daran, daß Spule *a* wegen ihres größeren Radius *r* einen stärkeren elektrostatischen Schutz¹⁾ auf die (noch verhältnismäßig kurze) Antenne ausübt, als Spule *b*. In Anbetracht des geringen Einflusses, den Änderungen von ρ auf die Wellenlänge λ besitzen, kann man für praktische Berechnungen der Wellenlänge λ für beide Spulen *a* und *b* mit dem Mittelwerte $\bar{\rho} = 12$ mm rechnen²⁾, d. h. *der Äquivalentradius $\bar{\rho}$ einer Käfigantenne ist von der Spule, an welche die Antenne angeheftet ist, praktisch (d. h. annähernd) unabhängig.*

Eine ebenso konstruierte Zylinder-Käfigantenne der Länge $l = 50$ cm mit vier, bzw. acht Drähten und dem Zylinderradius $R = 1$ cm ergab bei der Spule *b* (vgl. oben p. 977) folgendes Resultat:

Spule *b*, $l = 50$ cm.

$\frac{1}{2} \lambda_0 = 374$ cm.

	Einfachantenne $\delta = 1$ mm	Zylinder-Käfigantennen $R = 10$ mm	
		4 Drähte	8 Drähte
$\frac{1}{2} \lambda$	635	795	822
β	0,335	0,183	0,167
β'	0,112	$\bar{\rho} = 11,6$ mm	$\bar{\rho} = 16,2$ mm

1) Vgl. oben p. 961.

2) Selbst wenn man $\bar{\rho} = 10$ mm annimmt, so würde λ nur um $3\frac{1}{2}$ Proz. anders berechnet werden, als mit der Annahme $\bar{\rho} = 13$ mm.

Man bemerkt deutlich den Einfluß der dichterem Drahtführung (bei acht Drähten) im Vergleich zur Antenne mit vier Drähten, indem bei ersterer die Wellenlänge und der Äquivalentradius $\bar{\rho}$ größer werden, als bei letzterer. In die hier erhaltenen Werte von $\bar{\rho}$ ordnet sich gut ein der bei Spule b mit der Zylinderantenne von sechs Drähten oder Länge $l = 25$ cm erhaltene Wert $\bar{\rho} = 12,9$ mm. *Der Äquivalentradius der Zylinder-Käfigantenne ist also unabhängig von der Antennenlänge l .* Die Abhängigkeit des $\bar{\rho}$ von der Anzahl \mathfrak{N} der Antennendrähte ist in folgender Tabelle noch einmal zusammengestellt.

Zylinder-Käfigantennen. $R = 10$ mm.

\mathfrak{N}	4	6	8
$\bar{\rho}$	11,6 mm	12,9 mm	16,2 mm

2. *Käfigantennen, konisch angeordnet.* Die Drähte der Antennen waren an einem (an das Spulende gelegtem) Ende verlötet, am anderen Ende waren sie in kleine in gleichen Abständen angebrachte Rillen einer dünnen Holzplatte vom Radius R eingeklemmt, so daß die Drähte der Antennen auf einem geraden Kreiskegel lagen, dessen Grundkreis den Radius R besaß. Die Drähte der Antennen waren 1 mm dicke, gut geradlinig verlaufende Kupferdrähte.

Folgende Tabellen enthalten die Resultate, \mathfrak{N} ist die Anzahl der Drähte der Käfigantenne.

Spule a , $\frac{1}{2} \lambda_0 = 373$ cm.

	$l = 25$ cm			$l = 50$ cm		
	$R = 1$ cm		$R = 3,75$ cm	$R = 3,75$ cm		
	$\mathfrak{N} = 6$	$\mathfrak{N} = 8$		$\mathfrak{N} = 4$	$\mathfrak{N} = 6$	$\mathfrak{N} = 8$
$\frac{1}{2} \lambda$ cm	527	595	612	688	714	737
β	0,304	0,200	0,184	0,264	0,239	0,220
$\bar{\rho}$ cm	0,65	2,27	2,75	1,95	2,64	3,33

Spule *b*, $\frac{1}{2} \lambda_0 = 374$ cm.

	<i>l</i> = 25 cm	<i>l</i> = 50 cm		
	<i>R</i> = 3,75 cm	<i>R</i> = 3,75 cm		
	$\mathfrak{N} = 8$	$\mathfrak{N} = 4$	$\mathfrak{N} = 6$	$\mathfrak{N} = 8$
$\frac{1}{2} \lambda$	708	841	878	909
β	0,121	0,158	0,143	0,132
$\bar{\varrho}$ cm	3,18	1,94	2,64	3,31

Bei der Berechnung des $\bar{\varrho}$ bei $l = 50$ und der Spule *b* ist der aus p. 977 folgende Wert bei $l = 50$ $\beta = 0,112$ benutzt; wenn der Mittelwert $\beta = 0,109$, der sich aus $l = 50, 75, 100$ ergibt, benutzt wäre, so würde $\bar{\varrho}$ etwas, aber nicht bedeutend, kleiner ausgefallen sein (vgl. unten Anm.).

Aus diesen Tabellen ergibt sich, daß auch bei konischen Käfigantennen der Äquivalentradius von der angewendeten Spule und annähernd von der Antennenlänge unabhängig ist.¹⁾ Mit Vergrößerung der Anzahl \mathfrak{N} der Drähte nimmt $\bar{\varrho}$ etwa im gleichen Verhältnis zu, wie bei den Zylinderantennen (vgl. letzte Tabelle und Tabelle auf p. 981).

Wie zu erwarten war, ist der Äquivalentradius der konischen Käfigantennen kleiner, als der der zylindrischen Käfigantennen bei gleichem *R*, ersterer ist halb so groß. Denn für $l = 25$ cm, $R = 1$ cm und $\mathfrak{N} = 6$ ergibt die konische Antenne $\bar{\varrho} = 6,5$ mm, die Zylinderantenne $\bar{\varrho} = 11$ mm bez. 12,9 mm.

Mit zunehmendem \mathfrak{N} , d. h. wachsender Drahtdichte, scheint nach den Beobachtungen $\bar{\varrho}$ bei Kegel-Käfigantennen gleich dem Radius *R* des Kegelgrundkreises zu werden, für Zylinder-Käfigantennen müßte also bei genügend großem \mathfrak{N} $\bar{\varrho}$ dem Werte $2R$ sich nähern. Wenn aber \mathfrak{N} sehr groß ist, so daß schließlich die Drähte der Käfigantennen sich berühren, so muß eine Zylinderantenne offenbar so wirken, als ob sie ein solider

1) Der Vergleich der Zahlen bei Spule *a* und $\mathfrak{N} = 8$, bei $l = 25$ und $l = 50$, nämlich $\bar{\varrho} = 2,75$ und $\bar{\varrho} = 3,33$ spricht ja anscheinend für ein Wachsen von $\bar{\varrho}$ mit wachsendem *l*. Bei Spule *b* ergeben aber die Zahlen $\bar{\varrho} = 3,18$ und $\bar{\varrho} = 3,31$ nur ein unbedeutendes Wachsen mit zunehmendem *l*, ja sogar eine Abnahme, wenn man die letzte Zahl $\bar{\varrho}$ mit dem Mittelwert $\beta = 0,109$ berechnet hätte (vgl. oben im Text). Dann würde man nämlich $\bar{\varrho} = 3,09$ anstatt $\bar{\varrho} = 3,31$ gefunden haben.

Draht vom Radius $\bar{\rho} = R$ wäre. Hiernach würde sich das Resultat ergeben, daß mit wachsendem \mathfrak{A} bei konstantem R der Wert von $\bar{\rho}$ wieder abnehmen würde. Ich halte dies indes nicht für wahrscheinlich, glaube vielmehr, daß bei dickeren Antennen die bei dünneren Antennen gerechtfertigte Annahme: $\beta' = \beta : \log l/\rho = \text{konst.}$ nicht mehr genau zutrifft.

Ich habe diese Fragen nicht genauer untersucht, weil sie für die Praxis, wo $l:\bar{\rho}$ meist viel größere Werte hat, als bei diesen Versuchen, zur Berechnung der Wellenlänge sehr wenig Einfluß haben. Jedenfalls kann man sagen:

Käfigantennen sind ein Ersatz für sehr dicke Einfachantennen und bieten dabei den Vorteil großer Gewichtersparnis. Daß die Anwendung dicker, d. h. auch Käfig-Antennen für die drahtlose Telegraphie zweckmäßig sein muß, werden wir weiter unten erörtern.

Für einigermassen dichte Anordnung der Drähte der Käfigantenne wirkt die Zylinderantenne wie eine Einfach-Drahtantenne, deren Drahtradius nur wenig kleiner, als der Durchmesser der Zylinderantenne ist; die Kegelantenne wie eine Einfach-Drahtantenne, deren Drahtradius nur wenig kleiner als der Radius des Grundkreises der Kegelantenne ist.

3. *Inhomogene Antennen.* An die Spule b wurden zunächst zwei Einfach-Drahtantennen der Länge $l = 25$ cm und $\delta = 1$ mm angelegt. An das Ende der Antennendrähte wurden dann zwei Zylinderantennen von $R = 1$ cm und $\mathfrak{A} = 6$ angelegt. Es ergab sich $\frac{1}{2}\lambda = 751$, d. h. $\beta = 0,211$. Da nach p. 977 für eine Einfachantenne bei Spule b und $l = 50$ $\beta' = 0,112$ ist, so folgt $\log l/\bar{\rho} = 1,882$, d. h. $\bar{\rho} = 6,6$ mm. Es ist also, wie zu erwarten war, $\bar{\rho}$ etwa nur halb so groß, als wenn eine homogene Antenne angewendet wird, welche auf der ganzen Länge $l = 50$ cm einen Zylinder mit dem Radius $R = 1$ cm bildet.

Das Leuchten der Vakuumröhre am Ende der inhomogenen Antenne ist deutlich etwas schwächer als am Ende einer gleich langen homogenen Antenne. *Inhomogene Antennen werden also für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie nicht so günstig sein als homogene Antennen.* Der Grund liegt darin, daß an jeder Stelle, an welcher die Beschaffenheit einer Antenne sich plötzlich ändert, Reflexion der elektrischen Wellen einsetzen muß.

Wenn der Ort der Zylinderantenne und der Einfachantenne gegenseitig vertauscht wurde, d. h. wenn an die Spule b direkt die Zylinderantenne angelegt wurde, und dann an das Ende eines ihrer Drähte die Einfachantenne, so ergab sich dasselbe $\frac{1}{2}\lambda = 751$.

Die gewonnenen Resultate kann man also zusammenfassen in dem Satze: *Eine zylindrisch oder konisch gestaltete Käfigantenne oder eine inhomogene Antenne (teils aus Einfach- teils aus Vielfachdrähten bestehend) wirkt annähernd so, wie eine Einfachantenne aus einem Drahte, dessen Radius $\bar{\rho}$ gleich dem Radius (bei wenig Drähten) bez. dem Durchmesser (bei viel Drähten) des für die ganze Länge der Antenne geltenden mittleren Querschnittes ist.* (Dabei ist der Querschnitt als Kreisfläche zu berechnen, auch wenn er es in Wirklichkeit nicht ist.)

III. Ersatz der einen Antennenhälfte durch eine an die Spule angelegte Kapazität (Metallplatte).

1. *Theorie.* Wir legen wiederum den Anfang der z -Achse $z = 0$ in die Mitte der Spule (vgl. Fig. 4), welche sich von $z = -a$ bis $z = +a$ erstrecken soll. Bei $z = +a$ sei eine Einfach-Drahtantenne der Länge l , des Radius ρ angeschlossen, bei $z = -a$ sei zunächst eine Einfach-Drahtantenne der Länge l' , des Radius ρ angeschlossen, und daran eine Kapazität C , welche dem auf der anderen Seite der Spule angehängten Antennenstück der Länge $l - l'$ das elektrische Gleichgewicht hält, d. h. ebenso wirkt, wie ein Antennenstück der Länge $l - l'$ und des Radius ρ . Es soll C berechnet werden.

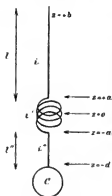


Fig. 4.

Der in der Überschrift genannte wichtigste Spezialfall entspricht dem Werte $l' = 0$.

Die Stromstärke i'' in der unteren Antenne setzen wir

$$(23) \quad i'' = A'' \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{b + \pi}{\lambda}.$$

Diese Formel entspricht der Formel (2) auf p. 958, da i'' identisch mit i' sein muß, abgesehen von dem Unterschiede des

Vorzeichens in z , da für $z = -b$ ein Stromknoten eintreten müßte (falls die untere Antenne bis zur Länge $z = -b$ reichen würde).

Daher ergibt sich aus (23), (3) und (4) für das Potential V'' auf der unteren Antenne:

$$(24) \quad V'' = + \frac{A''}{\mathfrak{E}} \frac{T}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{b+z}{\lambda}.$$

Für $z = -d$ muß nun die Stromstärke i'' gleich sein der Ladungsabnahme der Kapazität C in der Zeiteinheit, d. h.

$$(25) \quad i'' = - \frac{\partial e''}{\partial t} \text{ für } z = -d.$$

Nun ist aber für $z = -d$:

$$(26) \quad e'' = C \cdot V'',$$

da bei $z = -d$ das Potential V'' auf der Antenne gleich sein muß dem Potential der an sie gehefteten Metallplatte. Daher ergibt (25) und (26):

$$(27) \quad i'' = - C \frac{\partial V''}{\partial t} \text{ für } z = -d,$$

d. h. nach (23) und (27):

$$(28) \quad \sin 2\pi \frac{b-d}{\lambda} = \frac{2\pi C}{\lambda \mathfrak{E}} \cos 2\pi \frac{b-d}{\lambda},$$

d. h.

$$(29) \quad C = \frac{\lambda \mathfrak{E}}{2\pi} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l-l'}{\lambda}.$$

Wenn $l-l':\lambda$ genügend klein ist, so wird

$$(30) \quad C = \mathfrak{E}(l-l'),$$

d. h. die äquivalente Kapazität C ist gleich der Kapazität des Antennenstückes, der sie das elektrische Gleichgewicht halten soll. Dieser Satz ist ja für kurze Antennenstücke von vornherein einleuchtend. Die Formel (29) erlaubt also, die Korrektur an der Formel (30) für längere Antennenstücke anzubringen. Da für kleine $l-l'/\lambda$ zu setzen ist

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l-l'}{\lambda} = 2\pi \frac{l-l'}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{3} \left(2\pi \frac{l-l'}{\lambda} \right)^2 \right),$$

so wird nach (29):

$$(31) \quad C = \mathfrak{E}(l-l') \left(1 + \frac{1}{3} \left(2\pi \frac{l-l'}{\lambda} \right)^2 \right).$$

In dieser Formel braucht λ nur annähernd bekannt zu sein. Der Wert $\frac{1}{2} (2\pi(l-l')/\lambda)^2$ muß klein gegen 1 sein, sonst ist Formel (29) zu benutzen.

Für die Kapazität \mathcal{C} der Längeneinheit der Antenne können wir mindestens mit einer gewissen Annäherung Formel (13) auf p. 961 benutzen. Wir wollen aber, da jene Formel aus den oben p. 961 angeführten Gründen hier nicht streng gelten kann, die Formel verallgemeinern in

$$(32) \quad \mathcal{C} = \frac{\alpha}{2 \log_{\text{nat}} l/\varrho} = \frac{0,217 \cdot \alpha}{\log_{\text{vulg}} l/\varrho},$$

wobei α einen Faktor bedeutet, den wir aus den Versuchen selbst bestimmen wollen und der annähernd gleich 1 sein muß.

Nach (31) und (32) ist also die äquivalente Kapazität C in elektrostatischem Maß:

$$(33) \quad C = \frac{0,217 \cdot \alpha}{\lg_{\text{vulg}} l/\varrho} (l-l') \left(1 + \frac{1}{2} \left(2\pi \frac{l-l'}{\lambda} \right)^2 \right).$$

Verwendet man als Kapazität C eine Kugel, so ist

$$(34) \quad C = R \text{ (Kugelradius).}$$

Für eine dünne Kreisscheibe vom Radius R und der Dicke D ist¹⁾

$$(35) \quad C = \frac{2R}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \frac{D}{R} \right).$$

Aber auch diese Formeln für C gelten streng nur für eine Scheibe bez. Kugel, von der andere Leiter sehr weit entfernt sind. Es ist also von vornherein möglich, daß, wenn wir (35) für die Formel (33) verwenden, dann α etwas verschiedene Werte annehmen kann.

Da durch besondere Versuche festgestellt wurde (vgl. weiter unten), daß mit großer Annäherung quadratische Metallscheiben ebenso wirken, wie Kreisscheiben von gleichem Flächeninhalt, so kann man (35) also auch zur Kapazitätsberechnung einer Quadratscheibe benutzen.

1) Vgl. Mathieu, l. c. in Anm. 1 p. 961. dieser Arbeit.

2. *Versuche.* Als Kapazitäten C wurden verwendet:

1. Eine Messingkugel vom Radius $R = 2,78$ cm.

$$C_1 = 2,78 \text{ cm.}$$

2. Eine Aluminiumkreisscheibe ¹⁾ vom Durchmesser $2R = 8,3$ cm, Dicke $D = 0,5$ mm.

$$C_2 = 2,65 \text{ cm.}$$

3. Eine Aluminiumkreisscheibe $2R = 15,0$ cm, $D = 0,5$ mm.

$$C_3 = 4,78 \text{ cm.}$$

4. Eine Aluminiumkreisscheibe $2R = 20,0$ cm, $D = 0,5$ mm.

$$C_4 = 6,36 \text{ cm.}$$

Die C sind nach (34) berechnet.

Wenn der Faktor α in Formel (33) eine absolute Konstante ist, so sollte die Äquivalentlänge $l - l'$ einer bestimmten Kapazität C nahezu unabhängig von l' sein; wegen des Nenners $\log l/\rho$ sollte sie nur ganz wenig mit wachsendem l' zunehmen. Die Versuche zeigen nun aber, daß bei sehr kleinem l' die Äquivalentlänge $l - l'$ größer ist, als bei größerem l' , daß aber von einem gewissen Werte l' an die Äquivalentlänge $l - l'$ konstant ist. Für sehr kleine l' (z. B. $l' = 1$ cm) hängt die Wirkung der Kapazität C auch von der Lage zur Spule ab, z. B. bei Kreisscheiben. Für größere l' tritt diese Komplikation nicht mehr auf. Wenn nämlich bei kleinem l' die Scheibe mit ihrer Fläche senkrecht gegen die Spulenachse gestellt wird, und zwar so, daß sie sich möglichst dem Endquerschnitt der Spule nähert, so ergibt sich eine kleinere Eigenwellenlänge λ , als wenn die Scheibe parallel zur Spulenachse verläuft. Ihre Orientierung in letzterem Falle, ob parallel oder senkrecht zu einem Spulenradius, ist für λ ohne Einfluß.

Der Grund dieser Erscheinung ist in den durch die magnetischen Kraftlinien der Spule in der Scheibe erzeugten Wirbelströmen zu suchen, welche die Selbstinduktion der ganzen Anordnung verkleinern, während durch die Annäherung der Scheibe an die Spule die Kapazität etwas gewachsen sein muß. Aus letzterem Grunde hätte also λ sich bei Annäherung der Scheibe vergrößern müssen.

1) Das Material hat keinen Einfluß. Eine Kupferscheibe desselben $2R$ ergab die gleiche Wirkung.

Dieser Einfluß der Wirbelströme ist schon deutlich zu konstatieren, wenn bei einer isolierten Spule ohne Antennen eine Metallscheibe dem Endquerschnitt der Spule genähert, und etwa 1—2 cm parallel zu ihm isoliert über der Spule aufgestellt wird. Dadurch wird die Eigenwellenlänge λ der Spule bedeutend verkleinert. Das Material der Scheibe (ob Kupfer oder Aluminium) ist ohne Einfluß.¹⁾ Die Intensität der elektrischen Schwingungen, welche in der Spule durch Resonanz vom Erreger induziert wurden, ist etwas kleiner als ohne Scheibe. Dieser Einfluß der Wirbelströme macht sich auch geltend, wenn die Metallkugel als Kapazität C verwendet wird und sie dem Spulenendquerschnitt stark genähert wird.

Bei den folgenden Versuchen ist an dem oberen Spulende ein Antennendraht der Länge l' und eine Kapazität (C_1, C_2, C_3, C_4 , Scheibe oder Kugel) befestigt, vertikal hängend an einem Faden. Wirbelströme waren bei dieser (vertikalen) Lage der Scheiben ausgeschlossen; bei der Kugel höchstens bei $l' = 1$ cm von schwachem Einfluß. Am unteren Spulende ist ein vertikal frei herabhängender Draht eingehängt, dessen Länge l so abgeglichen wurde, daß das System (Spule + Antennen) dasselbe λ besaß, als wenn die obere Antenne ebenfalls durch eine Einfachdrahtantenne der Länge l ersetzt war. Es wurde mit mehreren Spulen operiert, um $h/2r, g/\delta', \lambda$ zu variieren. Die Beschaffenheit der Spulen ist aus den Köpfen der früheren Tabellen zu ersehen (vgl. p. 970 bis 977). Folgende Tabelle enthält die Resultate:

Kugel. $C_1 = 2,78$ cm.

Antennendicke $\delta = 1$ mm, d. h. $\varrho = \frac{1}{2}$ mm.

Spule	m	a	p		t	b
$h/2r$	0,20	0,33	0,65	0,65	4,15	4,74
l'' cm	1	1	1	17	1	1
$l-l''$ cm	30	31	30,5	31	32	26
$\frac{1}{2}\lambda$ cm ²⁾	790	490	540	600	550	510
α	1,18	1,15	1,16	1,21	1,11	1,34

1) Dies hängt mit dem Zusammendrängen der Strömung an die Metalloberfläche bei genügend schnellen Wechseln zusammen.

2) Die Werte von $\frac{1}{2}\lambda$ sind nur roh angegeben, weil dies für Formel (33) genügt.

Kreisscheibe. $C_3 = 2,65$ cm.

Spule	m					a					b				
δ mm	1	1	1	1	1	1	0,4	0,4	2	2	1	1	1	1	1
l' cm	1	9	26	1	9	24,5	1	9	1	24	1	9	25		
$l - l'$ cm	31	29	29	32	29,5	30,5	39	37,5	26	26	28	29	30		
$\frac{1}{2} \lambda$ cm	790	820	880	490	510	555	500	510	485	560	530	570	655		
α	1,10	1,21	1,28	1,06	1,18	1,20	1,01	1,08	1,13	1,25	1,20	1,20	1,22		

Kreisscheibe. $C_3 = 4,78$ cm.Antennendicke $\delta = 1$ mm.

Spule	m			a			p			t			b		
l'' cm	1	9	40	1	12	41	1	9	40	1	9	17	42	1	6
$l - l''$ cm	66	65	61	69	63	59	71	65	58	65	63	60	58	59	59
$\frac{1}{2} \lambda$ cm	900	945	1000	600	610	670	660	665	727	685	720	735	825	675	690
α	1,02	1,05	1,17	0,97	1,07	1,20	0,94	1,04	1,22	1,02	1,07	1,14	1,23	1,12	1,13

Kreisscheibe. $C_4 = 6,36$ cm.Antennendicke $\delta = 1$ mm.

Spule	m			a			p			t			b		
l'' cm	1	9	1	9	1	9	9	17	1	9	1	9	18		
$l - l''$ cm	99	95	99	91	95	91	88	101	91	89	82	82			
$\frac{1}{2} \lambda$ cm	1000	1010	670	670	715	727	740	830	825	780	782	816			
α	0,95	1,00	0,91	1,00	0,95	1,00	1,06	0,92	1,03	1,04	1,13	1,14			

Quadratische Scheiben, die der Spulenachse parallel (d. h. also vertikal) als Antennen aufgehängt wurden, wirken genau so, wie gleich große Kreisscheiben. Dies wurde an zwei verschiedenen Quadratscheiben (Seitenlänge 13,3 cm bez. 17,7 cm) bei verschiedenen l' ($l' = 1$ cm bez. 17 cm) konstatiert. Dabei ist es auch gleichgültig, ob die Spitze des Quadrats an den Draht l' angelegt ist, oder ob l' an die Mitte einer Quadratseite angelegt wird.²⁾

1) Derselbe Wert ($\alpha = 0,90$) ergab sich auch, wenn eine Zylinderantenne $R = 1$ cm ($\bar{q} = 16$ mm, vgl. oben p. 979) angelegt wurde.

2) Die Anlegung erfolgte einfach durch ein kleines Stückchen Klebwachs.

Aus den Tabellen ergibt sich, daß der Faktor α von der angewendeten Spule und der Antennendicke δ unabhängig ist.¹⁾ Dagegen wächst bei bestimmten C der Faktor α etwas mit wachsendem l' . Ferner wird α mit wachsendem C kleiner. Für eine Kugel ist α etwas größer, als für eine Scheibe bei gleichem C (durch Einfluß der Wirbelströme); bei genügend großem l' , bei welchem der Einfluß der Wirbelströme verschwindet, ist α für Kugel und Scheibe gleich.

Für die Verhältnisse der Praxis kommen die ganz kurzen Entfernungen l' , die (der hier gewählten Anordnung geometrisch ähnlich) der Entfernung $l' = 1$ cm entsprechen, weniger in Betracht. $l' = 9$ cm und die größeren C dürften am meisten den Verhältnissen der Praxis entsprechen.

Wir können dann $\alpha = 1$ setzen, erhalten also die Formel, die direkt aus den Kapazitätsformeln eines Drahtes bez. einer Kreisscheibe abzuleiten ist:

$$(36) \quad C = \frac{0,217}{\log \text{vulg } l/\rho} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l-l'}{\lambda}$$

bez. bei kleinem $l-l':\lambda$:

$$(37) \quad C = \frac{0,217}{\log \text{vulg } l/\rho} (l-l') \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(2\pi \frac{l-l'}{\lambda} \right)^2 \right\};$$

dabei ist für eine dünne Scheibe der Oberfläche S (unabhängig von der Gestalt der Scheibe, sofern sie sich nicht zu sehr von quadratischer oder Kreisgestalt entfernt):

$$(38) \quad C = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Die Oberfläche S einer Metallplatte, welche einer Länge $l-l'$ eines Antennendrahtes des Radius ρ das elektrische Gleichgewicht hält, bestimmt sie also aus:

$$(36) \quad \sqrt{S} = \frac{0,603}{\log \text{vulg } l/\rho} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l-l'}{\lambda}$$

$$(37) \quad \sqrt{S} = \frac{0,603}{\log \text{vulg } l/\rho} (l-l') \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(2\pi \frac{l-l'}{\lambda} \right)^2 \right\}.$$

1) Nur für die Spule b hat sich α immer etwas größer ergeben, als für die anderen Spulen. — Bei C_2 wächst scheinbar für Spule a der Faktor α mit wachsendem δ , dagegen ist bei C_4 selbst bei der Zylinderantenne α ebenso groß, wie bei $\delta = 1$ mm.

Bei kleinem l' ist darauf zu achten, daß die Platte nicht so liegt, daß die magnetischen Kraftlinien der Spule Wirbelströme in der Platte induzieren können. Bei größerem l' soll die Platte S nicht durch Aufwärtsbiegen von l' der Drahtantenne l stark genähert werden.¹⁾ Sonst kommt es auf die Lage von S nicht an.

Wenn nur ein Antennendraht an ein Spulenende angelegt wurde, so zeigte im Resonanzfalle die Vakuumröhre an dem anderen freien Spulenende starkes Leuchten, am Antennendraht und Antennenende aber nur sehr schwaches Leuchten. *Man darf also jedenfalls bei der drahtlosen Telegraphie nicht mit einer Spule als Erreger arbeiten, die nur an einem Ende eine Antenne trägt, ohne ausbalanzierende Gegenkapazität am anderen Ende.²⁾*

IV. Übergang und Reflexion elektrischer Wellen an der Grenze Spule—Draht.

Wir wollen zunächst Spule und Draht nur einseitig begrenzt annehmen, d. h. nur das Ende berücksichtigen, an dem Spule und Draht zusammenstoßen. Dieses Ende liege bei $z = 0$. Für negative z , d. h. in der Spule, ist dann zu setzen

$$(39) \quad i = A_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda'} \right) + A_2' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda'} \right),$$

für positive z , d. h. im Drahte, ist zu setzen

$$(40) \quad i = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) + A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right).$$

Die Indizes 1 beziehen sich auf die nach der $(+z)$ -Richtung fortgepflanzten Wellen, die Indizes 2 auf die nach der $(-z)$ -

1) Dadurch wird natürlich λ größer. In praxi ist ein solcher Einfluß nicht zu befürchten. Er ist überhaupt sehr gering. Wenn z. B. C_2 und $l'' = 17$ cm, $l = 50$ cm bei Spule p angewendet wurde, so wurde λ um $\frac{1}{2}$ Proz. größer, wenn l'' horizontal (anstatt vertikal) lag, um 5 Proz. größer, wenn l'' aufwärts gebogen und dem l auf 10 cm Abstand genähert wurde.

2) Diese von Braun eingeführte Gegenkapazität ist nicht nur für intensive Wellenerregung und -Strahlung wichtig, sondern schafft auch im Gegensatz zu dem von Slaby angewandten Erdschluß des anderen Spulenendes erst definierte Verhältnisse, bei denen man überhaupt von einer bestimmten Eigenperiode der induzierten Spule + Antenne sprechen kann. Denn wie schon Braun hervorgehoben hat, sind für schnelle elektrische Schwingungen die elektrischen Eigenschaften des Erdschlusses nach dem Bodenmaterial verschieden, auch wenn er feucht ist und der Erdschluß durch große Platten vermittelt wird.

Richtung fortgepflanzten Wellen. Nach den Gleichungen (3) und (4) p. 959 ist

$$(41) \quad V' = \frac{T}{\mathfrak{U}'\lambda'} \left(A_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda'} \right) - A_2' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda'} \right) \right),$$

$$(42) \quad V = \frac{T}{\mathfrak{U}\lambda} \left(A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) - A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right) \right).$$

Für $z = 0$ muß $i = i'$, $V = V'$ sein. Dies liefert die Bedingungen:

$$(43) \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = A_1' + A_2' \\ \beta(A_1 - A_2) = A_1' - A_2', \end{cases}$$

wobei (10)

$$\beta = \frac{\mathfrak{U}'\lambda'}{\mathfrak{U}\lambda} = \frac{\mathfrak{U}'c'}{\mathfrak{U}c}$$

den Durchlaßindex bezeichnet.

Fallen die Wellen im Draht ein (A_e) gegen eine (unendlich lang gedachte) Spule, so wird ein Teil A_r an der Spule reflektiert (verbleibt also im Drahte), ein Teil geht auf die Spule über (A_d). Es ist in diesem Falle zu setzen:

$$(44) \quad A_1 = A_r, \quad A_2 = A_e, \quad A_1' = 0, \quad A_2' = A_d'.$$

Daher ergibt (43):

$$(45) \quad \frac{A_r}{A_e} = -\frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \frac{A_d'}{A_e} = \frac{2\beta}{1+\beta}.$$

Wenn der Durchlaßindex β klein ist, so wird die im Draht einfallende Stromwelle fast total (mit Umkehr der Stromrichtung) an der Spule reflektiert, und die Spule wirkt drosselnd, insofern die auf sie übergehende Stromamplitude sehr klein ist.

Für den umgekehrten Fall, d. h. falls die Wellen in der Spule einfallen gegen einen (unendlich lang gedachten) Draht, so ist zu setzen

$$(46) \quad A_1' = A_e', \quad A_2' = A_r', \quad A_1 = A_d, \quad A_2 = 0.$$

Daher ergibt (43)

$$(47) \quad \frac{A_r'}{A_e'} = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \frac{A_d}{A_e'} = \frac{2}{1+\beta},$$

d. h. bei kleinem β (Drosselspule) wird die in der Spule einfallende Stromwelle fast total ohne Umkehr der Stromrichtung reflektiert, und auf den Draht geht fast die doppelte einfallende Stromamplitude über.

Die Amplituden der Potentialwellen verhalten sich in beiden Fällen gerade umgekehrt, wie die Amplituden der Stromwellen, da nach (41) und (42) $A : \mathfrak{E} \lambda$, bez. $A' : \mathfrak{E}' \lambda'$ als Amplituden der Potentialwellen zu deuten sind.

Eine Berechnung des Durchlaßindex β , d. h. auch der Wirkung einer Drosselspule auf Grund unserer Formel (16) p. 962 ist bei den bisher hier betrachteten beiden Fällen nicht ohne weiteres zugänglich, da diese Formel nur für Spulen und Drähte von endlicher Länge experimentell verifiziert ist, und für $l = \infty$ und $n = \infty$ die Formeln überhaupt ihren Sinn verlieren. Dagegen erlaubt Formel (10) den Schluß zu ziehen, daß die Drosselwirkung einer Spule um so bedeutender ist, je enger sie gewickelt ist (weil dadurch c'/c klein wird) und je weniger ihr Radius den Radius des die einfallenden Stromwellen führenden Drahtes übertrifft (weil dadurch $\mathfrak{E}' : \mathfrak{E}$ möglichst klein bleibt).

Für die hier untersuchten Fälle des endlichen n und endlichen l bietet die Formel (47) insofern Interesse, als sie zeigt, daß bei kleinem β das Verhältnis der von der Spule auf die Antenne übergehenden Stromstärke zur induzierten Stromamplitude in der Spule jedenfalls beim ersten Auftreffen der Welle am Spulenende größer ist, als bei großem β . Insofern sollte man einen Vorteil in der Anwendung von Antennen und Spulen sehen, welche möglichst kleinen Durchlaßindex β bewirken, d. h. nach (16) eng gewundene Spulen¹⁾ und dicke Antennen (daher Käfigantennen) anwenden. — Indes werden die Verhältnisse doch durch die vielfachen Reflexionen²⁾ der Wellen an den Spulen- bez. Drahtenden anders. Zunächst ergibt sich aus (8) und (10):

$$(48) \quad A'^2 = A^2 \left(\sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda} + \beta^2 \cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda} \right),$$

d. h. es ergibt sich in der Tat immer ein größeres A , als A' , sowie $\beta < 1$ ist. Für $\beta = 0$ und $l = 0$ würde sich sogar $A = \infty$ ergeben. Aber dieser für kleine β und kleine l sich ergebende

1) In Formel (16) entsteht die Hauptveränderung, die man dem β durch verschiedene Spulen erteilen kann, durch die Windungszahl n . Der Faktor $f\sqrt{h/2r}$ ist in einem ziemlich großen Bereiche von $h/2r$ konstant (vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 329. 1902), während q langsam mit $h/2r$ wächst.

2) Ohne zeitliche Dämpfung der Wellen würden unendlich viele Reflexionen zu berücksichtigen sein. Die Formeln (8) gelten für solche unendlich viel Reflexionen.

sehr große Wert von A entspricht tatsächlich doch nur einer kleinen Stromstärke in der Antenne wegen des in (2) auftretenden Faktors $\sin 2\pi(b-z)/\lambda$. Entscheidend für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie ist, abgesehen von der Strahlung, die Größe der Potentialamplitude am Ende der Antenne. Am Ende der Antenne ist nun für $t = 0$ nach (6)

$$(49) \quad V = -\frac{AT}{\mathfrak{G}\lambda} = -\frac{A}{\mathfrak{G}c},$$

während am freien Ende einer Spule ohne Antenne nach (5) ist

$$(50) \quad V' = -\frac{A_0' T_0}{\mathfrak{G}' \lambda_0'} = -\frac{A_0'}{\mathfrak{G}' c'}.$$

Wenn nun $A_0' = A'$ wäre, d. h. wenn die in der Spule durch den Erreger induzierte Stromamplitude ohne Antenne ebenso groß wäre, als die mit angehängter Antenne erregte Stromamplitude, so würde nach (49), (50) und (48) sein:

$$(51) \quad V:V' = \frac{\beta}{\sqrt{\sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda} + \beta^2 \cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \sin^2 2\pi \frac{l}{\lambda}}},$$

d. h. das Potential am Antennenende wurde, falls $\beta < 1$ wäre, kleiner sein als am freien Ende der Spule ohne Antenne, dagegen würde durch Antennen, welche den Durchlaßindex β möglichst groß machen, d. h. bei Spulen von wenig Windungszahl n und kleiner Antennendicke ρ , das Potential am freien Antennenende stark gesteigert werden gegenüber dem Potential am Spulenende ohne Antenne.

Nun ist aber die Voraussetzung $A_0' = A'$ nicht zutreffend, sondern es ist $A_0' < A'$, weil durch die Antenne die Periode T vergrößert wird; daher muß, um Resonanz zwischen Primär- und Sekundärsystem zu erhalten, ersteres mit größerer Kapazität, d. h. auch größerer Energie gespeist werden, und es ist $A' > A_0'$. Aus diesem Grunde muß also die Anwendung von Antennen, selbst bei kleinem β , vorteilhaft sein, besonders aber, weil durch Antennen, besonders durch dicke Vielfachantennen (Käfigantennen) die Strahlung vergrößert wird.¹⁾ Welches nun die theoretisch besten Werte für β und beste Konstruktion von Spule und Antenne ist, soll in einer späteren Arbeit behandelt werden.

1) Die theoretische Abhängigkeit der Strahlung von der Dicke bei einem einzigen geraden Drahte hat M. Abraham, Wied. Ann. 66. p. 462. 1898 berechnet.

Zusammenfassung der Hauptresultate.

1. Auf p. 960, 962, 963 und 978 sind Formeln [(12), (12'), (16), (17), (18)] und eine Tabelle (für φ , p. 978) angegeben, welche die *Eigenwellenlänge einer Spule mit angehängter Antenne* zu berechnen erlauben.

2. Eine *Vielfachantenne* (Käfigantenne), die eventuell inhomogen sein kann (teils Vielfach-, teils Einfachantenne), wirkt wie eine *Einfachantenne aus einem Drahte*, dessen Radius gleich ist dem Radius (bei wenig Drähten der Vielfachantennenstücke), bez. dem Durchmesser (bei viel Drähten der Vielfachantennenstücke) des für die ganze Länge geltenden, von den Antennenstrahlen umspannten mittleren Querschnittes (indem derselbe als Kreis berechnet ist).

3. Die *Flächengröße S* einer Metallplatte, welche einem Antennenstück der Länge l das elektrische Gleichgewicht (als Gegenantenne) hält, ist zu berechnen aus:

$$\sqrt{S} = \frac{0,603 \cdot l}{\text{brigg} \log l/q},$$

falls $l:\lambda$ klein ist. Für größere Werte $l:\lambda$ und für einen allgemeinen Fall ist die Formel auf p. 990 angegeben.

4. Eine Spule wirkt gegen Wechselströme um so mehr abdrosselnd, je enger sie gewickelt ist, und je weniger ihr Radius den Radius des die Wechselströme führenden geraden Drahtes übertrifft.

5. Der Vorteil der Anwendung von Antennen bei den Erregern der drahtlosen Telegraphie liegt etwas an Verlangsamung der Periode, besonders aber an *Vermehrung der Strahlung*. Beides wird besonders durch dicke Antennen erreicht. Aus beiden Gründen sind daher *Vielfachantennen* (Käfigantennen) günstig, da sie bei großer Gewichtersparnis dicke Antennen ersetzen (vgl. Nr. 2).

6. Die halbe Wellenlänge der Maximalerregung eines einzelnen geraden Drahtes ergibt sich experimentell meist etwas abweichend (größer), als seine Länge. Dies rührt wahrscheinlich wesentlich von Störungen (Kapazitätsvermehrung durch die Umgebung) und etwas von der vergrößerten Dämpfung (durch Strahlung) her.

Giessen, 3. Mai 1903.

(Eingegangen 3. Mai 1903.)

5. Die diffuse Reflexion des Lichtes an matten Oberflächen; von Fritz Thaler.

(Hierzu Taf. VI.)

(Auszug aus der Kieler Inaugural-Dissertation.)¹⁾

§ 1. Einleitung.

Beleuchtet man eine ebene matte Fläche df unter einem bestimmten Einfallswinkel und betrachtet man die Fläche df in einer Richtung, die mit der Normalen der Fläche den Winkel α bildet, so ist nach Lambert²⁾ der Einfluß dieser Richtung

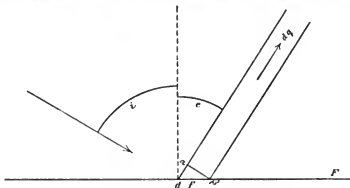


Fig. 1.

der, daß die Lichtmenge, die von df reflektiert wird, mit $\cos \alpha$ proportional ist. Da aber nun die scheinbare Größe des reflektierenden Elementes gleichfalls mit $\cos \alpha$ proportional ist, so fällt nach Lambert der Einfluß dieser Richtung, unter der man die Fläche betrachtet, vollkommen fort. Eine matte reflektierende Fläche müßte also nach allen Richtungen hin gleich hell erscheinen. Es sei z. B. F eine Fläche, die bei der Inzidenz i beleuchtet wird. Von dem Flächenelement df gehe in der Richtung e die Lichtmenge dq fort. Dann ist nach dem dritten Lambert'schen Gesetz dq proportional

1) Der Fakultät eingereicht im Juni 1902.

2) J. H. Lambert, *Photometria sive de mensura et gradibus luminis colorum et umbrae*. Augsburg 1760.

$df \cos e = C \cdot df \cos e$. Die Helligkeit H_e , in welcher die Fläche F in der Richtung e erscheint, ist:

$$H_e = \frac{dq}{\alpha \beta} = \frac{dq}{df \cos e},$$

also:

$$H_e = \frac{C df \cos e}{df \cos e} = C.$$

Diese Konstante ist bedingt durch die auf F fallende Lichtmenge, also proportional mit $\cos i$ und noch abhängig von dem Reflexionsvermögen der Fläche F .

Schon Bouguer¹⁾ fand das Lambertsche Kosinusetz auf Grund seiner Beobachtungen nicht bestätigt und zu demselben Resultate wie Bouguer sind noch eine große Reihe von anderen Autoren gekommen. Erwähnt seien hier Kononowitsch²⁾, Seeliger³⁾, Lommel⁴⁾, Messerschmitt⁵⁾ und Chwolson.⁶⁾ W. Möller⁷⁾ dagegen fand durch Beobachtungen, die er an glühenden Metallplatten anstellte, das Lambertsche Gesetz in diesem Falle vollkommen bestätigt, während nach den Versuchen von Ångström⁸⁾ und Godard⁹⁾ das Gesetz nur annähernd richtig ist.

Bei allen diesen Untersuchungen ist nun der Winkel, den die durch die Normale der beleuchteten Fläche und den ein-

1) M. Bouguer, *Essai d'optique*, Paris 1729; *Traité d'optique*, Paris 1760.

2) A. Kononowitsch, *Schriften der math. Abt. der neuruss. naturforschenden Gesellschaft* 2.; *Fortschritte der Physik* 35. p. 430. 1879; *Schriften der neuruss. (Kiew) Universität* 22. p. 107; *Fortschritte der Physik* 37. (2) p. 481. 1881.

3) H. Seeliger, *Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Königl. bayr. Akad. der Wissenschaft. zu München*. Heft 2. p. 201. 1888; *Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft* 21. p. 220. 1886.

4) E. Lommel, *Wied. Ann.* 10. p. 449. 631. 1880; *Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Königl. bayr. Akad. der Wissenschaft. zu München* p. 95. 1887.

5) J. B. Messerschmitt, *Wied. Ann.* 34. p. 867. 1888.

6) O. Chwolson, *Mélanges phys. et chim. tirés du Bull. de St. Petersbourg* 12. (Beibl. 11. p. 149. 1887 u. *Fortschritte der Physik* 42. p. 85. 1886.)

7) W. Möller, *Wied. Ann.* 24. p. 266. 1884.

8) K. Ångström, *Wied. Ann.* 26. p. 253. 1885.

9) L. Godard, *Ann. de chim. et phys.* 10. p. 354. 1887; *Journ. de Phys.* (2) 7. p. 435. 1888.

fallenden Strahl gelegte Ebene (Inzidenzebene) mit der durch die Normale und den austretenden Strahl gelegten Ebene (Emanationsebene) bildet, und den wir das Azimut nennen wollen, unberücksichtigt geblieben. Vielmehr mußte dieses Azimut nach allen bisher aufgestellten Formeln ohne Einfluß sein, und es mußte bei einem bestimmten Einfallswinkel und bei gegebenem Ausfallswinkel die Helligkeit nach allen Richtungen im Raume die gleiche sein. Hier ist es nun das große Verdienst Wieners, zuerst auf die Bedeutung des Azimutes hingewiesen und dasselbe berücksichtigt zu haben. Und bei den Beobachtungen, die er an Gips über den Einfluß des Azimutes anstellte, ergab sich, daß dasselbe unter keinen Umständen vernachlässigt werden darf, sondern sogar von ganz erheblichem Einfluß ist. Die Beobachtungen von Wiener sind nun, wie er selbst anerkennt, mit sehr wenig genauen Hilfsmitteln angestellt worden. So beobachtet er die zu untersuchende Platte mit dem bloßen Auge, indem er die Helligkeit derselben bei den verschiedenen Konstellationen der Winkel mit einer zweiten gleich großen Platte, deren Helligkeit er gleich 1 setzt, vergleicht. Sodann hat er eine sehr unvollkommene Beleuchtungsvorrichtung. Er beleuchtet nämlich beide Platten mit je einer Steariukerze, von denen sechs auf das Pfund kommen, deren Flammen er durch Biegen des Dochtes in das Innere der Flamme vergrößern konnte, und die er auf möglichst gleicher Flammenhöhe zu halten suchte. Ferner bediente er sich einer ziemlich unvollkommenen Winkelmessung. Um die drei Winkel: Inzidenz-, Emanationswinkel und das Azimut zu messen, schnitt er aus Karton eine Kreisscheibe, die in der Weise mit Einschnitten versehen war, daß man durch Umbiegen eine körperliche Ecke herstellen konnte, von der zwei Seiten und zwei Winkel Rechte waren, die dritte Seite und der dritte Winkel, die einander gleich waren, sich von $0-180^\circ$ verändern konnten. Legte er nun diese veränderliche Seite auf die Gipsplatte, so bildete die nicht in der Platte liegende Kante die Flächennormale und während die durch sie begrenzten Seiten die Ein- und Ausfallebene angaben, gab die dritte veränderliche Seite das Azimut an. Alle Seiten waren nun mit Gradeinteilungen versehen und von dem Scheitel der Ecke konnte eine Schnur, die in der Ecke

befestigt war, einmal nach dem Auge, dann nach dem Licht geführt werden, wodurch der Inzidenz- und Emanationswinkel gemessen werden konnte. Der Grundkreis gab bei dieser Anordnung das Azimut an. Wie aber das bloße Auge bei schlechter Abgrenzung und Umschließung der zu vergleichenden Flächen bei geringen Helligkeitsunterschieden, und um solche handelt es sich doch bei dem vorliegenden Problem, in der Regel wenig empfindlich ist, andererseits die Flammen der Stearinkerzen sicherlich mit wenig gleicher Intensität brannten, und die Winkelmessung auch keine exakte ist, so ließen die Wiener'schen Versuche noch an Genauigkeit zu wünschen übrig. Sehr vermißt man bei seinen Beobachtungen aber, daß er gar nicht angibt, wie seine Gipsoberfläche eigentlich beschaffen gewesen ist. Wie sehr aber bei verschiedenartiger Beschaffenheit der Oberfläche bei ein und demselben Körper die Erscheinung der diffusen Reflexion wechselt, werden wir in einem späteren Abschnitte noch näher kennen lernen. Wiener selbst spricht dann auch am Schlusse seiner Arbeit den Gedanken aus, daß es wünschenswert wäre, mit feineren Hilfsmitteln, als sie ihm zu Gebote standen, weitere Untersuchungen an verschiedenen Stoffen mit wechselnder Oberflächenbeschaffenheit anzustellen.

Auf Anregung des Prof. Dr. Leonhard Weber in Kiel habe ich dann diese Beobachtungen an mehreren Stoffen mit wechselnder Beschaffenheit der Oberfläche angestellt.

§ 2. Beschreibung der Apparate.

Auf einem dreifüßigen Gestell, das während der Beobachtungen fest an einem Tisch angeschraubt war, befand sich in einem Rahmen, der mit Zapfen in zwei Lagern ruhte, die zu untersuchende Platte. Hierdurch war es möglich, die Platte um eine in ihrer Ebene liegende und durch ihren Mittelpunkt hindurchgehende horizontale Achse zu drehen. Der Drehungswinkel wurde an einem Vertikalkreise abgelesen. Sodann befanden sich jene beiden Lager in einem weiteren Gehäuse, das eine Drehung um eine stets durch den Mittelpunkt der Platte gehende Vertikalachse gestattete. Unter diesem Gehäuse befand sich um dieselbe vertikale Achse drehbar eine horizontale Leiste, die nach der einen Seite über 1 m lang

war und nach der anderen Seite durch Gegengewichte ausbalanciert war. An zwei Teilkreisen konnte die Drehung der Leiste für sich und ihre relative Drehung gegen das Gehäuse abgelesen werden. Beide Ablesungen konnten dabei mittels je zweier gegenüberliegender Indizes an Teilkreisen vorgenommen werden. Parallel mit der oben genannten Leiste auf die Mitte der Platte zu gerichtet war die Inzidenzrichtung des Lichtes. Die Emanationsrichtung war im Raume konstant nach dem auf die Mitte der Platte unveränderlich eingestellten Photometer. Mit Hülfe der angegebenen drei Drehungen des Rahmens, des Gehäuses und der Leiste können nun alle Stellungen der Platte, die notwendig sind, um bei verschiedenen Inzidenz-, Emanationswinkeln und Azimuten zu beobachten, erreicht werden. Bezeichnen wir die Inzidenzwinkel mit i , die Emanationswinkel mit e und die Azimute mit v , so gehören zu jeder beliebigen Zusammenstellung der drei Winkel i , e , v drei andere Winkel, die am Apparat einzustellen sind. Bezeichnen wir nun eine Drehung um die horizontale Achse mit φ , eine Drehung des Gehäuses mit ω_2 und eine Drehung der Leiste mit ω_1 , so finden, wie eine leichte trigonometrische Überlegung zeigt, zwischen i , e , v und ω_1 , ω_2 , φ folgende Beziehungen statt:

$$\cos \omega_1 = \cos i \cos e + \sin i \sin e \cos v,$$

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \frac{\cos i}{\cos e \cdot \sin \omega_1} - \cotg \omega_1,$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos e}{\cos \omega_1}.$$

Nach diesen drei Formeln wurden dann für alle Winkel i , e , v die dazu gehörigen Winkel ω_1 , ω_2 , φ ausgerechnet und zwar wurde

$$i = 10, 30, 50, 70, 80,$$

$$e = 10, 30, 50, 70, 80,$$

$$v = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180$$

gesetzt.

Die Ausrechnung selbst geschah his auf Bruchteile von Minuten, während später bei der Einstellung am Apparat bis auf ganze Grade abgerundet wurde, da der Apparat nur Einstellungen his zu einem Grad Genauigkeit gestattete. Ein Fehler kommt aber auf diese Weise nicht in die Beobachtungen herein, da man Helligkeitsunterschiede bei Einstellungen, deren Differenz nur einen Grad beträgt, nicht mehr wahrnehmen kann.

Auf der schon oben erwähnten bis auf einen Meter verlängerten Leiste befand sich sodann ein kleiner Schlitten, der eine Petroleumlampe trug, und zwar derart, daß die Mitte der Petroleumflamme in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkt der zu untersuchenden Platte war, so daß das einfallende Licht der Leiste parallel lief. Die Petroleumlampe, die bei allen Beobachtungen in der Entfernung von 1 m aufgestellt war, lieferte das zur Beleuchtung der Platte erforderliche Licht. Eine andere Lichtquelle als eine Petroleumlampe zu verwenden, war nicht ratsam, denn eine stets gut gereinigte Petroleumlampe, die mit bestem Öl gespeist wird, liefert immer noch eine am konstantesten brennende Lichtquelle von zugleich ausreichender Helligkeit. H. Wright¹⁾ benutzt zwar bei seinen photometrischen Messungen über die diffuse Reflexion eine Bogenlampe, aber eine solche ist doch am allerersten Intensitätsschwankungen unterworfen.

Die Petroleumlampe wurde immer $\frac{1}{2}$ Stunde vor den eigentlichen Beobachtungen angezündet und einige Versuche, die angestellt wurden, um dann noch etwaige Unterschiede in der Intensität derselben zu konstatieren, zeigten, daß solche nicht mehr wahrnehmbar waren. Sollte aber durch das spätere Sinken des Petroleums in dem Behälter eine Differenz bedingt gewesen sein, so wurde der dadurch entstehende Fehler auf die Weise eliminiert, daß nach jeder Beobachtungsreihe wieder auf die Anfangs- oder Normallage eingestellt wurde. Die Normallage war, da bei $i = 0$, $e = 0$, $\nu = 0$ nicht beobachtet werden konnte, $i = 0$, $e = 5$, $\nu = 0$. Auf diese Lage beziehen sich daher auch alle Beobachtungen, indem die Helligkeit in dieser Richtung gleich 1 gesetzt wurde, die Zahlen also, die später in den Tabellen aufgeführt sind, beziehen sich alle auf diese Lage.

Die Helligkeit der zu untersuchenden Platte wurde mit dem von Prof. L. Weber konstruierten Photometer gemessen, das mit einem Lummer-Brodhunschen Prisma ausgestattet war. Als Vergleichslampe diente eine zum Photometer gehörige Benzinflamme, die auf der konstanten Höhe von 2 cm gehalten wurde. Auch diese Flamme wurde immer $\frac{1}{2}$ Stunde vor Beginn der Beobachtungen angezündet, und etwa später

1) H. Wright, Ann. d. Phys. 1. p. 17. 1900.

im Laufe der Beobachtungen eintretende Schwankungen wurden gleichfalls durch das Einstellen auf die Vergleichslage vor und nach jeder Beobachtungsreihe eliminiert. Die Gesamtorientierung von Photometer, Lichtquelle und der zu untersuchenden Platte war derart, daß bei der idealen Nulllage, also bei $i = e = \nu = 0$ die Achse des Photometers, der Mittelpunkt der Lichtquelle und der zu untersuchenden Platte, der durch ein Fadenkreuz ermittelt werden konnte, in einer Geraden lag.

§ 3. Die Beobachtungsmethode.

Die photometrische Messung geschah nach der schon von Seeliger und H. Wright benutzten Methode. Es ist nämlich

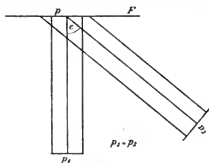


Fig. 2.

die Größe p des untersuchten Teiles der Platte nicht konstant, sondern wächst mit wachsendem Emanationswinkel um den Betrag $1/\cos e$. Dagegen ist die Projektion der Platte auf die zum beobachteten Strahl senkrechte Ebene für jeden Emanationswinkel konstant.

Die Messung geschah nun so, daß für ein und denselben Inzidenzwinkel und für dasselbe Azimut bei verschiedenen Emanationswinkeln beobachtet wurde und zwar in der Reihenfolge:

$$e = 10, 30, 50, 70, 80, 70, 50, 30, 10,$$

so daß man also für jedes e zwei Werte erhielt. Zeigte sich dann bei den für dasselbe e gefundenen Werten eine Differenz, die größer als 1 Proz. war, so wurde die ganze Beobachtungsreihe verworfen und von neuem angestellt. Ebenso wurde die Beobachtungsreihe dann verworfen, wenn ein Unterschied in den beiden Normalstellungen vor und nach der Versuchsreihe eingetreten war, der größer als 1 Proz. war. Bei sehr großen Inzidenzen wurde nun die Intensität in der Normalstellung sehr gering, so daß hier ein etwas größerer Fehler in die Beobachtungen herein kommen könnte. Denn je dunkler das Gesichtsfeld ist, desto geringer ist die Fähigkeit des Auges,

geringe Lichtunterschiede wahrzunehmen. Allein hier begnügte ich mich nicht mit je zwei Werten für denselben Emanationswinkel, sondern ich nahm vier Einstellungen vor, so daß auch diese Werte nur einen Fehler haben können, der wenig größer als 1 Proz. sein dürfte. Aus den zwei bez. vier gefundenen Werten für denselben Emanations-, Inzidenzwinkel und dasselbe Azimut wurde dann das Mittel genommen. Die eigentliche Beobachtung geschah nun auf folgende Weise. Nachdem die zu untersuchende Platte in die Normalstellung gebracht worden war, wurde die Milchglasscheibe des Photometers so eingestellt, daß das Gesichtsfeld im Photometer überall die gleiche Helligkeit zeigte. In dieser Lage wurde dann der Abstand der Milchglasscheibe von der Benzinflamme abgelesen. Setzt man den Abstand gleich r_0 , so ist die Helligkeit, unter der die Platte erscheint, proportional mit $\frac{1}{r_0^2}$. Also $H_0 = \lambda \frac{1}{r_0^2}$, wo λ ein unbekannter Proportionalitätsfaktor ist. Bringt man jetzt die Platte in irgend eine andere Lage, so ändert sich im allgemeinen die Helligkeit in dem einen Teile des Gesichtsfeldes. Ändert man jetzt die Lage der Milchglasscheibe so, daß die Helligkeit des Gesichtsfeldes wieder eine gleichmäßige ist, so möge in dieser Lage der Abstand der Milchglasscheibe von der Benzinflamme mit r bezeichnet werden. Alsdann ist die Helligkeit H unter der die Platte jetzt erscheint, proportional mit $\frac{1}{r^2}$. Also $H = \lambda \frac{1}{r^2}$. Die beiden Helligkeiten H_0 und H sind also durch die Gleichung verbunden:

$$H_0 : H = \lambda \cdot \frac{1}{r_0^2} : \lambda \frac{1}{r^2} = r^2 : r_0^2.$$

Wird nun die Helligkeit in der Normalstellung gleich 1 gesetzt, so kann darauf die Helligkeit in allen anderen Lagen bezogen werden und es ist:

$$H = \frac{r_0^2}{r^2}.$$

Auf diese Weise wird dann die gewünschte Größe erhalten, nämlich die Helligkeit, unter der die zu untersuchende Platte bei dem Inzidenzwinkel i , dem Emanationswinkel e und dem Azimut ν erscheint. Die in der angegebenen Weise gefundenen und ausgeglichenen Werte sind dann in den folgenden Tabellen niedergelegt.

§ 4. Das Beobachtungsmaterial.

Zu den von mir untersuchten Platten ist noch folgendes zu bemerken:

1. *Mattes Glas.* Eine gewöhnliche Milchglasscheibe war durch äußerst feinen Schmirgel so lange abgerieben und bearbeitet worden, bis die spiegelnde Glasfläche gänzlich verschwunden war. Die Platte hatte wie alle übrigen eine Größe von 22 cm². Sie besaß ein sehr gleichmäßiges mattes Aussehen.

2. *Magnesiumoxyd.* Dieselbe Platte wie vorhin war horizontal aufgehängt und unter ihr Magnesiumband so lange abgebrannt worden, bis sich das weiße Magnesiumoxyd als eine schöne weiße Schicht gleichmäßig auf der Platte niedergeschlagen hatte. Eine auf solche Weise genügend dick hergestellte Magnesiumschicht ist ein ausgezeichnete Repräsentant zerstreut reflektierender Flächen.

3. *Gips I.* Um zu beobachten, welchen Einfluß Änderungen der Oberfläche der zu untersuchenden Substanz auf die Erscheinung der diffusen Reflexion haben kann, wurde Gips in verschiedenen Modifikationen der Oberfläche beobachtet. Gips I wurde folgendermaßen gewonnen. Ein quadratischer Rahmen von den Dimensionen des Apparates wurde auf eine mit Alkohol abgeriebene, äußerst reine Spiegelglasscheibe gelegt. Alsdann wurde in die so entstandene Form der vorher bereitete Gipsbrei gegossen. Auf diese Weise wurde als Abdruck der Glasscheibe eine Platte gewonnen, die genügend definiert ist, da sie jederzeit wieder hergestellt werden kann. Die Platte war ziemlich gleichmäßig und zeigte nur bei äußerst kleinen Einfallswinkeln eine glänzende Oberfläche. Sehr große Schwierigkeit bereitete die Beschaffung von wirklich reinem Gips. Der von mir benutzte, aus Alabaster hergestellte Gips stammte aus der chemischen Fabrik von H. Merck in Darmstadt.

4. *Gips II.* Dieselbe Platte wie vorhin wurde mit einem weichen Wollappen abgerieben, so daß also der direkte Abdruck von der Spiegelglasscheibe verschwand, und die Oberfläche ein klein wenig rauher war wie Gips I.

5. *Gips III.* Eine Glasplatte von den Dimensionen des Apparates wurde zunächst angefeuchtet. Sodann wurde durch ein äußerst feines Gazenetz feinster Gips darüber gebeutelt, so

daß sich eine schöne, gleichmäßig raue Gipschicht auf der Platte bildete.

Noch weiter in der Rauigkeit der Oberfläche zu gehen, hielt ich nicht für angebracht, da hier die genaue Definition vollkommen aufhört. Messerschmitt hat aber noch einige Versuche bei noch ranheren Oberflächen, wenn auch nur in einer Ebene $\nu = 0$, vorgenommen, die sich an meine Beobachtungen vielleicht anschließen könnten. Er nahm ein ebenes Brettchen und strich feuchten Gips darauf, dem er beliebige Erhöhungen bis zu 1 cm Höhe gab. Wie er sagt, sah eine solche Fläche einer Mondlandschaft in Gips nicht unähnlich. Diese Fläche ließ er dann trocknen und beobachtete sie. Sie ist bei ihm mit Gips B bezeichnet, während Gips A ebenso hergestellt wurde, nur streute er bevor die Masse getrocknet war, trockenen Gips auf die Oberfläche, wodurch diese ein noch rauheres Ansehen bekam. Zur Ergänzung meiner Beobachtung werde ich die Tabellen für Gips B und Gips A, die sich bei Messerschmitt befinden, am Schlusse meiner Tabellen mit aufnehmen.

§ 5. Die Beobachtungen.

In den Tabellen I sind immer die Zahlen aufgeführt, wie sie auf Grund der in § 3 auseinandergesetzten Beobachtungsmethode gefunden worden sind. In den Tabellen II sind die Zahlen der Tabellen I noch durch $\cos i$ dividiert. Es müßten diese Zahlen sämtlich gleich 1 sein im Falle der Gültigkeit der Lambertschen Formel. Die Abweichungen der Zahlen von 1 lassen daher erkennen, nicht nur wie bei konstanter Inzidenz die Helligkeit von e und ν abhängt, sondern auch wie auf diese Helligkeit die Inzidenz einwirkt ohne Rücksicht der durch die Inzidenz verminderten Beleuchtungsstärke.

Ferner ist noch zu bemerken, daß in den Tabellen die Zahlen, die sich bei dem Azimut $\nu = 0$ an den Stellen $i = e$ befinden, nicht direkt durch Beobachtungen an jenen Stellen gewonnen sind, da hier die Richtung des Photometers mit der Richtung des einfallenden Lichtes zusammenfällt, sondern durch solche Beobachtungen, die in möglichster Nähe derselben lagen. In den Tabellen sind sie daher durch schrägen Druck kenntlich gemacht.

Tabelle I für mattes Glas.

e	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
			$r = 0^\circ$		
10	0,9852	0,8472	0,5938	0,2784	0,1274
30	0,9243	0,8197	0,5843	0,2691	0,1265
50	0,8415	0,7809	0,5783	0,2641	0,1255
70	0,8299	0,7440	0,5363	0,2506	0,1225
80	0,7575	0,6660	0,5141	0,1991	0,1147
			$r = 50^\circ$		
10	0,8086	0,7986	0,5604	0,2917	0,1162
30	0,8782	0,8037	0,5481	0,2751	0,1204
50	0,8099	0,7395	0,5783	0,2683	0,1322
70	0,8031	0,6972	0,5770	0,2761	0,1423
80	0,7165	0,6623	0,5548	0,2573	0,1493
			$r = 60^\circ$		
10	0,8075	0,8049	0,5513	0,2971	0,1149
30	0,8348	0,8256	0,5699	0,2926	0,1165
50	0,8034	0,8214	0,5867	0,2979	0,1219
70	0,7774	0,8090	0,5821	0,2961	0,1427
80	0,7055	0,7518	0,5730	0,2631	0,1485
			$r = 90^\circ$		
10	0,8024	0,8010	0,5604	0,3045	0,1175
30	0,8174	0,8257	0,5762	0,3037	0,1271
50	0,7944	0,8235	0,5900	0,3053	0,1305
70	0,7642	0,8740	0,5737	0,3063	0,1475
80	0,7250	0,7257	0,5423	0,2870	0,1420
			$r = 120^\circ$		
10	0,8163	0,8121	0,5635	0,3053	0,1197
30	0,8345	0,8425	0,5880	0,3386	0,1233
50	0,8253	0,8236	0,6113	0,3417	0,1525
70	0,7827	0,7647	0,5874	0,3447	0,1551
80	0,7542	0,7350	0,5543	0,2726	0,1653
			$r = 150^\circ$		
10	0,8219	0,8062	0,5762	0,3088	0,1213
30	0,8653	0,8523	0,6112	0,3498	0,1456
50	0,8520	0,8330	0,6760	0,3718	0,1757
70	0,8368	0,7983	0,6777	0,4153	0,2023
80	0,8174	0,7826	0,6623	0,4271	0,2285
			$r = 180^\circ$		
10	0,9757	0,8466	0,5931	0,2938	0,1396
30	0,9600	0,8751	0,6436	0,3407	0,1711
50	0,9337	0,8997	0,7486	0,4938	0,2591
70	0,8997	0,9172	0,9393	0,9697	0,7759
80	0,8183	0,8688	1,0193	1,5805	2,1852

Tabelle II für mattes Glas.

	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
e			$r = 0^\circ$		
10	1,0000	0,9782	0,9237	0,8139	0,7338
30	0,9385	0,9465	0,9089	0,7869	0,7286
50	0,8544	0,9018	0,8996	0,7721	0,7227
70	0,8427	0,8590	0,8354	0,7326	0,7051
80	0,7698	0,7691	0,7998	0,5820	0,6603
			$r = 30^\circ$		
10	0,8211	0,9222	0,8718	0,8528	0,6692
30	0,8918	0,9281	0,8527	0,8043	0,6931
50	0,8222	0,8539	0,8997	0,7843	0,7613
70	0,8155	0,8051	0,8977	0,8071	0,8195
80	0,7275	0,7648	0,8631	0,7523	0,8599
			$r = 60^\circ$		
10	0,8200	0,9294	0,8576	0,8688	0,6615
30	0,8476	0,9533	0,8865	0,8555	0,6710
50	0,8177	0,9485	0,9128	0,8125	0,7020
70	0,7895	0,9341	0,9056	0,8657	0,8220
80	0,7164	0,8681	0,8915	0,7693	0,8552
			$r = 90^\circ$		
10	0,8165	0,9249	0,8719	0,8903	0,6767
30	0,8300	0,9533	0,8965	0,8882	0,7320
50	0,8066	0,9509	0,9166	0,8927	0,7517
70	0,7940	0,9053	0,8925	0,8957	0,8495
80	0,7362	0,8379	0,8437	0,8585	0,8174
			$r = 120^\circ$		
10	0,8289	0,9379	0,8767	0,8927	0,6894
30	0,8473	0,9728	0,9148	0,9901	0,7102
50	0,8380	0,9510	0,9511	0,9989	0,8780
70	0,7948	0,8830	0,9138	1,031	0,8933
80	0,7656	0,8487	0,8623	0,7971	0,9518
			$r = 150^\circ$		
10	0,8346	0,9309	0,8965	0,9028	0,6920
30	0,8787	0,9841	0,9509	1,023	0,8385
50	0,8652	0,9618	1,052	1,087	1,012
70	0,8497	0,9217	1,054	1,214	1,165
80	0,8300	0,9037	1,030	1,249	1,316
			$r = 180^\circ$		
10	0,9907	0,9776	0,9305	0,8590	0,8039
30	0,9757	1,010	1,001	0,9962	0,9901
50	0,9481	1,039	1,165	1,411	1,492
70	0,9136	1,059	1,461	2,335	4,468
80	0,8310	1,003	1,623	4,517	12,884

Tabelle I für Magnesiumoxyd.

	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
e			$\nu = 0^\circ$		
10	0,9731	0,8092	0,5563	0,2485	0,1165
30	0,9098	0,8697	0,5622	0,2580	0,1213
50	0,8525	0,8095	0,6371	0,2902	0,1376
70	0,7669	0,7029	0,5114	0,3628	0,1779
80	0,6587	0,5980	0,5073	0,3336	0,2230
			$\nu = 30^\circ$		
10	0,9678	0,8064	0,5614	0,2749	0,1050
30	0,9200	0,8100	0,5873	0,2800	0,1224
50	0,8671	0,7731	0,5614	0,2826	0,1326
70	0,7695	0,7014	0,4869	0,3026	0,1597
80	0,6845	0,6443	0,4836	0,2906	0,1695
			$\nu = 60^\circ$		
10	0,9520	0,8189	0,5585	0,2632	0,1092
30	0,9018	0,8277	0,5771	0,2803	0,1263
50	0,8587	0,7747	0,5671	0,2859	0,1301
70	0,7522	0,7103	0,5343	0,3099	0,1529
80	0,6587	0,6336	0,5138	0,2955	0,1754
			$\nu = 90^\circ$		
10	0,9267	0,8215	0,5454	0,2669	0,1128
30	0,9100	0,8068	0,5623	0,2738	0,1233
50	0,8612	0,7948	0,5561	0,3000	0,1332
70	0,7550	0,7081	0,5376	0,3036	0,1729
80	0,6655	0,6349	0,5150	0,2803	0,1781
			$\nu = 120^\circ$		
10	0,9582	0,8116	0,5544	0,2564	0,1134
30	0,9273	0,8111	0,5688	0,2868	0,1203
50	0,8932	0,7714	0,5625	0,2996	0,1328
70	0,7786	0,7273	0,5557	0,3463	0,1900
80	0,7157	0,6701	0,5497	0,3539	0,1991
			$\nu = 150^\circ$		
10	0,9669	0,8142	0,5598	0,2055	0,1025
30	0,9386	0,8208	0,5701	0,2911	0,1250
50	0,9119	0,7755	0,6306	0,3335	0,1649
70	0,7755	0,7449	0,6294	0,4182	0,2749
80	0,6828	0,6687	0,6045	0,5100	0,3374
			$\nu = 180^\circ$		
10	0,9552	0,7859	0,5251	0,2522	0,1181
30	0,9217	0,7804	0,5503	0,2722	0,1313
50	0,8780	0,7556	0,5670	0,3375	0,2332
70	0,7826	0,7320	0,6259	0,4596	0,3451
80	0,7221	0,7231	0,7082	0,6267	0,4846

Tabelle II für Magnesiumoxyd.

	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
ϵ			$r = 0^\circ$		
10	0,9881	0,9344	0,8654	0,7266	0,6711
30	0,9239	1,004	0,8746	0,7544	0,6989
50	0,8656	0,9847	0,9912	0,8192	0,7927
70	0,7787	0,8116	0,7956	1,061	1,001
80	0,6635	0,6905	0,7892	0,9754	1,284
			$r = 30^\circ$		
10	0,9827	0,9312	0,8733	0,8036	0,6045
30	0,9341	0,8353	0,9136	0,8185	0,7047
50	0,8805	0,8927	0,8733	0,8261	0,7635
70	0,7814	0,8099	0,7576	0,8875	0,9196
80	0,6951	0,7440	0,7523	0,8497	0,9778
			$r = 60^\circ$		
10	0,9667	0,9456	0,8685	0,7695	0,6287
30	0,9157	0,9558	0,8977	0,8195	0,7276
50	0,8720	0,8946	0,8823	0,8358	0,7493
70	0,7638	0,8202	0,8312	0,9062	0,8802
80	0,6688	0,7316	0,7993	0,8641	1,033
			$r = 90^\circ$		
10	0,9410	0,9485	0,8483	0,7802	0,6529
30	0,9241	0,9316	0,8747	0,8006	0,7099
50	0,8745	0,9178	0,8651	0,8770	0,7672
70	0,7667	0,8177	0,8363	0,8877	0,9958
80	0,6757	0,7332	0,8012	0,8195	1,025
			$r = 120^\circ$		
10	0,9734	0,9590	0,8624	0,7497	0,6498
30	0,9416	0,9366	0,8848	0,8384	0,6928
50	0,9070	0,8907	0,8751	0,8760	0,8802
70	0,7906	0,8398	0,8646	1,012	1,094
80	0,7268	0,7738	0,8552	1,035	1,147
			$r = 150^\circ$		
10	0,9819	0,9401	0,8709	0,7482	0,6180
30	0,9580	0,9263	0,9870	0,8509	0,7196
50	0,9260	0,8955	0,9809	0,9750	0,9496
70	0,7874	0,8601	0,9721	1,223	1,585
80	0,6934	0,7953	0,9404	1,491	1,943
			$r = 180^\circ$		
10	0,9699	0,9075	0,8169	0,7874	0,6804
30	0,9359	0,9011	0,8562	0,7959	0,7560
50	0,8916	0,8725	0,8821	0,9867	1,343
70	0,7947	0,8453	0,9737	1,331	1,987
80	0,7833	0,8349	1,052	1,717	2,791

Tabelle I für Gips I.

e	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
			$r = 0^\circ$		
10	0,8322	0,8378	0,4147	0,1735	0,08501
30	0,7303	0,6199	0,3979	0,1736	0,08672
50	0,6809	0,5589	0,3911	0,1667	0,08277
70	0,6023	0,4793	0,3264	0,1640	0,08021
80	0,5623	0,4681	0,3104	0,1629	0,07776
			$r = 30^\circ$		
10	0,7946	0,6410	0,4361	0,1925	0,03386
30	0,6846	0,5979	0,4175	0,1873	0,09154
50	0,8375	0,5402	0,3883	0,1786	0,07874
70	0,5560	0,4801	0,3395	0,1947	0,08468
80	0,5042	0,4071	0,3073	0,1733	0,1079
			$r = 60^\circ$		
10	0,8114	0,6540	0,4428	0,1968	0,03380
30	0,7035	0,6069	0,4175	0,1901	0,08316
50	0,6437	0,5622	0,4001	0,1803	0,08380
70	0,5666	0,4897	0,3531	0,1972	0,09671
80	0,5125	0,4225	0,3126	0,1869	0,1104
			$r = 90^\circ$		
10	0,8470	0,6759	0,4462	0,1999	0,08605
30	0,7161	0,6255	0,4334	0,1931	0,08907
50	0,6653	0,5865	0,4150	0,2126	0,09154
70	0,5979	0,5180	0,3797	0,2236	0,1097
80	0,5364	0,4681	0,3256	0,1993	0,1111
			$r = 120^\circ$		
10	0,9205	0,6866	0,4473	0,1971	0,08279
30	0,7663	0,6510	0,4513	0,2261	0,08565
50	0,7068	0,6142	0,4613	0,2182	0,1037
70	0,6161	0,5639	0,4530	0,2355	0,1210
80	0,5503	0,4872	0,3727	0,2363	0,1263
			$r = 150^\circ$		
10	0,9590	0,6978	0,4589	0,1951	0,07817
30	0,7888	0,7327	0,4972	0,2289	0,09640
50	0,7115	0,6802	0,5422	0,2703	0,1241
70	0,6400	0,6420	0,5917	0,3126	0,1810
80	0,5598	0,5402	0,4501	0,3672	0,2334
			$r = 180^\circ$		
10	0,9864	0,6925	0,4399	0,2153	0,1013
30	0,8002	0,9069	0,5096	0,2595	0,1244
50	0,7258	0,7249	0,9288	0,4198	0,2030
70	0,6431	0,6556	0,7534	2,160	1,220
80	0,5606	0,6191	0,7456	2,013	4,853

Tabelle II für Gips I.

	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
e			$r = 0^\circ$		
10	0,8450	0,7365	0,6451	0,5192	0,4895
30	0,7415	0,7158	0,6189	0,5075	0,4994
50	0,6914	0,6454	0,6084	0,4876	0,4767
70	0,6116	0,5534	0,5078	0,4795	0,4619
80	0,5709	0,5406	0,4829	0,4764	0,4478
			$r = 30^\circ$		
10	0,8068	0,7401	0,6784	0,5641	0,4829
30	0,6952	0,6904	0,6495	0,5488	0,5271
50	0,6474	0,6237	0,6041	0,5222	0,4535
70	0,5646	0,5543	0,5232	0,5693	0,4877
80	0,5119	0,4701	0,4781	0,5066	0,6214
			$r = 60^\circ$		
10	0,8239	0,7552	0,6883	0,5754	0,4826
30	0,7143	0,7008	0,6495	0,5558	0,4789
50	0,6536	0,6492	0,6224	0,5283	0,4826
70	0,5754	0,5654	0,5494	0,5819	0,5569
80	0,5231	0,4879	0,4863	0,5464	0,6360
			$r = 90^\circ$		
10	0,8601	0,7805	0,6941	0,5814	0,4955
30	0,7271	0,7222	0,6742	0,5643	0,5130
50	0,6756	0,6772	0,6455	0,6215	0,5271
70	0,6071	0,5981	0,5907	0,6537	0,6316
80	0,5447	0,5406	0,5065	0,5826	0,6399
			$r = 120^\circ$		
10	0,9346	0,7930	0,6958	0,5762	0,4768
30	0,7782	0,7692	0,7021	0,6612	0,4933
50	0,7178	0,7092	0,7176	0,6381	0,5971
70	0,6256	0,6511	0,7048	0,6886	0,6966
80	0,5587	0,5625	0,5798	0,6909	0,7271
			$r = 150^\circ$		
10	0,9738	0,8057	0,7139	0,5704	0,4502
30	0,8009	0,8460	0,7735	0,6391	0,5555
50	0,7224	0,7854	0,8435	0,7903	0,7145
70	0,6499	0,7413	0,9206	0,9140	1,042
80	0,5685	0,6231	0,7003	1,074	1,344
			$r = 180^\circ$		
10	1,001	0,7996	0,6344	0,6293	0,5836
30	0,8126	1,048	0,7928	0,7587	0,7166
50	0,7370	0,8428	1,443	1,227	1,169
70	0,6530	0,7570	1,172	6,315	7,024
80	0,5896	0,7149	1,160	5,751	2,795

Tabelle I für Gips II.

ϵ	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
			$\nu = 0^\circ$		
10	0,9918	0,8302	0,5581	0,2500	0,1128
30	0,9113	0,8191	0,5602	0,2565	0,1128
50	0,8953	0,7649	0,5862	0,2545	0,1162
70	0,8240	0,7021	0,5120	0,2957	0,1393
80	0,7031	0,6317	0,4724	0,2957	0,1684
			$\nu = 30^\circ$		
10	0,9915	0,8006	0,5363	0,2779	0,1110
30	0,9448	0,7991	0,5637	0,2702	0,1265
50	0,8983	0,7840	0,5742	0,2705	0,1197
70	0,8328	0,7246	0,5616	0,2990	0,1464
80	0,7104	0,6211	0,4656	0,3301	0,1663
			$\nu = 60^\circ$		
10	0,9802	0,8085	0,5490	0,2727	0,1111
30	0,9530	0,8082	0,5557	0,2590	0,1183
50	0,9078	0,7894	0,5625	0,2725	0,1187
70	0,8265	0,7307	0,5557	0,2896	0,1516
80	0,7163	0,6847	0,5425	0,3006	0,1849
			$\nu = 90^\circ$		
10	0,9720	0,8165	0,5526	0,2677	0,1111
30	0,9452	0,8391	0,5661	0,2755	0,1232
50	0,8962	0,7972	0,5682	0,2899	0,1287
70	0,8252	0,7378	0,5634	0,2907	0,1615
80	0,7340	0,6619	0,5320	0,2945	0,1877
			$\nu = 120^\circ$		
10	0,9334	0,8281	0,5705	0,2633	0,1152
30	0,9515	0,8461	0,5753	0,3039	0,1200
50	0,9063	0,8099	0,5867	0,3029	0,1528
70	0,8265	0,7516	0,5831	0,3209	0,1763
80	0,7346	0,6925	0,5536	0,3354	0,2162
			$\nu = 150^\circ$		
10	0,9834	0,8271	0,5596	0,2700	0,1041
30	0,9546	0,8449	0,6005	0,2963	0,1354
50	0,9092	0,8087	0,6230	0,3327	0,1723
70	0,8265	0,7955	0,6826	0,3547	0,2421
80	0,7330	0,7252	0,7151	0,4718	0,3255
			$\nu = 180^\circ$		
10	0,9526	0,8289	0,5785	0,2744	0,1201
30	0,9405	0,8339	0,5962	0,2669	0,1417
50	0,9085	0,8107	0,6400	0,3725	0,1877
70	0,8478	0,8047	0,7128	0,5280	0,3801
80	0,7637	0,7873	0,7299	0,7540	0,7913

Tabelle II für Gips II.

	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 90^\circ$
e			$r = 0^\circ$		
10	1,007	0,9586	0,8688	0,7309	0,6498
30	0,9254	0,9239	0,8715	0,7398	0,6498
50	0,9096	0,8832	0,9125	0,7440	0,6693
70	0,8367	0,8107	0,7965	0,8547	0,7676
80	0,7139	0,7294	0,7349	0,8647	0,9698
			$r = 30^\circ$		
10	1,005	0,9244	0,8343	0,8124	0,6891
30	0,9593	0,9442	0,8769	0,7900	0,7285
50	0,9122	0,9058	0,8933	0,7909	0,6892
70	0,8457	0,8367	0,8787	0,8737	0,8413
80	0,7214	0,7171	0,7243	0,9653	0,9576
			$r = 60^\circ$		
10	0,9933	0,9336	0,8541	0,7975	0,6359
30	0,9677	0,9550	0,8646	0,7574	0,6815
50	0,9218	0,9115	0,8751	0,7965	0,6832
70	0,8392	0,8437	0,8646	0,8468	0,8728
80	0,7274	0,7329	0,8439	0,8789	1,065
			$r = 90^\circ$		
10	0,9870	0,9428	0,8597	0,7828	0,6399
30	0,9598	0,9689	0,8807	0,7967	0,7096
50	0,9101	0,9205	0,8540	0,8476	0,6832
70	0,8379	0,8520	0,8765	0,8496	0,9301
80	0,7453	0,7643	0,8277	0,8611	1,031
			$r = 120^\circ$		
10	0,9936	0,9550	0,8875	0,7699	0,6625
30	0,9661	0,9770	0,8950	0,8886	0,6908
50	0,9203	0,9352	0,9127	0,8943	0,8800
70	0,8392	0,8678	0,9071	0,9385	1,015
80	0,7661	0,7997	0,8613	0,9806	1,216
			$r = 150^\circ$		
10	0,9936	0,9550	0,9017	0,7895	0,6001
30	0,9693	0,9756	0,9342	0,8662	0,7800
50	0,9233	0,9338	0,9770	0,9727	0,9950
70	0,9392	0,9186	1,062	1,037	1,395
80	0,7437	0,8374	1,112	1,380	1,874
			$r = 180^\circ$		
10	0,9673	0,9572	0,9000	0,8023	0,6909
30	0,9564	0,9629	0,9275	0,8681	0,8162
50	0,9225	0,9361	0,9957	1,064	1,081
70	0,8609	0,9292	1,109	1,580	2,189
80	0,7755	0,9091	1,136	2,205	4,555

Tabelle I für Gips III.

	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
ϵ			$\nu = 0^\circ$		
10	0,9832	0,8239	0,5751	0,2743	0,1384
30	0,9144	0,9526	0,6550	0,3206	0,1575
50	0,8485	0,8940	0,8114	0,4025	0,2040
70	0,8028	0,8485	0,7885	0,6263	0,5311
80	0,7755	0,7528	0,7004	0,5979	0,4282
			$\nu = 30^\circ$		
10	0,9730	0,8001	0,5511	0,2908	0,1473
30	0,8749	0,8488	0,6166	0,3191	0,1706
50	0,8442	0,8291	0,6475	0,3337	0,1907
70	0,7958	0,7857	0,6422	0,4467	0,2753
80	0,7579	0,7347	0,6250	0,4560	0,3460
			$\nu = 60^\circ$		
10	0,9683	0,7859	0,5321	0,2828	0,1433
30	0,9078	0,8150	0,5604	0,2998	0,1519
50	0,8692	0,7716	0,5863	0,3228	0,1802
70	0,8188	0,7326	0,5843	0,3796	0,2392
80	0,7681	0,7035	0,5698	0,3894	0,2808
			$\nu = 90^\circ$		
10	0,9243	0,7692	0,5262	0,2790	0,1404
30	0,9108	0,7401	0,5361	0,2844	0,1504
50	0,8488	0,7379	0,5484	0,3216	0,1696
70	0,7959	0,7035	0,5484	0,3460	0,2380
80	0,7669	0,6789	0,5415	0,3611	0,2630
			$\nu = 120^\circ$		
10	0,9227	0,7601	0,5090	0,2659	0,1500
30	0,8761	0,7188	0,5152	0,2841	0,1350
50	0,8316	0,6876	0,5152	0,2912	0,1585
70	0,7786	0,6742	0,5255	0,3289	0,2020
80	0,7294	0,6370	0,5102	0,3443	0,2264
			$\nu = 150^\circ$		
10	0,9197	0,7251	0,5028	0,2613	0,1227
30	0,8636	0,7035	0,5152	0,2854	0,1337
50	0,8100	0,6837	0,5314	0,2937	0,1493
70	0,7681	0,6602	0,5347	0,3210	0,1937
80	0,7035	0,5742	0,4908	0,3342	0,2246
			$\nu = 180^\circ$		
10	0,9144	0,7311	0,5102	0,2609	0,1268
30	0,8606	0,7196	0,5273	0,2768	0,1310
50	0,8089	0,6984	0,5702	0,2879	0,1491
70	0,7731	0,6915	0,5679	0,3505	0,2095
80	0,6905	0,6188	0,5578	0,3349	0,2499

Tabelle II für Gips III.

e	$i = 10^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 50^\circ$	$i = 70^\circ$	$i = 80^\circ$
			$r = 0^\circ$		
10	0,9984	0,9514	0,8947	0,8020	0,7969
30	0,9285	1,100	1,019	0,9358	0,9068
50	0,8616	1,056	1,262	1,481	1,175
70	0,8151	0,9798	1,228	1,831	1,951
80	0,7874	0,8693	1,089	1,748	2,466
			$r = 30^\circ$		
10	0,9880	0,9289	0,8574	0,8502	0,8482
30	0,8884	0,9801	0,9590	0,9331	0,9822
50	0,8572	0,9573	1,007	0,9757	1,098
70	0,8080	0,9072	0,9991	1,306	1,586
80	0,7695	0,8484	0,9723	1,333	1,993
			$r = 60^\circ$		
10	0,9833	0,9072	0,8278	0,8270	0,8254
30	0,9218	0,9411	0,8719	0,8765	0,8748
50	0,8826	0,8909	0,9122	0,9469	1,038
70	0,8314	0,8459	0,9098	1,110	1,378
80	0,7800	0,9123	0,8864	1,139	1,617
			$r = 90^\circ$		
10	0,9385	0,8903	0,8186	0,8158	0,8087
30	0,9248	0,8546	0,8340	0,8315	0,8661
50	0,8618	0,8521	0,8531	0,9404	0,9764
70	0,8081	0,8123	0,8531	1,012	1,370
80	0,7788	0,7839	0,8463	1,056	1,514
			$r = 120^\circ$		
10	0,9370	0,8777	0,7918	0,7775	0,7486
30	0,8896	0,8300	0,8016	0,8308	0,7772
50	0,8444	0,7939	0,8016	0,8516	0,9128
70	0,7906	0,7785	0,8175	0,9618	1,163
80	0,7406	0,7355	0,7757	1,007	1,304
			$r = 150^\circ$		
10	0,9339	0,8378	0,7823	0,7639	0,7068
30	0,8769	0,8123	0,8016	0,8845	0,7697
50	0,8225	0,7895	0,8267	0,8587	0,8597
70	0,7800	0,7623	0,8319	0,9386	1,115
80	0,7143	0,6631	0,7636	0,9770	1,293
			$r = 180^\circ$		
10	0,9285	0,8442	0,7937	0,7629	0,7301
30	0,8738	0,8309	0,8203	0,8094	0,7544
50	0,8214	0,8064	0,8871	0,8419	0,8585
70	0,7851	0,7985	0,8844	1,025	1,201
80	0,7012	0,7146	0,8677	0,9782	1,434

Gips A.

ϵ	$i = 0^\circ$	10°	15°	20°	30°	45°	60°	70°	80°
0	1000	—	—	902	—	654	517	377	177
10	—	991	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	982	—	—	630	—	—	—
20	929	—	—	947	—	—	—	—	—
30	—	—	—	—	881	618	—	—	—
45	980	—	908	—	818	593	446	271	117
60	979	—	—	—	—	582	364	—	—
70	974	—	—	—	—	566	—	218	—
80	677	—	—	—	—	396	—	—	87

Gips B.

ϵ	$i = 0^\circ$	10°	15°	20°	30°	45°	60°	70°	80°
0	1000	990	—	1045	—	851	614	317	167
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	—	—	956	—	—	841	—	—	—
20	1082	—	—	992	—	—	—	—	—
30	—	—	—	—	952	571	—	—	—
45	1215	—	920	—	846	694	454	377	223
60	736	—	—	—	—	512	324	—	—
70	512	—	—	—	—	292	—	123	—
80	248	—	—	—	—	130	—	—	18

Zum Schluß mögen hier noch zwei Tabellen für den Fall der senkrechten Inzidenz Platz finden.

Gips I.

ϵ	$\nu = 0^\circ$	$\nu = 180^\circ$
10	0,9120	0,9120
30	0,7391	0,7469
50	0,6912	0,6858
70	0,6165	0,6165
80	0,5344	0,5344

Gips II.

ϵ	$\nu = 0^\circ$	$\nu = 180^\circ$
10	0,9838	0,9822
30	0,9287	0,9272
50	0,8788	0,8788
70	0,8203	0,8172
80	0,7561	0,7594

§ 6. Konstruktion der Modelle.

Eine graphische Darstellung, deren sich auch andere Autoren wie Bouguer, Messerschmitt, Wiener bedient

haben, habe auch ich zur besseren Übersicht der Verhältnisse bei der Erscheinung der diffusen Reflexion angewandt. Man kann nämlich, wie genannte Autoren gezeigt haben, sogenannte Helligkeitskurven konstruieren. Man trägt für einen bestimmten Inzidenzwinkel auf jeden von dem Mittelpunkt der Fläche ausgehenden Strahl die in dieser Richtung gemessene Helligkeit als Vektor auf. Dadurch, daß Bougner und Messerschmitt die Punkte miteinander verbanden, erhielten sie Helligkeitskurven. Wiener dagegen, der sich nicht auf Beobachtungen in einer Ebene beschränkte, sondern seine Beobachtungen auf den Raum ausdehnte, erhielt in ähnlicher Weise dadurch, daß er durch alle im Raume ermittelten Punkte eine Fläche legte, eine Helligkeitsfläche. Auch ich habe nach dem Vorgange von Wiener solche Helligkeitsflächen für alle beobachteten Platten und Inzidenzen konstruiert, und zwar verfuhr ich dabei folgendermaßen. Auf einzelnen Kartons wurden die für einen bestimmten Inzidenzfall gemessenen Helligkeiten als Vektoren aufgetragen und die bei den verschiedenen Emanationen erhaltenen Punkte miteinander verbunden. Dabei wurde für jedes beobachtete Azimut eine solche Helligkeitskurve gezeichnet. Sodann wurden diese Kurven ausgeschnitten und die einzelnen Kartons fächerartig auf eine gemeinsame Unterlage aufgesetzt. Der Symmetrie wegen wurden auch die Kurven der Azimute 210, 240 . . . 330 in den Modellen mit angebracht. Dieses kann ja ohne weiteres geschehen, da die Erscheinung der diffusen Reflexion in Bezug auf die Ebene $\nu = 0$, $\nu = 180$ symmetrisch ist. Da diese Modelle einen weit besseren Einblick in das Wesen der diffusen Reflexion gestatten als die entsprechenden Tabellen, so habe ich die Abbildungen (vgl. Taf. VI) für alle an einer Platte beobachteten Inzidenzen mit beigelegt. Gips III habe ich aus dem Grunde gewählt, weil sich bei ihm die Erscheinung der diffusen Reflexion gewissermaßen umkehrt. Als letzte Abbildung ist noch ein Modell für mattes Milchglas beigelegt und zwar für den Fall $i = 70^\circ$.

§ 7. Folgerungen aus den Tabellen bez. Modellen.

Aus den angeführten Tabellen und in vielleicht noch höherem Maße aus den beigelegten Modellabbildungen kann man nun

über den Vorgang der diffusen Reflexion an matten Oberflächen folgende Schlüsse ziehen.

1. Bei demselben Inzidenzwinkel nimmt die Helligkeit mit wachsendem Azimut zu; mit Ausnahme von Gips III. Dabei ist zu beachten, daß Glas, Gips I und Gips II in der Ebene $\nu = 0$ kein Maximum zeigen bei einem Emanationswinkel, der gleich dem entsprechenden Inzidenzwinkel ist, während bei Magnesiumoxyd ein deutliches Maximum an jenen Stellen zu bemerken ist (beachte p. 1005).

2. Wie aus den Tab. II hervortritt, ergeben sich fast durchweg Werte, die kleiner sind, als sie nach dem Lambert'schen Gesetze sein müßten.

3. Die Helligkeit erreicht ihr Maximum immer dann, wenn Ein- und Ausfallswinkel in entgegengesetzten Azimuten liegen. Die matten Oberflächen sind demnach doch noch im gewissen Sinne spiegelnde Flächen. Dieses deckt sich auch mit der Erklärung der Strahlenzerstreuung durch matte Oberflächen. Man nimmt nämlich an, daß die matten Flächen aus einer großen Zahl unendlich kleiner Flächenelemente zusammengesetzt sind, die nach allen Richtungen hin gelagert sind. Die größte Anzahl derselben hat aber ihre Oberfläche in der Richtung der Gesamtoberfläche und daher tritt bei den matten Oberflächen eine vorherrschende Spiegelung im Sinne der Gesamtoberfläche ein.

4. Zu bemerken ist noch, daß die Helligkeitsmaxima immer bei Emanationswinkeln liegen, die größer sind als die dazu gehörigen Inzidenzwinkel, und daß die Spiegelung um so deutlicher hervortritt, je größer der Inzidenzwinkel wird. Für Glas trifft z. B. folgendes zu:

bei $i = 10$	liegt das Maximum bei $e = 10$	0,9857,
„ $i = 30$	„ „ „ „	„ $e = 70$ 0,9172,
„ $i = 50$	„ „ „ „	„ $e = 80$ 1,0193,
„ $i = 70$	„ „ „ „	„ $e = 80$ 1,5808,
„ $i = 80$	„ „ „ „	„ $e = 80$ 2,1852.

5. Während nun bei den ersten vier beobachteten Platten der Unterschied ein nicht allzu großer ist, nimmt Gips III eine vollkommen isolierte Stellung ein. Bei Gips III kehrt sich nämlich die Erscheinung der diffusen Reflexion insofern gerade um, als das Helligkeitsmaximum nicht in der dem einfallenden

Strahl entgegengesetzten Richtung, also bei einem Azimut $\nu = 180$ liegt, sondern bei $\nu = 0$. Hier nimmt also die Helligkeit mit wachsendem Azimut nicht zu, sondern sie nimmt ab.

6. Aus den beiden von Messerschmitt übernommenen Tabellen von Gips A und Gips B ist nun weiter nichts zu entnehmen. Denn wie seine Oberflächen einen viel zu willkürlichen Charakter tragen, so sind auch seine Zahlen sehr wenig dazu angetan, etwas näheres auszusagen.

7. Aus den beiden letzten Tabellen ist, wie es für den Fall der senkrechten Inzidenz nicht anders zu erwarten war, zu entnehmen, daß für alle Azimute bei gleichen Emanationswinkeln die Helligkeit eine gleiche ist.

Vorstehende Arbeit wurde in der unter Leitung des Herrn Prof. L. Weber stehenden Abteilung des physikalischen Institutes der Universität Kiel ausgeführt.

(Eingegangen 5. April 1903.)

**6. Ein Beitrag zur Festigkeitslehre;
von Georg Kuntze.**

(Auszug aus der Göttinger Inaugural-Dissertation.)

I. Über die Gesichtspunkte, die bei der Anstellung von Festigkeitsversuchen maßgebend sein dürften.

Die nachstehende Untersuchung, welche die Vermehrung des immer noch ziemlich spärlichen Materiales an Beobachtungen über Festigkeit, die zu theoretischer Verwertung wirklich geeignet sind, bezweckt, ist auf Anregung von Hrn. Prof. Voigt unternommen worden und schließt sich an dessen unten zitierte Abhandlung¹⁾ an.

In derselben werden bezüglich des Materiales zu Festigkeitsversuchen die folgenden Anforderungen erhoben:

1. Eine wohldefinierte und reguläre Beschaffenheit der Oberfläche der Präparate.

2. Eine spröde, so wenig wie möglich duktile Substanz, die sich immer wieder in übereinstimmender Natur herstellen läßt. Im Falle elastischer Nachwirkungen ein so schnelles Operieren, daß diese nicht in merklicher Stärke auftreten.

3. Eine Struktur, deren Feinkörnigkeit in einem angemessenen Verhältnis zu den Querschnitten der Präparate steht und möglichst amorph ist, da eine kristallinische Struktur zu Gleitflächen Veranlassung geben kann, die in die Erscheinung ein völlig neues Element bringen.

4. Aus praktischen Gründen wird es gut sein, wenn die zu untersuchende Substanz sich leicht bearbeiten läßt und nur eine mäßige Festigkeit besitzt, damit die Experimente nicht zu große Hilfsmittel erfordern.

Die Beobachtungen sind in der mathematischen Abteilung des physikalischen Institutes zu Göttingen angestellt worden. Die zur Untersuchung nötigen Apparate sind dem Verfasser von dem Institute zur Verfügung gestellt und, soweit sie nicht

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. p. 567. 1901.

vorhanden waren, in der Werkstätte des physikalischen Institutes angefertigt worden.

Mit den im folgenden zu schildernden Versuchen sollte der Anfang mit systematisch angestellten Festigkeitsbeobachtungen gemacht werden, die, wenn möglich, so weit fortzusetzen sein werden, bis zum Aufbau einer physikalisch einwandfreien Festigkeitstheorie genügendes Beobachtungsmaterial vorliegt.

II. Die untersuchte Substanz und ihre physikalischen Eigenschaften.

Nach einigen Vorversuchen erwies sich als brauchbar eine Mischung von chemisch reiner Stearinsäure und fein gesiebttem Gips. Bei der Herstellung der Substanz wurde folgendermaßen verfahren. In die im Wasserbade geschmolzene Stearinsäure wurde der durch ein Sieb übergeseibte Gips eingeführt, bis das Mischungsverhältnis 28 zu 72 betrug. Es entstand so ein dicker Brei, der allerdings noch eine beträchtliche Menge Luft enthielt, die durch das anhaltende Rühren hineingekommen war. Um diese zu beseitigen, wurde die Substanz in einer Gußform in den Rezipienten einer Luftpumpe gebracht, der mit Hilfe einer Wasserstrahlpumpe ausgepumpt wurde. Bei der großen Zähigkeit der Substanz dauerte das merklich vollständige Beseitigen der Luftblasen ziemlich lange (etwa drei Stunden), und es mußte durch eine geeignete elektrische Heizvorrichtung dafür gesorgt werden, daß der Guß flüssig blieb. Die Temperatur wurde sogar auf etwa 120° C. gesteigert, da bei höherer Temperatur der Brei etwas dünnflüssiger wurde. Es muß hier erwähnt werden, daß im Vakuum wirklich nur Luft aus dem Guß herausgetrieben wurde und nicht etwa in merklichem Betrage auch Stearindampf. Denn erstens erreichte die Gasabgabe für jede Schmelze schließlich ein Ende und trat bei wiederholtem Einschmelzen derselben Substanz doch immer wieder von neuem ein, nachdem vorher gerührt war, und zweitens siedet Stearinsäure auch bei einer Temperatur von 180° C. noch nicht in dem angewendeten Vakuum von 18 mm Quecksilberdruck. Eine Abgabe von Stearindampf könnte also nur in ganz geringem Maße stattgefunden haben, wie übrigens sogleich noch einmal glaubhaft gemacht werden wird.

Nach erfolgtem Evakuieren wurde die Gußform in fließendes kaltes Wasser gesetzt, um ein möglichst rasches Erstarren der Substanz herbeizuführen. Es erwies sich indes als zweckmäßig, den Guß von oben her durch eine Heizvorrichtung flüssig zu halten, sodaß das Abkühlen von unten nach oben fortschreiten mußte. Dadurch wurde verhindert, daß sich infolge Schwindens der Substanz im Innern ein Hohlraum bildete. In dieser Weise wurde mit jedem Guß verfahren. Die bei der Herstellung der Präparate sich ergebenden Abfälle wurden immer wieder mit eingeührt.

Das so erhaltene Material erwies sich als ein harter und unbedingt spröder Stoff, der beim Zerschlagen ein sehr feines Korn und fast muscheligen Bruch zeigte, ähnlich Solenhofer Kalkstein. Homogenität der Substanz war durch die Herstellung bis zu einem gewissen Grade gewährleistet und ließ nur in den obersten Schichten des Gusses nach, die indessen nicht benutzt worden sind. Der Schmelzpunkt lag bei 62°C . und war wegen der Zähigkeit und außerordentlich schlechten Wärmeleitfähigkeit nicht genau zu beobachten. Das spezifische Gewicht bestimmte sich zu 1,82 und blieb von Guß zu Guß konstant, sodaß auch hieraus geschlossen werden darf, daß sich die Zusammensetzung der Substanz während der Untersuchung nicht wesentlich geändert hat. Auf der Drehbank ließ sich das Material gut bearbeiten und zeigte beim Schneiden mit scharfem Stahl eine glänzende Oberfläche.

Da es nötig sein wird, auch die elastischen Eigenschaften der Substanz zu kennen, so soll das zur Bestimmung der Elastizitätsmoduln eingeschlagene Verfahren in diesem Zusammenhang geschildert werden.

Aus dem Gußstück wurden mit der Kreissäge prismatische Stäbe von ungefähr 15 cm Länge, 1 cm Breite und 0,2 cm Dicke hergestellt. Dabei wurden nur die mittleren Parteen des Gusses verwendet mit Hinweglassung außer der obersten auch der untersten Schicht von 3—5 mm Dicke. Die Stäbe wurden mit Schmirgelpapier bearbeitet, damit sie glatte Oberflächen, scharfe Kanten und gleichmäßige Dimensionen erhielten. Schon die ersten Versuche mit diesen Stäben zeigten, daß zur Bestimmung der Elastizitätsmoduln wegen der elastischen Nachwirkungen eine statische Methode nicht gut angewendet werden

konnte. Wenn man nämlich ein wagrecht liegendes Stäbchen an beiden Enden unterstützte und es bei Zimmertemperatur in der Mitte vorsichtig mit etwa 10–20 g belastete, so bog es sich ein wenig, kehrte aber nach Beseitigung der Belastung nicht wieder vollständig in die Anfangslage zurück. Es empfahl sich daher, die Elastizitätsmoduln aus langsamen Schwingungen der Stäbchen zu bestimmen. Um solche Schwingungen hervorzubringen, mußten die Stäbchen mit geeignet gewählten trägen Massen fest verbunden werden, deren Trägheitsmomente die Schwingungsdauer genügend verlängerten. Dies geschah nach Prof. Voigts Vorschläge und Theorie in folgender Weise.

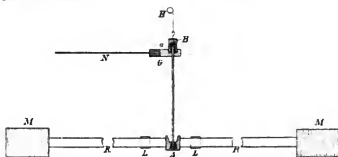


Fig. 1. (1 : 4)

(Die bei dieser und den übrigen Figuren angegebenen Größenverhältnisse sind nur annähernd richtig.)

Die Stäbe wurden mit ihren beiden Enden in zwei unten näher zu beschreibende Fassungen eingekittet. Die untere Fassung *A* trug in der Richtung, in der die Dicke des Stabes lag, zwei dünnwandige Messingrohre *R R* von je 30 cm Länge, an deren Enden Bleimassen *M* von etwa 200 g angeschraubt waren (Fig. 1). Außerdem saßen auf den Rohren als Laufgewichte zwei kleine verschiebbare Messingringe *L L*, mit deren Hülfe sich das System ausbalancieren ließ. In der Richtung, in der die Breite des Stabes lag, trug die untere Fassung *A* ein sie von drei Seiten umgreifendes Messingstück *K K* mit zwei gehärteten Schraubenspitzen *S₁ S₂* derart, daß die Spitzen der Schrauben in der Höhe saßen, in der der zu untersuchende Stab aus der Fassung herauskam (Fig. 2). Mit den Stahlspitzen lag das ganze System in zwei kleinen Stahlpfännchen *P₁ P₂*,

in denen es sich sehr leicht um eine horizontale Achse drehen konnte.

An einem am Gestell des Apparates in der Höhe verstellbaren Stahlstreifen N (Fig. 1) war ein bei a sich gabelndes Messingstück G angeschraubt, welches an seinen Enden zwei Schrauben S_3 S_4 trug (Fig. 2). Deren Spitzen hielten die obere

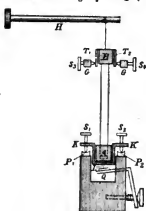


Fig. 2. (1 : 4)

Fassung zwischen sich, sodaß auch diese mit einem Minimum von Reibung um eine horizontale Achse sich drehen konnte. Und auch hier war die Anordnung so getroffen, daß die Achse da durch den Stab ging, wo er aus der Fassung herauskam. Um das zu ermöglichen, waren an den Seitenflächen der oberen Fassung B zwei Stahlplättchen T_1 T_2 angeschraubt. Der so befestigte Stab vollführte demnach, wenn das schwingende System einen leichten Anstoß erhielt, unter dem Einfluß des ziemlich großen Trägheitsmomentes der Massen, mit denen seine untere Fassung beschwert war, langsame Biegungsschwingungen. Die obere Fassung mußte sich infolge der Ausbiegungen des Stabes ein wenig (um eine Größe zweiter Ordnung in Bezug auf die Durchbiegung) auf und nieder bewegen, und es wurde ihr diese Bewegung durch die Befestigung an dem federnden Stahlstreifen gestattet.

Um die Bestimmung des Drillungsmoduls zu ermöglichen, wurde mit einer Arretierungsvorrichtung H (Fig. 2) die obere Fassung gehoben, nachdem die Schrauben S_3 und S_4 fest in zwei auf T_1 und T_2 angebrachte Körnerschläge eingeklemmt waren. Der Stab, der nun unten völlig frei hing, wurde dadurch entlastet, daß gegen eine mit der unteren Fassung verbundene Stahlspitze L eine kleine Metallplatte Q gedrückt wurde, die nun eine Unterstützung des ganzen Systems bot und auf der sich der oben eingeklemmte Stab mit einem Minimum von Reibung um eine vertikale Achse drehen konnte. Erhielt jetzt das System einen seitlichen Stoß, so vollführte der Stab langsame Drillungsschwingungen.

Die Trägheitsmomente des schwingenden Systems für Biegung und Drillung waren so groß, daß die Dauer der unter ihrer Einwirkung zu stande kommenden Schwingungen der Stäbchen als unendlich groß angesehen werden konnten gegen die Zeiten, in denen sich eine Biegungs- oder Drillungsschwingung über die Länge des Stäbchens fortpflanzt. Da die Einwirkungen des Luftwiderstandes und der inneren Reibung auf die Schwingungsdauer als unwesentlich unberücksichtigt bleiben konnten, so kann man bei der Berechnung der Formeln für die Elastizitätsmoduln folgendermaßen verfahren.

Wir orientieren den Stab so zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem, daß seine Länge mit der Z -Achse, seine Dicke mit der X -Achse zusammenfällt, und führen ferner folgende Bezeichnungen ein: L Länge, B Breite, D Dicke des Stabes, s Elastizitätsmodul der Längsdilatation¹⁾, s_1 der Querdilatation, s_2 der Drillung; zwischen den s_n besteht die Beziehung: $s_2 = 2(s - s_1)$, M_β Trägheitsmoment des schwingenden Systems für Biegung, M_δ für Drillung, T_β Dauer einer Periode der Biegungsschwingungen, T_δ Dauer einer Periode der Drillungsschwingungen.

Für den Fall der *Durchbiegung* ist der Stab um zwei seiner Breite parallele und in seinen Endquerschnitten liegende Achsen drehbar. Der eine Endquerschnitt ($z = 0$) erfährt das Moment 0, der andere ($z = L$) erfährt das Moment $\overline{\mathfrak{M}}$ um die Y -Achse. Da die Schwingungen der Massen *für sich* sehr langsam sind (sie haben mindestens die Dauer von einer Minute), so ist die Elastizität des Stabes die einzig merkliche beschleunigende Kraft, die dem schwingenden Systeme das Moment $-\mathfrak{M}$ erteilt. Bezeichnet man mit φ den Winkel, um den sich das letzte Stabelement dz , und mit ihm das träge System, um die Y -Achse gegen die Z -Achse dreht, so ist

$$(1) \quad -\mathfrak{M} = M_\beta \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

In jedem Querschnitt des Stabes wirkt um die Y -Achse ein Moment:

$$(2) \quad \mathfrak{M} = k \frac{d^2 x}{dz^2}, \quad k = \frac{q \cdot k^3}{s} = \frac{B D^3}{12 \cdot s},$$

1) W. Voigt, Kompendium der theor. Physik 1. p. 331. 337. 411. Leipzig 1893.

worin q der Querschnitt des Stabes, k der Trägheitsradius um eine der Y -Richtung parallelgehende Achse ist.

Für das vorliegende Biegungsproblem gilt die Differentialgleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = 0.$$

Die Bedingungen für die Enden des Stabes sind:

$$(4) \quad z = 0: \quad x = 0, \quad \mathfrak{M} = 0.$$

$$(5) \quad z = L: \quad x = 0, \quad \mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{M}}, \quad \frac{dx}{dz} = q.$$

Bei Einführung von vier Konstanten a, b, c, d folgt aus der Differentialgleichung (3):

$$x = \frac{a z^3}{6} + \frac{b z^2}{2} + c z + d,$$

oder, da nach den Bedingungen (4) für das Ende $z = 0$ b und d verschwinden:

$$x = \frac{a z^3}{6} + c z.$$

Nach den Bedingungen (5) für das Ende $z = L$ ist aber:

$$0 = \frac{a L^3}{6} + c L, \quad q = \frac{a L^2}{2} + c = \frac{a L^2}{3},$$

woraus nach (2) folgt:

$$(6) \quad \mathfrak{M} = k a L = \frac{3 q k}{L} = \frac{3 q q \cdot k^2}{L s} = \frac{q \cdot B D^3}{4 L s}.$$

Aus der Gleichung (1), das heißt aus

$$(7) \quad -\mathfrak{M} = M_\beta \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{q \cdot B D^3}{4 \cdot L \cdot s},$$

erhält man für die Dauer einer Doppelschwingung:

$$T_\beta^2 = 4 \pi^2 \frac{M_\beta L s}{B \cdot D^3},$$

also zur Bestimmung von s die Formel:

$$(8) \quad s = \frac{B \cdot D^3 \cdot T_\beta^2}{16 \pi^2 \cdot M_\beta \cdot L}.$$

Bei den *Drillungsschwingungen* des Stabes ergibt sich für die Drehung ψ des letzten Querschnittes $z = L$ gegen den ersten,

festgehaltenen $z = 0$, wenn B mindestens dreimal so groß ist als D und \bar{M} das Drehungsmoment bezeichnet, die Gleichung ¹⁾:

$$(9) \quad \psi = \frac{3 L \bar{M} \cdot s_2}{D^3 B \cdot \left(1 - 0,630 \frac{D}{B}\right)}.$$

Die träge Masse erfährt bei einer Drehung um den Winkel ψ von dem Stab das Moment:

$$- \bar{M} = - \frac{B \cdot D^3 \cdot \psi}{3 L s_2} \cdot \left(1 - 0,630 \frac{D}{B}\right).$$

Aus der Gleichung:

$$- \bar{M} = M_\delta \frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{B \cdot D^3 \cdot \psi}{3 L s_2} \left(1 - 0,630 \frac{D}{B}\right).$$

erhält man für die Dauer einer Doppelschwingung:

$$T_\delta = 4 \pi^2 \cdot \frac{3 \cdot M_\delta \cdot L s_2}{D^3 \cdot B \left(1 - 0,630 \frac{D}{B}\right)}$$

und somit zur Bestimmung von s_2 die Formel:

$$(10) \quad s_2 = \frac{B \cdot D^3 \cdot T_\delta^2}{12 \pi^2 \cdot M_\delta \cdot L} \cdot \left(1 - 0,630 \frac{D}{B}\right).$$

Zur Beobachtung der Schwingungsdauer war an einem der Bleizylinder eine Marke angebracht, deren Durchgänge durch das Gesichtsfeld eines kleinen Fernrohres gezählt wurden.

Der Untersuchung stellte sich nun ein Umstand erschwerend in den Weg, nämlich der Wechsel der Temperatur. Nicht nur die Resultate der später zu besprechenden Festigkeitsbeobachtungen, sondern auch die Schwingungsdauer der Stäbe und mehr noch die Zahl der beobachtbaren Amplituden waren außerordentlich von der Temperatur abhängig. Der Versuch, durch herabfließendes Wasser von 0° C. den Stab auf konstante Temperatur zu bringen, scheiterte an der mangelhaften Benetzbarkeit der Substanz. Schließlich wurde für die Elastizitätsbeobachtungen die Frage dadurch glücklich gelöst, daß diese in einer dem Verfasser gütigst zur Verfügung gestellten Zelle des zum städtischen Schlachthofe gehörigen Kühlhauses an gestellt wurden. ²⁾ Die dort vorhandenen Einrichtungen ge-

1) De Saint Venant, Sav. étrang. 14. p. 233. 1853.

2) Hrn. Schilling, dem Direktor des Schlachthofes zu Göttingen, sei auch an dieser Stelle für sein freundliches Entgegenkommen verbindlichster Dank ausgesprochen.

statten es, in sehr vollkommener Weise innerhalb weniger Zehntel Grad die Temperatur konstant auf 0° C. zu halten. Es wurde so möglich, 30—40 Perioden zu zählen, und die Beobachtung ergab, wie gleich hier bemerkt sei, keinen Unterschied in der Dauer großer und kleiner Amplituden und somit merkliche Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes.

Vor der Messung der T_β und T_δ erfolgte die Bestimmung der Trägheitsmomente der bewegten Massen. Zu diesem Zwecke waren in die Messingrohre $R R$ (Fig. 1) in gleichem Abstände vom Schwerpunkte des ganzen Systems zwei kleine Nuten eingedreht, in die die Aufhängedrähte einer bifilaren Suspension eingelegt wurden. Bezeichnet e_1 den unteren, e_2 den oberen Fadenabstand, h die mittlere Fadenlänge, P das Gewicht des Systems, τ die Dauer der halben Periode, so bestimmt sich das Trägheitsmoment M :

$$(11) \quad M_\beta = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot \tau_\beta^2}{4 h \cdot \pi^2} P.$$

Eine Drehung des Systems um 90° in den Drahtschlingen gestattete die Bestimmung von M_δ , das übrigens nur wenig von M_β verschieden war.

Überblick über die Beobachtungen.

Bestimmung der Trägheitsmomente M_β und M_δ aus (11):

$$\begin{aligned} e_1 &= 5,20 \text{ cm}, & e_2 &= 5,15 \text{ cm}, \\ \tau_\beta &= 8,045 \text{ sec}, & \tau_\delta &= 8,042 \text{ sec}, \\ h &= 71,10 \text{ cm}, & P &= 634,69 \text{ gr.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$M_\beta = 384\,600 \text{ cm}^2 \text{ gr}, \quad M_\delta = 384\,300 \text{ cm}^2 \text{ gr}.$$

Bestimmung der Elastizitätsmoduln s_2 und s_1 aus (5) und (10).

Die Breiten und Dicken der Stäbe wurden an sieben bis elf verschiedenen Stellen gemessen und für die Rechnung die Mittelwerte aus den erhaltenen Zahlen benutzt. Die Schwingungszahlen T_β und T_δ sind aus 6—8 Beobachtungen gefunden, bei denen jedesmal 30—35 Perioden gezählt wurden.

Eine der Messungen ergab folgende Zahlen:

$$B = 1,052 \text{ cm}, \quad D = 0,229 \text{ cm}, \quad L = 12,48 \text{ cm},$$

$$T_\beta = 0,813 \text{ sec}, \quad T_\delta = 1,177 \text{ sec}.$$

$$s = 11,03 \cdot 10^{-12} \text{ cm sec}^2 \text{ gr}^{-1}, \quad s_2 = 26,59 \cdot 10^{-12} \text{ cm sec}^2 \text{ gr}^{-1}.$$

Aus zwei weiteren Beobachtungen ergab sich:

$$s = 10,97 \cdot 10^{-12}, \quad s_2 = 26,58 \cdot 10^{-12},$$

$$s = 10,78 \cdot 10^{-12}, \quad s_2 = 26,36 \cdot 10^{-12}.$$

Man erhält daraus als Mittelwert für die Elastizitätsmoduln:

$$s = 10,93 \cdot 10^{-12} \text{ cm sec}^2 \text{ gr}^{-1}, \quad s_2 = 26,51 \cdot 10^{-12} \text{ cm sec}^2 \text{ gr}^{-1},$$

$$s_1 = \frac{1}{2}(2s - s_2) = -2,33 \cdot 10^{-12} \text{ cm sec}^2 \text{ gr}^{-1}.$$

Die Poissonsche Zahl $\mu = -s_1/s$ ergibt sich zu 0,21, das Verhältnis s_2/s zu 2,43. Diese Werte kommen demnach den von der älteren speziellen Elastizitätstheorie für isotrope Körper geforderten Werten von 0,25 und 2,5 ziemlich nahe, woraus eine erhebliche Rigidität der Substanz folgt.

Für die Elastizitätskonstanten gelten die Beziehungen:

$$c = \frac{4s - s_2}{s_2(3s - s_2)} = 103 \cdot 10^9 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2},$$

$$c_1 = \frac{s_2 - 2s}{s_2(3s - s_2)} = 27,9 \cdot 10^9 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2},$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(c - c_1) = \frac{1}{s_2} = 37,6 \cdot 10^9 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2}.$$

Für die elastischen Widerstände im technischen Maßsystem erhalten wir folgende Zahlen.

$$\text{Biegungswiderstand: } E = \frac{1}{s \cdot 981 \cdot 10^3} = 933\,000 \cdot \frac{\text{gr}}{\text{mm}^2},$$

$$\text{Drillungswiderstand: } D = \frac{1}{s_2 \cdot 981 \cdot 10^3} = 384\,000 \cdot \frac{\text{gr}}{\text{mm}^2}.$$

Zur näheren Charakterisierung dieser Substanz sei erwähnt, daß die für E und D gefundenen Zahlen mit zu den kleinsten bisher beobachteten gehören. Werte von dieser Größenordnung finden sich bei Holzarten. Von den Mineralien

kommt unserem Material in dieser Beziehung vielleicht Opal am nächsten mit seinen Zahlen: ¹⁾

$$E = 3\,880\,000 \frac{\text{gr}}{\text{mm}^2}, \quad D = 1\,830\,000 \frac{\text{gr}}{\text{mm}^2};$$

doch sind diese noch immer 4—5 mal so groß, wie die hier erhaltenen.

III. Die Festigkeitsversuche.

Bevor wir an die Schilderung der Festigkeitsversuche selbst gehen, müssen wir noch einige Bemerkungen vorausschicken.

Die Präparate zu den Versuchen sind, um ein genaues Urteil über alle dabei stattfindenden Umstände zu haben, sämtlich vom Verfasser selbst hergestellt. Das Material dazu war den unteren Partien des Gusses entnommen mit Hinweglassung der alleruntersten Schicht von 3—5 mm Dicke. Hergestellt sind sie auf der Drehbank, wie es nachher im einzelnen beschrieben werden wird. Bei der Anfertigung war aus den in der Einleitung angegebenen Gründen ein besonderes Augenmerk auf eine glatte und möglichst gleichartige Oberfläche gerichtet. Gegen früher im Göttinger physikalischen Institute angestellte Festigkeitsversuche ist von Hrn. Prof. Mohr das Bedenken ausgesprochen worden, daß durch die Bearbeitung eines nicht sehr festen Materiales auf der Drehbank keine gesunden Querschnitte und guten Oberflächen erzielt würden. ²⁾ Demgegenüber sei bemerkt, daß jedenfalls in unserem Falle die eingehende Untersuchung der Oberflächen und Querschnitte der Präparate keinen Anhaltspunkt für eine solche Vermutung ergeben hat. Die Randpartien der Querschnitte zeigten bei Betrachtung mit der Lupe dasselbe Aussehen wie die mittleren Partien; von einer gestörten Oberflächenschicht von 1 mm Dicke (die Hr. Mohr für möglich erklärt) kann auch nicht entfernt die Rede sein.

Die Oberflächen waren immer glatt, wenn nur der benutzte Drehstahl recht scharf und der abzdrehende Span nicht zu klein war. Im anderen Falle vibrierte das Präparat leicht und erhielt dadurch eine geriefelte Oberfläche.

Zum Messen der *zylindrischen* Präparate diente ein Dicken-

¹⁾ W. Voigt u. P. Drude, Wied. Ann. 42. p. 537. 1891.

²⁾ O. Mohr, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 21. p. 742. 1901.

messer, der die halben Hundertstel Millimeter noch abzulesen gestattete, für die Präparate mit *wechselndem* (nach der Mitte verjüngten) Querschnitt ein Mikrometer mit Fadenkreuz, mit welchem man bis auf 2—3 Tausendstel Millimeter genau ablesen konnte. Nach einiger Übung gelang es leicht, den kleinsten Querschnitt der sich nach der Mitte zu verjüngenden Präparate herauszufinden. Bei der Besprechung der elastischen Eigenschaften der Substanz wurde erwähnt, daß eine merkbare elastische Nachwirkung vorhanden war. Die Versuche wurden daher so angestellt, daß die zum Zertrümmern der Präparate erforderlichen Spannungen rasch bis zu ihren Grenzwerten gesteigert wurden. Die im folgenden beschriebenen Apparate gestatteten im allgemeinen ein derartig schnelles Operieren. Dadurch wurden dauernde Deformationen vermieden. Bei einigen Präparaten wurde nach dem Experiment der Querschnitt noch einmal gemessen. Die sich ergebenden Abweichungen von der ersten Messung fielen in das Bereich der Beobachtungsfehler und waren teils positiv, teils negativ. Daß keine bleibenden Deformationen eintraten, wird auch dadurch wahrscheinlich gemacht, daß die Bruchstücke der Zug-, Torsions- und Bieungspräparate stets so vollkommen aneinander paßten, daß der Riß nur mit Mühe zu sehen war.

Im vorigen Kapitel ist bereits erwähnt worden, daß die Temperaturschwankungen besondere Berücksichtigung verlangten. Auf die Resultate der Festigkeitsbeobachtungen schienen schon Schwankungen von 2—3° C. einen störenden Einfluß zu haben. Es wurde daher jedes fertig gedrehte und gemessene Präparat in einem Glasgefäß verschlossen des Nachts in Wasser von 0° gekühlt. Am Morgen wurden dann die Beobachtungen möglichst gleichmäßig rasch vorgenommen.

A. Die Druckversuche.

Die Druckpräparate waren kleine, im Zentrierfutter gedrehte Zylinderchen von 0,8 cm Höhe und 0,8—1,3 cm Durchmesser. Um einen möglichst genauen Parallelismus der Endflächen zu erzielen, wurden die Präparate bei der Herstellung auf der Drehbank nicht umgespannt, sondern nach Fertigstellung des Zylindermantels und der rechten Endfläche mit einem sogenannten Linksstahl in der angegebenen Länge abgestochen.

Der Druckapparat bestand aus einem Messingrohr R , in das zwei Stahlstempel S_1 und S_2 mit polierten Endflächen eingeschliffen waren, zwischen die das Präparat zentrisch gestellt wurde (Fig. 3). Der untere Stempel stand auf einem Eisenfundament E , unter dem ein Hebel H hindurchging. Vermittelt des aus Stahlstücken zusammengeschrubten Rahmens TT wurde, wie die Figur zeigt, die vom Hebel ausgeübte Druckkraft auf den oberen Stempel übertragen. Oben wie unten waren die Verbindungen durch Spitzen hergestellt, die in Körnerschläge eingriffen. Am Hebelende war ein Dynamometer eingehängt, welches die mit der Hand ausgeübte Druck-

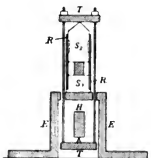


Fig. 3. (1:3)

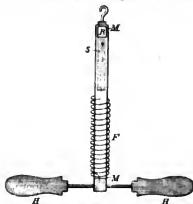


Fig. 4. (1:4)

kraft anzeigte. Das Dynamometer war für diese Zwecke besonders angefertigt worden, nachdem sich die käuflichen Federwagen als unbrauchbar erwiesen hatten (Fig. 4). Eine aus bestem Stahl zylindrisch gewickelte Feder F war an ihrem einen Ende mit zwei Handgriffen HH versehen, an ihrem anderen mit einer zylindrischen Skala S verschraubt, auf der ein kleiner Ring R verschiebbar angebracht war. Die Feder umfaßte eine Hülse M , die ebenfalls mit deren unterem Ende fest verbunden war und durch einen Längsschlitz die in ihrem Innern befindliche Skala S erkennen ließ. Wurde die Feder durch einen Zug mit den Händen ausgedehnt, so nahm die Hülse den Ring mit, der beim Zurückgehen der Feder auf der Skala stehen blieb. Die Grenzspannung war dann gleich der beim Bruch vom Dynamometer angezeigten Kilogrammzahl,

multipliziert mit dem Übersetzungsverhältnis des Hebels (11,59) und vermehrt um das Gewicht des Hebels (10,5 kg) bezogen auf die den Druck ausübende Stelle. Bei den Druckversuchen wurde nach dem von Hrn. Prof. Föppl angegebenen Verfahren ¹⁾ zwischen Preßstempel und Präparat ein Schmiermittel gebracht, um die Reibung zu vermindern, und zwar erwies sich Petroleum als das brauchbarste. Dickflüssigere Öle, Vaseline und Talg blieben nicht am Präparat haften, sondern wurden bei einer gewissen Belastung herausgedrückt.

Um nach erfolgter Zertrümmerung der Präparate die Gestalt der Bruchstücke studieren zu können, mußte verhindert werden, daß der nach unten schlagende Hebel diese zwischen den Preßstempeln weiter zertrümmerte. Zu diesem Zwecke war in das Stativ des Apparates eine vertikal stehende Schraube eingedreht, von deren Kopf der Hebel aufgefangen wurde. Die Schraube wurde so weit nach oben gedreht, daß sofort nach erfolgtem Bruch der Hebel aufschlug.

Die Bruchflächen verliefen meistens nicht so, wie man auf Grund anderer mit spröden Substanzen angestellten Versuche hätte erwarten sollen. Präparate aus Steinsalz zerbrachen durch vertikale Sprünge in zahlreiche Prismenelemente. Präparate aus Glas und einem Gemisch von Stearin- und Palmitinsäure zerfielen in eine sehr große Zahl feiner Bruchstücke. ²⁾ Ein ausschließlich vertikaler Verlauf der Bruchflächen konnte bei unseren Versuchen nur einige Male konstatiert werden. In den meisten Fällen zerbrachen die Präparate zunächst durch schräg verlaufende Sprungflächen so, daß oben zwei gegenüber liegende Teile des Präparates abgeschoben wurden und ein keilförmiges Stück übrig blieb. Dieses zerfiel bei den Präparaten mit größeren Querschnitten weiter durch vertikale Sprünge und blieb bei den dünneren Präparaten meistens unversehrt erhalten.

Der Grund für dieses abweichende Verhalten kann mit Sicherheit nicht angegeben werden. Es ist möglich, daß das die Preßstempel führende Rohr *R* (vgl. Fig. 3) trotz seiner erheblichen Wandstärke infolge nicht ganz gleichförmiger Unterstützung sich gelegentlich ein wenig gebogen hat. Obgleich

1) A. Föppl, Mitteilungen aus dem mech.-technischen Laboratorium der technischen Hochschule in München 27. Heft. 1900.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. p. 567. 1901.

auf die Herstellung des Druckapparates viel Sorgfalt verwendet worden war, konnte ein ganz gleichartiges Verhalten der Präparate beim Bruch nicht erzielt werden. Man wird daher wohl sagen können, daß infolge exzentrischen Druckes die Spannungen sich nicht absolut gleichförmig über den Querschnitt verteilten. Jedenfalls hat — und das ist für die Beurteilung der erhaltenen Zahlen nicht unwichtig — eine Abhängigkeit der Grenzspannung von der Orientierung der Sprungflächen nicht nachgewiesen werden können.

Über die Beobachtungen selbst gibt die folgende Tab. 1 Aufschluß.

Tabelle I.

Nr.	Durchmesser mm	Querschnitt qmm	Grenzspannung kg	$\frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$
1	12,80	128,7	446,8	3,47
2	12,88	130,3	419,6	3,22
3	12,88	130,3	432,4	3,32
4	12,75	127,9	420,8	3,29
5	12,90	130,7	434,7	3,33
6	12,00	113,1	382,5	3,38
7	11,95	112,2	395,8	3,52
8	12,15	115,9	389,5	3,36
9	11,00	95,1	314,2	3,30
10	11,18	98,2	315,3	3,21
11	11,20	98,6	308,4	3,13
12	11,15	97,7	315,3	3,23
13	9,88	76,7	268,2	3,43
14	10,00	78,6	272,4	3,46
15	9,85	76,2	244,6	3,21
16	9,95	77,8	270,1	3,47
17	8,95	68,0	205,2	3,26
18	8,95	63,0	212,2	3,37
19	8,75	60,2	197,1	3,27
20	8,85	61,5	186,7	3,04
21	8,08	51,3	171,6	3,35
22	8,05	50,9	173,9	3,42
23	8,10	51,5	163,5	3,18
24	8,00	50,3	162,3	3,25

Mittel: $3,31 \pm 0,01$ $\frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$

B. Die Zugversuche.

Die zur Anstellung der Zugversuche erforderlichen Präparate sind aus 5 cm langen prismatischen Stücken der Substanz nach folgendem Verfahren hergestellt. Im Zentrierfutter wurden die Stücken rund gedreht und hierauf die für die Zugversuche dienenden Fassungen laufend aufgepaßt. Diese Fassungen hatten die in Fig. 5 in etwa zwei Drittel natürlicher Größe wiedergegebene Gestalt: auf einem kurzen Hohlzylinder von etwa 1 cm Länge saß ein rechteckiger oben laufend durchbohrter Bügel. Die zwischen Spitzen eingesetzten Präparate wurden so gedreht, daß sie sich nach der Mitte zu ein wenig verjüngten. Diese Gestalt brachte manche Vorteile mit sich. Bei einem zylindrischen Präparat hätte man infolge der Schwächung der Substanz durch die Fassungen ein Reißen des Präparates an einer Fassung befürchten müssen, da an diesen leicht Beschädigungen der Präparate eintreten. Dieser Fall trat auch einmal bei einem Präparat ein, das sich zu wenig nach der Mitte zu verjüngte. Durch die Verjüngung wurde zugleich noch erreicht, daß etwa vorhandene Inhomogenitäten sich in minder störender Weise bemerkbar machten. Denn es war nicht sehr wahrscheinlich, daß die eine oder andere Inhomogenität gerade in den kleinsten Querschnitt zu liegen kam.



Fig. 5. (2:3)

Damit die Präparate bei dem Zug nicht aus den Fassungen herausrutschten, wurde auf jeder Fassung eine Kappe befestigt (in Fig. 6 schraffiert gezeichnet), deren übergreifender Rand das Präparat festhielt. Da diese Kappen erst nach Fertigstellung des Präparates aufgeschraubt werden konnten, mußte jede durch einen Längsschnitt in zwei Hälften zerlegt werden, die dadurch zusammengehalten wurden, daß ein Ring r über die Kappe geschraubt wurde.

Die Präparate wurden zwischen Spitzen zerrissen, die in dieselben Bohrungen eingriffen, in denen auch die Spitzen des Drehbankfutters und des Reitstockes gesessen hatten. Durch dieses Verfahren war gewährleistet, daß die Richtung der äußeren Kraft so genau mit der Achse der Präparate zusammenfiel, als dies überhaupt herzustellen möglich ist. Hier-

durch war eine gleichförmige Verteilung der Spannungen über den Querschnitt der Präparate sehr vollkommen erzielt.

Die Belastung geschah auf zweierlei Weise. Zehn Präparate sind mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Dynamometer, 15 durch direkte Belastung mit Gewichten zerissen. In die Fassungen wurden zu diesem Zweck geeignete mit den Spitzen S_1 und S_2 (Fig. 6) versehene Haken eingehängt, an deren unterem im ersten Falle das Dynamometer, im zweiten eine Gewichtsschale hing. Letztere trug dann schon anfangs etwa Dreiviertel der zum Zerreißen erforderlichen Last. Eine Arretierungsvorrichtung ermöglichte ein stoßfreies Anhängen dieser Gewichtsschale. Die weitere Belastung erfolgte durch zulaufendes Schrot. Die Schrotkugeln fielen aus geringer Höhe in ein auf der Gewichtsschale stehendes Gefäß, das mit Watte ausgelegt war, um den Stoß der auffallenden Schrotkugeln möglichst abzuschwächen.



Fig. 6. (2:3)

Im Augenblick des Reißens wurde durch eine automatische Vorrichtung der Schrotzufluß abgestellt. Das erste Verfahren lieferte einen allerdings nur sehr wenig höheren Mittelwert. Hierfür sind mehrere Gründe denkbar. Entweder haben die geringen Stöße der auffallenden Schrotkugeln doch etwas zum vorzeitigen Zerreißen der Präparate beigetragen, oder es hat die Temperatur der Umgebung, die meistens 10—14 °C. betragen hat, wegen der etwas längeren Dauer der Versuche Einfluß auf die Festigkeit der Substanz gehabt. Dazu kommt noch, daß überhaupt die längere Dauer eines Festigkeitsversuches unabhängig von der Temperatur einen geringeren Wert der Maximalspannung zur Folge hat.¹⁾ Wahrscheinlich werden alle genannten Umstände zu berücksichtigen sein, um den Unterschied zwischen den beiden Mittelwerten zu erklären. Die zweite Methode, die aus den angegebenen Gründen einige Nachteile hatte, wurde gewählt, weil die Ablesungen am Dynamometer zu unsicher waren; schon die Zehntel-Kilogramme mußten geschätzt werden.

Die bei beiden Beobachtungsmethoden erzielten Bruchflächen waren vollständig glatt und verliefen im kleinsten Querschnitt senkrecht zur Achse der Präparate. Diese Beobachtungen

1) Vgl. C. v. Bach, *Elastizität und Festigkeit* p. 30. Berlin 1890; C. Brodmann, *Göttinger Nachrichten* p. 44. 1894.

bestätigten demnach nicht die Theorie des Hrn Prof. Mohr ¹⁾, auf die im vierten Kapitel noch zurückzukommen sein wird. Diese Theorie verlangt Bruchflächen, die nur angenähert mit einem Querschnitt zusammenfallen, und niedrige Kanten und Pyramiden zeigen.

Die Resultate der Beobachtungen sind in der folgenden Tab. II niedergelegt.

Tabelle II.

Nr.	Radius mm	Querschnitt qmm	Belastung kg	$\frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$	
1	2,615	21,50	13,2	0,61	Mittel von 1—10 = 0,57
2	2,665	22,31	13,4	0,60	
3	2,750	23,76	11,9	0,50	
4	2,198	15,18	9,6	0,63	
5	2,647	22,03	10,5	0,48	
6	2,69 ³	22,79	13,7	0,60	
7	3,031	28,88	16,2	0,56	Mittel von 11—25 = 0,54
8	2,380	17,79	10,6	0,59	
9	2,741	23,60	14,2	0,60	
10	3,012	28,51	14,7	0,52	
11	2,873	25,93	14,91	0,57	
12	2,703	22,97	12,61	0,55	
13	2,586	21,03	12,38	0,59	
14	2,711	23,10	13,51	8,58	
15	2,640	21,91	13,68	0,62	
16	2,71 ⁹	23,28	11,68	0,50	
17	2,865	25,80	12,92	0,50	
18	2,565	20,68	10,83	0,52	
19	2,250	15,90	9,44	0,59	
20	2,28 ⁹	16,47	8,26	0,50	
21	2,442	18,75	10,09	0,54	
22	2,388	17,91	9,89	0,55	
23	2,852	25,55	12,72	0,50	
24	2,648	22,03	10,59	0,48	
25	2,58 ³	20,96	9,81	0,47	

Gesamtmittel: $0,550 \pm 0,0067 \frac{\text{kg}}{\text{qmm}}$

1) O. Mohr, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 44. p. 1524. 1900; 21. p. 740. 1901.

C. Die Torsionsversuche.

Die Länge der Präparate und ihre Herstellungsweise war die gleiche wie bei den Zugpräparaten. Sie erhielten nur abweichend von den früher benutzten in der Mitte einen zylindrischen Teil, damit sich die zu erwartende ausgedehnte Sprungfläche auf ein Stück konstanten Querschnittes verteilen konnte. Die verwendeten Fassungen hatten an Stelle des vorhin erwähnten Bügels einen vierkantigen, laufend durchbohrten Ansatz, der dazu diente, das Präparat in geeigneter Weise zu befestigen.

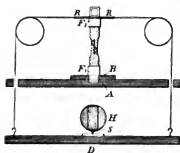


Fig. 7. (1:4)

Auf einem Brett *A* war ein Messigstück *B* aufgeschraubt, das in der Mitte ein quadratisches Loch hatte (Fig. 7). In dieses paßte die Fassung *F*₁ hinein. Auf die obere Fassung *F*₂ wurde ein Rad *R* (mit einem Radius von 40 mm) gesetzt, das ebenfalls mit einem quadratischen Loch versehen war. Zwei an dem Rad befestigte Fäden gingen von dessen Peripherie über zwei Rollen nach unten zur Leiste *D*. Diese Leiste wurde mit Hilfe eines nachher näher zu beschreibenden Hebels *H* allmählich belastet. Dadurch wurde auf das obere Ende des Präparates ein wachsendes Drehmoment ausgeübt, bis der Bruch erfolgte. Die Bruchfläche selbst zeigte die schon oft beschriebene schraubenförmige Gestalt in stets regelmäßiger Ausbildung. Sie war begrenzt von einer unter einer Neigung von 45° spiralgig sich aufwindenden Linie, die nach Vollendung eines Umlaufes parallel der Achse abfällt.

Der Hebel *H*, der in der Fig. 7 nur im Querschnitt zu sehen ist, bestand aus einem Messingrohr, das zur Verhinderung der Durchbiegung mit einem auf Hochkant gestellten Eisenstab versteift war. Die Belastung des Hebels erfolgte durch langsames Vorrollen einer Gewichtsschale. Diese hing an einer auf dem Hebel laufenden Rolle, die durch zwei dem Hebel parallel gehende Fäden mit Hilfe einer Kurbel vorgezogen werden konnte. Diese Vorrichtung gestattete eine stoßfreie

und gleichmäßig sich steigernde Belastung. Das Gewicht des Hebels selbst wurde durch ein Gegengewicht aufgehoben. Auf dem Hebel war eine Teilung angebracht, deren Nullpunkt mit der Achse des Hebels zusammenfiel. Auf dem Teilstrich 100 war eine Spitze *S* (Fig. 7) angeschraubt, die in einen Körnerschlag auf der Leiste *D* eingriff.

Die folgende Tab. III enthält die Torsionsbeobachtungen.

Tabelle III.

Nr.	Radius mm	Drehmoment kg mm	Drehmoment Radius ³
1	2,875	31,40	1,82
2	3,04 ³	32,28	1,15
3	3,47 ³	47,48	1,13
4	2,930	35,56	1,41
5	3,005	30,24	1,12
6	2,928	32,12	1,28
7	3,10 ⁵	34,20	1,12
8	3,225	40,88	1,22
9	2,920	31,92	1,28
10	2,580	21,56	1,26
11	2,683	25,64	1,33
12	3,006	33,40	1,23
13	2,940	36,12	1,42
14	2,920	31,50	1,42
15	3,08 ³	39,00	1,38
16	2,936	32,12	1,27
17	2,623	24,00	1,33
18	2,844	27,56	1,20
19	2,82 ³	25,92	1,15
20	2,650	21,84	1,17
21	3,090	39,92	1,36
22	2,85 ³	30,96	1,33
23	2,840	32,68	1,42
24	2,920	29,28	1,17
25	3,013	35,68	1,31

Mittel: 1,27₁

$$\pm 0,012 \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{(\text{mm})^3}$$

Tabelle IV.

Nr.	Radius mm	Drehmoment kg mm	Drehmoment Radius ³
1	2,573	14,70	0,863
2	2,54 ³	14,70	0,892
3	2,569	13,70	0,808
4	2,735	16,97	0,828
5	2,789	16,38	0,753
6	2,90 ⁴	17,96	0,734
7	2,89 ³	18,89	0,777
8	2,836	19,81	0,869
9	2,553	13,85	0,832
10	2,749	17,04	0,820
11	2,639	14,70	0,800
12	2,660	14,84	0,844
13	2,517	13,35	0,837
14	2,686	14,91	0,770
15	2,827	17,61	0,780
16	2,883	15,98	0,667
17	2,719	14,41	0,717
18	2,114	6,39	0,676
19	2,691	15,12	0,777
20	2,618	18,49	0,756
21	2,56 ³	13,85	0,824
22	2,649	13,99	0,753
23	2,47 ³	12,99	0,860
24	2,641	12,28	0,666
25	2,617	14,91	0,832

Mittel: 0,789₄

$$\pm 0,0085 \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{(\text{mm})^3}$$

D. Die Biegungsversuche.

Bezüglich der Herstellung der Biegungspräparate kann auf das im Abschnitt B. Gesagte verwiesen werden. In die Bohrungen der Fassungen ließen sich Messingstäbe M_1 M_2 von 7,5 cm Länge einschrauben, die, wie die Fig. 8 zeigt, mit angefeilten Flächen L_1 L_2 versehen waren derart, daß die Achse des Präparates in diesen Flächen verlief. Mit den Flächen wurden die Präparate auf Schneiden S_1 S_2 gelegt, die auf einem Brett A verschiebbar angebracht waren. Es war übrigens Sorgfalt darauf verwendet worden, daß die Präparate gleiche Länge erhielten und der Abstand der Schneiden stets

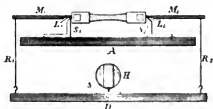


Fig. 8. (1:8)

7,6 cm betrug. Am Ende der Messingstäbe waren Nuten eingedreht, in die die Leiste D mit den Haken R_1 R_2 eingehängt wurde. Genau wie im vorigen Abschnitt beschrieben ist, wurde auch hier die Belastung der Leiste D ausgeführt. Es entstand so um die Schneiden S ein Drehmoment, das den Bruch herbeiführte. Dieses Drehmoment berechnete sich aus dem Produkt der am Ende eines Messingstabes wirkenden Kraft und der Länge des Hebelarmes (71 mm).

Die Bruchflächen waren auch hier vollkommen glatt und verliefen senkrecht zur Achse im kleinsten Querschnitt. Um ein sicheres Zerbrechen der Präparate im kleinsten Querschnitt zu erreichen, waren diese so gedreht, daß sie sich von beiden Fassungen aus gleichmäßig nach der Mitte zu verjüngten.

Die Beobachtungsergebnisse finden sich in Tab. IV (p. 1039).

IV. Die theoretische Verwertung der gewonnenen Resultate.

In diesem Kapitel wollen wir die gefundenen Resultate zu einer Prüfung der wichtigsten Festigkeitstheorien verwenden.

Wir orientieren die Präparate so zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem, daß ihre Achse mit der Z -Richtung zusammenfällt. Für Druck- und Zugbeanspruchung fallen die maximalen Spannungen mit der Hauptspannung Z_1 zusammen und bestimmen sich durch die Quotienten aus wirkender Kraft und Querschnitt. Auch im Falle der Biegung geht die Maximalspannung der Z -Achse parallel und erreicht ihren größten Wert gleich dem $4/\pi$ -fachen Quotienten aus Moment und dritter Potenz des Radius im höchsten Punkt des kleinsten Querschnittes. Die bei der Torsionsbeanspruchung auftretenden Maximalspannungen Z_2 finden in der Oberfläche statt. Ihre Richtung ist normal zu einem betrachteten Radius und um 45° gegen die Z -Achse geneigt. Nach den allgemeinen Torsionsformeln wird ihr Wert gleich dem $2/\pi$ -fachen Quotienten aus Moment und dritter Potenz des Radius.

Die Berechnung ergibt für die Maximalspannungen folgende Werte in absoluten Einheiten:

1. Druck: $Z_1 = 3,31 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2},$
 $= 3,31 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 981 = 3250 \cdot 10^5 \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2},$
2. Zug: $Z_1 = 0,55 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2},$
 $= 0,55 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 981 = 540 \cdot 10^5 \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2},$
3. Torsion: $Z_2' = \frac{2 N}{r^3 \pi}, \quad \frac{N}{r^3} = 1,27 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3},$
 $Z_2' = 2 \cdot 1,27 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 981 \cdot \frac{1}{\pi} = 793 \cdot 10^5 \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2},$
4. Biegung: $Z_2 = \frac{4 M}{r^3 \pi}, \quad \frac{M}{r^3} = 0,789 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3},$
 $Z_2 = 4 \cdot 0,789 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 981 \cdot \frac{1}{\pi} = 986 \cdot 10^5 \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{sec}^2}$

Wie schon viele andere Untersuchungen, so bestätigen auch unsere Zahlen *nicht* die auf Clebsch zurückgehende Annahme¹⁾, daß für die Zertrümmerung eines Materiales eine der Substanz individuelle Maximalspannung unabhängig von ihrer Orientierung zur Bruchfläche nötig sei. Die Maximal-

1) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper p. 134. Leipzig 1862.

spannung bei Druck ist z. B. etwa 6 mal größer als bei Zug, und diese Differenzen lassen sich durch die Annahme einer Nichterfüllung des Hooke'schen Gesetzes durch die benutzte Substanz in keiner Weise beseitigen.

Eine andere von Thomson und Tait ausgesprochene Ansicht¹⁾, daß nämlich die *Differenzen* zwischen den größten und kleinsten Hauptspannungen einen maximalen Wert erreichen, ist gleichfalls mit unseren Resultaten nicht vereinbar. Die kleinsten Hauptspannungen sind in den Fällen 1, 2, 4 praktisch gleich Null, die Differenzen werden also hier den Maximalspannungen gleich; im Falle 3 sind sie den Maximalspannungen entgegengesetzt gleich, die Differenzen also mit dem Doppelten der Maximalspannungen identisch.

Ebensowenig läßt sich nachweisen, daß die *Energie* bei allen Arten der Beanspruchung konstant sei. Der Wert des elastischen Potentials φ' zeigt sofort die Unhaltbarkeit auch dieser Annahme:

$$2\varphi' = s_1(X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2) + s_2(X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 + 2(Y_x^2 + Z_x^2 + X_y^2)).$$

Diese Gleichung vereinfacht sich für den ersten, zweiten und vierten Fall zu

$$(1) \quad 2\varphi' = (s_1 + s_2)Z_z^2.$$

Der dritte Fall verlangt:

$$(2) \quad 2\varphi' = 2s_2'Z_z^2.$$

Da die für die verschiedenen Arten der Beanspruchung erhaltenen Werte von Z_z verschieden sind, so kann nach Gleichung (1) niemals das elastische Potential und somit die Energie einen konstanten Wert für Druck, Zug oder Biegung annehmen. Auch Gleichung (2) liefert keinen Wert für φ' , der mit einem der aus Gleichung (1) zu erhaltenden übereinstimmt.

Wir wenden uns nun der Besprechung der aus neuester Zeit stammenden Theorie des Hrn. Prof. Mohr²⁾ zu.

Dieser Theorie liegt die Annahme zu Grunde, daß die Bruchgrenze eines Materiales bestimmt wird durch die „Spannungen der Bruchflächen“ und daß jede in einem Körperpunkte entstehende Bruchfläche durch die Richtung der mittleren

1) W. Thomson u. P. G. Tait, *Natural Philosophy* 1. p. 832. 1883.

2) O. Mohr, *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure* 44. p. 1524. 1900; 21. p. 740. 1901.

Hauptspannung geht. Die Trennungsfläche steht somit senkrecht auf der Ebene der größten und kleinsten Hauptspannung, und es sind theoretisch jederzeit zwei einander gleichwertige Trennungsflächen möglich, die symmetrisch zu den extremen Hauptspannungen liegen. Für jede Substanz gibt es nun eine Beziehung $f(\sigma, \tau)$ zwischen der Normalspannung σ und der Tangentialspannung τ gegen die Grenzfläche, die nur Parameter enthält, die der Substanz individuell sind. $f(\sigma, \tau)$ ist negativ vor dem Bruch und verschwindet beim Bruch. Führt man ein Koordinatensystem σ, τ ein, so stellt: $f(\sigma, \tau) = 0$ eine Kurve dar, die etwa die in Fig. 9 gezeichnete Gestalt hat. Für alle Punkte innerhalb der Kurve gilt: $f(\sigma, \tau) < 0$, und diese Punkte entsprechen allen in dem noch unbeschädigten Körper möglichen Spannungszuständen, während die Punkte der Kurve selbst für den Zerfall maßgebend sind. Konstruiert man in einem Punkte G der Kurve die Tangente, so ist die Hälfte des Winkels φ , den die Tangente mit der $-\tau$ -Achse bildet, die Neigung einer der möglichen Trennungsflächen gegen die kleinste Hauptspannung. Errichtet man in G ein Lot, das die σ -Achse in A trifft und schlägt mit dem Radius AG um A als Zentrum einen Kreis, so erhält man die Punkte X und Z auf der σ -Achse, und OX und OZ sind dann die kleinste und größte Hauptspannung in dem Punkte G (Druckspannungen sind negativ gerechnet), während man durch die Konstruktion über die mittlere Hauptspannung keinen Aufschluß erhält. Für die Bestimmung dieser Hüllkurve gibt die Erfahrung wenig Anhaltspunkte. Trägt man auf der σ -Achse die größten möglichen Hauptspannungen, die Zugfestigkeit K_1 und die Druckfestigkeit $-K_2$, auf und errichtet über den Strecken als Durchmesser zwei Kreise, so muß die Hüllkurve diese beiden Kreise tangieren. Und ohne großen Fehler wird man nach Mohr die beiden gemeinschaftlichen äußeren Tangenten als Teile der Bruchgrenzkurve ansehen dürfen. Ein um den Anfangspunkt

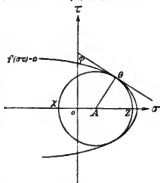


Fig. 9.

einer der möglichen Trennungsflächen gegen die kleinste Hauptspannung. Errichtet man in G ein Lot, das die σ -Achse in A trifft und schlägt mit dem Radius AG um A als Zentrum einen Kreis, so erhält man die Punkte X und Z auf der σ -Achse, und OX und OZ sind dann die kleinste und größte Hauptspannung in dem Punkte G (Druckspannungen sind negativ gerechnet), während man durch die Konstruktion über die mittlere Hauptspannung keinen Aufschluß erhält. Für die Bestimmung dieser Hüllkurve gibt die Erfahrung wenig Anhaltspunkte. Trägt man auf der σ -Achse die größten möglichen Hauptspannungen, die Zugfestigkeit K_1 und die Druckfestigkeit $-K_2$, auf und errichtet über den Strecken als Durchmesser zwei Kreise, so muß die Hüllkurve diese beiden Kreise tangieren. Und ohne großen Fehler wird man nach Mohr die beiden gemeinschaftlichen äußeren Tangenten als Teile der Bruchgrenzkurve ansehen dürfen. Ein um den Anfangspunkt

als Zentrum geschlagener Kreis, der die Tangenten ebenfalls berührt, veranschaulicht den Fall entgegengesetzt gleicher Hauptspannungen. Der Radius dieses Kreises ist gleich der Drehfestigkeit K_3 und angenähert gleich $K_1 K_2 / (K_1 + K_2)$.

Unsere Zahlen genügen dieser Gleichung nicht; K_3 wird nach dieser Formel ungefähr $500 \cdot 10^5 \text{ g/cm sec}^2$, also im Vergleich mit der Beobachtung viel zu klein. Dasselbe zeigt die graphische Darstellung. Konstruiert man mit den Radien $K_1/2$

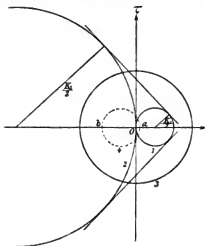


Fig. 10.

und $K_2/2$ die in Fig. 10 gezeichneten Kreise 1 und 2, die bei Berücksichtigung des seitlichen Druckes von einer Atmosphäre die σ -Achse ein klein wenig links vom Anfangspunkte schneiden, so sollten die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten nahezu auch den um O als Zentrum beschriebenen Kreis 3 mit dem Radius K_3 berühren. Die Figur zeigt, daß dies nicht geschieht; der Torsionskreis umfaßt den Zugkreis vollständig.

Im Göttinger physikalischen Institut sind vor einiger Zeit Versuche mit einem Piezometer gemacht worden, in welchem unter allseitigem Druck von flüssiger Kohlensäure Präparate aus Steinsalz und aus einem Gemisch von Stearin- und Palmitinsäure zerrissen worden sind.¹⁾ Das übereinstimmende Resultat dieser Versuche war, daß das Zerreißen bei demselben Überschuß der longitudinalen über die transversale innere Spannung des Präparates eintrat. Leider konnten diese Beobachtungen nicht mit unserer Substanz wiederholt werden, da die Kohlensäure bei 0° — und bei dieser Temperatur hätten die Versuche angestellt werden müssen — zu geringen Druck hat. Wenn wir aber, was bei der verwandten Natur der von uns benutzten Substanz mit einer der früher verwendeten zulässig

1) W. Voigt, Wied. Ann. 53. p. 43. 1894; 67. p. 452. 1899.

erscheint, annehmen, daß auch beim Zerreißen eines Präparates aus dem neuen Material die Differenz zwischen der longitudinalen und transversalen Spannung konstant bleibt, so werden wir daraus schließen dürfen, daß Spannungszustände möglich sind, bei denen der Kreis 1 in Fig. 10 (innerhalb gewisser Grenzen) jede beliebige Lage annehmen kann, die durch Verschiebung dieses Kreises auf der σ -Achse nach links erhalten wird. Wenn wir z. B. einen äußeren Druck von 50 Atmosphären haben, so müßte, da wir eine Zugfestigkeit von 55 Atmosphären bei einer Atmosphäre seitlichen Druckes erhalten haben, die Zugfestigkeit jetzt noch 6 Atmosphären betragen.

In Fig. 8 tragen wir demnach vom Anfangspunkte aus auf der σ -Achse nach rechts 6 Atmosphären bis a , nach links 50 Atmosphären bis b ab und errichten über der Strecke ab als Durchmesser einen Kreis. Dieser Kreis 4, der in der Figur punktiert gezeichnet ist, veranschaulicht dann einen der möglichen Spannungszustände; er berührt natürlich die durch die Tangenten annähernd bestimmte Hüllkurve nicht.

Wir berechnen nun die lineären Dilatationen, um auch an diese Werte einige Bemerkungen zu knüpfen.

Druck:

$$\begin{aligned} z_x &= -s Z_1 = -10,93 \cdot 10^{-12} \cdot 3250 \cdot 10^5 = -355 \cdot 10^{-5}, \\ x_x = y_y &= -s_1 Z_1 = 2,33 \cdot 10^{-12} \cdot 3250 \cdot 10^5 = +75,7 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Zug:

$$\begin{aligned} z_x &= s Z_2 = 10,93 \cdot 10^{-12} \cdot 540 \cdot 10^5 = +59,0 \cdot 10^{-5}, \\ x_x = y_y &= s_1 Z_2 = -2,33 \cdot 10^{-12} \cdot 540 \cdot 10^5 = -12,6 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Torsion: Von den hier auftretenden Hauptdilatationen liegt eine normal zur Sprungfläche, die andere dieser parallel. Entsprechend einem Koordinatensystem, dessen Y' -Achse einem betrachteten Radius parallel läuft und dessen Z' - und X' -Achse auf diesem senkrecht stehen, nennen wir diese Dilatationen z'_x und x'_x . Ihre Werte berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} z'_x \text{ (normal zur Sprungfläche)} &= \frac{1}{2} s_2 Z'_2, \\ x'_x \text{ (parallel der Sprungfläche)} &= -\frac{1}{2} s_2 Z'_2, \\ z'_x = -x'_x &= \frac{1}{2} s_2 Z'_2 = \frac{1}{2} \cdot 26,59 \cdot 10^{-12} \cdot 793 \cdot 10^5 = 105 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Biegung:

$$\begin{aligned} x_x = y_y &= s_1 Z_3 = -2,33 \cdot 10^{-12} \cdot 986 \cdot 10^5 = -23,0 \cdot 10^{-5}, \\ z_x &= s Z_3 = 10,93 \cdot 10^{-12} \cdot 986 \cdot 10^5 = +108 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Diese Zahlen zeigen, daß auch die vielbenutzte wohl auf Mariotte und Saint Venant zurückgehende Annahme¹⁾, daß die lineären Dilatationen senkrecht zur Trennungsfläche bei der Zertrümmerung einen konstanten Wert erreichen, mit unseren Beobachtungen *nicht* im Einklang ist. Die Differenzen durch die Annahme einer Abweichung der benutzten Substanz vom Hookeschen Gesetze zu erklären, dürfte um so weniger möglich sein, als nach p. 15 Andeutungen solcher Abweichungen nicht beobachtet sind.

Eine nähere Untersuchung zeigt schließlich, daß sich auch keine lineare Beziehung zwischen den Hauptdilatationen finden läßt, die bei der Zertrümmerung einen dem untersuchten Material individuellen Grenzwert annimmt.

Am Schlusse der Arbeit spreche ich Hrn. Geheimrat Voigt für das lebhafteste Interesse an dem Fortgange der Untersuchungen sowie für vielfache Unterstützung mit Rat und Tat meinen ehrerbietigsten und wärmsten Dank aus.

Ferner danke ich Hrn. Prof. Kaufmann herzlich für die mir auch von seiner Seite zu teil gewordene Förderung meiner Arbeit.

1) E. Mariotte, *Oeuvres* p. 455. 1740; De Saint Venant, *Sav. étr.* 14. p. 233. 1856.

(Eingegangen 18. April 1903.)

7. Wärmeleitung in Flüssigkeiten; von Robert Weber.

1. Die theoretische Grundlage.

Wenn man einen Körper bezüglich der Wärmeleitung den Bedingungen unterwirft, welche dem Falle von Fouriers unbegrenzter Mauer entsprechen, so besteht bekanntlich die Beziehung

$$(1) \quad Q = k \frac{S(T-t)}{D} \cdot Z,$$

worin k den inneren Leitungskoeffizienten, S die Größe der von der Wärme durchsetzten Fläche, T und t die Temperaturen der beiden Begrenzungsflächen, D deren Entfernung und Q die in der Zeit Z durchgegangene Wärmemenge bezeichnet.

Die dabei zu erfüllenden Bedingungen sind folgende:

1. Die Wärmeüberführung soll bloß durch Leitung und nicht durch Konvektion geschehen.
2. Der Körper soll von zwei parallelen Ebenen begrenzt sein.
3. Alle Punkte derselben Begrenzungsfläche sollen dieselbe Temperatur T , bez. t haben.
4. Die Temperatur der Begrenzungsflächen, sowie der dazwischen liegenden, ihnen parallelen Ebenen soll beliebig lange dieselbe bleiben.

Unter solchen Umständen ist dann der Wärmeleitungskoeffizient

$$k = \frac{Q \cdot D}{S \cdot (T - t) \cdot Z}.$$

Im besonderen Falle einer Flüssigkeit kann den aufgezählten Bedingungen nur genügt werden, wenn sich die Flüssigkeit in einem Gefäß mit ebenen, horizontalem Boden befindet; wenn die Wärmezufuhr von oben und die Wärmeabfuhr von unten stattfindet; und wenn Zufuhr und Abfuhr konstant gehalten werden. Letzteres bewirkt dann nach einer gewissen Zeit die bedungene konstante Temperaturverteilung.

Die zugeführte, oder durchgehende, oder austretende Wärmemenge kann in erster Annäherung bequem und leicht elektrisch erzeugt und bestimmt werden. Sind nämlich J die Stromstärke in Ampère und E die Spannung in Volt an den Drahtenden einer Heizvorrichtung, welche auf der oberen Grenzfläche der Flüssigkeit aufliegt, so ist die in Z Sekunden zugeführte Wärmemenge in Grammkalorien

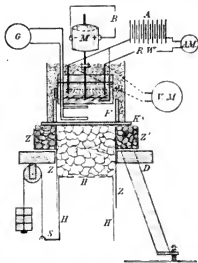
$$Q = 0,24 \cdot J \cdot E \cdot Z.$$

Der Ausdruck für k nimmt dadurch folgende Gestalt an:

$$(2) \quad k = \frac{0,24 \cdot J \cdot E \cdot D}{S(T - t)},$$

und wird die Bestimmung von k zugleich von der Zeit unabhängig.

Die durch die Energie $J \cdot E$ erzeugte Wärme wird nun allerdings nicht alle durch die Flüssigkeit gehen, sondern zum Teil in der Luft und an andere Körper abgegeben. Dementsprechend muß Q , oder die Energie $J \cdot E$, welche in die letzte Formel eingeht, korrigiert werden.



2. Versuchsanordnung.

Die in Bezug auf Wärme-
fluß zu untersuchende Flüssig-
keitsschicht mit den die nöti-
gen Bedingungen erfüllenden
Nebenteilen hatte die An-
ordnung, wie sie die neben-
stehende Figur skizziert:

Auf dem ausgeschnit-
tenen Brett eines Dreifußes D

steht ein aus Zinkblech gefertigter Zylinder Z auf. Dieser Zylinder wird im oberen Viertel von einem weiteren Zylinder Z' umgeben, welcher an den ersteren durch einen flachen Boden verlötet ist. Außerdem paßt in den inneren Zylinder ein anderer Hohlzylinder H , der oben durch einen durchlöcher-

Boden abgeschlossen ist. Dieser Zylinder ist leicht beweglich und wird deswegen mittelst dreier an dem Umfang angebrachter Stangen S durch Schnur und Rolle und Gegengewicht an der unteren Seite des Brettes des Dreifußes aufgehängt. Auf dem Hauptzylinder Z liegt dann horizontal eine ebene Kupferplatte K auf, auf deren obere Seite ein zylindrischer Glasring angekittet ist. Das so von der Kupferplatte und dem Glasring gebildete zylindrische Gefäß ist zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeit F bestimmt. Im Raum zwischen Kupferplatte, Zinkzylinder und beweglichem Zinkzylinder (Kolben) ist zerschlagenes Eis untergebracht. Dieses Eis wird vom Kolben, durch Vermittelung der bis auf 18 kg betragenden Gegengewichte, gegen die Kupferplatte, also gegen die untere Grenzfläche der Flüssigkeit, gedrückt. Das obere zylindrische Gefäß Z' enthält Eis und Wasser bis oben, zu dem Zwecke, das seitliche Abschmelzen des Eises zu verhindern und dadurch zu erzielen, daß der kühlende Eiszylinder seinen ursprünglichen Durchmesser beibehält.

Oberhalb der Flüssigkeitsschicht, und mit ihr in Berührung, ist auf das die Seitenwand bildende Glas ein metallenes Heizgefäß W in drei Punkten aufgestellt, doch so, daß das zylindrische Heizgefäß genau in das zylindrische Glas paßt und 2—6 mm darein eintauchen kann. Das Heizgefäß enthält flüssiges Paraffin, welches den Wärmeverrat aufnehmen und die Wärmeabgabe an die zu untersuchende Flüssigkeit vermitteln soll. Ich gab Paraffin den Vorzug seiner gut isolierenden Eigenschaft wegen. — Die Wärme wurde durch elektrischen Strom erzeugt, indem dieser in eine Widerstandspule besonderer Art geleitet wurde. Nämlich ans mit Seide umsponnenem Nickeldraht von 0,2 mm wurde zuerst ein Bündel von vier solchen Drähten gebildet und dann acht dieser zu einem neuen Bündel vereinigt. Dieses Bündel aus 32 Adern wurde dann auf ein ebenes starkes, rechteckiges Stück Eisenblech, von ihm gut isoliert, aufgewickelt. Die Enden wurden an zwei Messingsäulen sorgfältig angelötet. Diese selbst waren, gut isoliert, auf dem Eisenrahmen befestigt. Diese Messingsäulen führten also den Strom dem Nickelinwiderstand W zu. Die ganze Länge dieses Bündels betrug etwa 13,7 m; sein

Widerstand war etwa $4,89 \Omega$. Als Stromquelle diente immer eine Akkumulatorenbatterie A , und der Stromkreis enthielt noch einen Kurbelrheostaten als Regulierwiderstand $R W$.

Um der Heizflüssigkeit Paraffin überall dieselbe konstante Temperatur zu verschaffen, wurde in das Gefäß ein Rührer mit radialen, schief gestellten Flügeln in nächster Nähe des Bodens des Heizgefäßes eingesetzt. Dieser Rührer wird vom Eisenrahmen des Heizwiderstandes getragen und geführt; seine Entfernung vom Boden wird bedingt durch die Länge der Füße des Eisenrahmens. Die Drehachse des Rührers geht vertikal durch das Heizgefäß nach oben und wird dort durch einen Mitnehmer von der Achse eines kleinen Gleichstrommotors gefaßt und angetrieben. Dieser Motor M ist vermittelt dreier Füße auf den Rand des Heizgefäßes aufgestellt. Eine Akkumulatorenbatterie B besorgte den Antrieb. Die Achse und der Rührer machten gewöhnlich etwas mehr als eine Umdrehung in der Sekunde.

Dasselbe Heizgefäß enthielt außerdem ein in rechtem Winkel abgebogenes Thermometer, so daß das Quecksilbergefäß horizontal auf dem Boden, seitlich, nahe am Rührer lag, während die geteilte Röhre vertikal herausragte. Die Teilung gab $1/10^\circ \text{ C.}$ an, so daß leicht $1/100^\circ$ abgeschätzt werden konnten. Dasselbe hatte den Zweck, die Temperatur am Boden des Gefäßes anzugeben, beziehentlich zu ermöglichen und sich zu versichern, ob die Temperatur der Heizflüssigkeit an ein und demselben Ort einen bestimmten Wert erreicht hat und ihn beibehält.

Endlich enthält das Flüssigkeitsgefäß noch die nötigsten Teile eines Thermoelementes. Dasselbe ist gebildet aus einem Stück Konstantandraht und ihm angelöteten Kupferdrähten. Die Drähte sind sorgfältig einzeln isoliert, dann U-förmig umgebogen und so bemessen, daß die Lötstellen ziemlich in die vertikale Achse der Flüssigkeitsschicht, die Drähte horizontal in derselben radialen Ebene gegen den Rand hin verlaufen und dann vertikal nach oben durch ein kleines Rohr im Heizgefäß und nach einem Deprezgalvanometer gehen. Die in der Flüssigkeitsschicht liegenden Drahtteile sind noch aneinander fest gemacht, und, in etwa ein Drittel Länge gegen die Mitte hin, durch ein dünnes Ebonitstück in unveränderter Lage

gehalten. Dieses starre System soll die Sicherheit ergeben, daß die Entfernung der Lötstellen durch hydrostatischen Druck nicht geändert wird.

Das Flüssigkeitsgefäß, von der Kupferplatte ab, sowie das Heizgefäß, bis 2 cm über dasselbe hinaus, war von einer Schutzhülle umgeben. Diese bestand aus einem knapp zugeschnittenen Pappdeckel, dessen eine Seite sorgfältig und gleichmäßig mit gechariteter, feinsten Wolle, etwa 2 cm dick, belegt war. Die gecharitete Wolle mag allerdings weniger Schutz gewähren als etwa Eiderdunen; aber die Tatsache, daß die gecharitete Wolle eine äußerst gleichmäßige, dichte, fast filzartige Übereinanderlagerung der einzelnen Wollfäden bildet, gewährte die Bürgschaft dafür, daß bei allen aufeinander folgenden Versuchen der Wärmeschutz denselben Betrag erreichen mußte. Die Hülle wurde nach Aufbau des ganzen Apparates umgelegt und dann, bei gleichmäßiger Verteilung über die Fläche, durch einen Bindfaden ziemlich straff festgezogen. — Eine ebensolche Wollschicht wurde jeweilen auf das Heizgefäß aufgelegt und passend belastet.

Die ganze Länge des Zinkzylinders Z beträgt 37 cm; sein innerer Durchmesser 20 cm. Der als Kolben dienende Zylinder H hat 13 cm Länge. Die Höhe des oberen Kühlzylinder Z' beträgt 12 cm; sein Durchmesser 30 cm. Die Kupferplatte K hat 0,4 cm Dicke und 26 cm Durchmesser. Das die seitliche Wandung bildende Glas ist 2,1 cm hoch, 0,3 cm dick und hat 20,00 cm inneren Durchmesser. Das Heizgefäß W ist 7,5 cm hoch, paßt eben in den Glasring, taucht 0,3 cm ein und ist zu etwa drei Viertel mit flüssigem Paraffin gefüllt. Der aufgestellte elektrische Motor ist von Siemens & Halske, Modell GM 2,5.

3. Besprechung der Versuchsanordnung.

Die eingangs aufgeführten Versuchsbedingungen sind in der angegebenen Anordnung erfüllt. Denn daß die Wärme lediglich durch Leitung und nicht durch Konvektion übergehe, wird bekanntlich dadurch erreicht, daß die Wärme von oben zugeführt und unten abgeleitet wird. Die nötige Wärme wird ebenso stetig durch die zugeführte elektrische Energie

erzeugt, wie das Eis durch Schmelzung die Wärme unten aufnimmt.

Was die Konvektion betrifft, so könnte man erwarten, daß die Glaswand und die eingetauchten Metalldrähte solche erzeugen könnten. Es liegt jedoch das Glas festgekittet auf der Kupferplatte auf und ist dadurch gezwungen im untersten Teil die Temperatur dieser Kupferplatte, sagen wir kurz die „Eistemperatur“, anzunehmen. Der obere Teil der Glaswand berührt entweder das Heizgefäß unmittelbar, oder ist durch eine nur sehr dünne Flüssigkeitsschicht, von einigen Millimeter Höhe, vom Heizgefäß getrennt. In beiden Fällen wird daher das Glas noch schneller oder nahe so schnell die Temperatur des Heizgefäßes angenommen haben. Die Temperaturverteilung in Richtung der Höhe der Glaswand wird daher bald ganz genau dieselbe werden, wie in der Vertikalen in der Flüssigkeit. Damit ist aber jede Ursache zur Bildung der Konvektion ausgeschlossen. Jedoch ist nicht ausgeschlossen, daß die pro Quadratcentimeter im Glas abgeführte Wärmemenge eine andere sei, als die im Quadratcentimeter abgeführte Wärmemenge in der Flüssigkeit. Von ersterer kann man aber annehmen, daß die unter gleichen äußeren Umständen sekundlich abgeführte Wärmemenge stets dieselbe sei, welches auch die Natur der eingeschlossenen Flüssigkeit sei.

Die Drähte des Thermoelementes sind horizontal, den Flächen parallel gelegt; das Metall ist mit Seide umwickelt und alles lackiert. Dieselben erhalten Wärme von oben her, sind bessere Wärmeleiter als die Flüssigkeit, so daß die Wärmeverbreitung durch sie sich rascher vollzieht, als durch eine gleich dicke Schicht Flüssigkeit. Dadurch wird der untere Teil des Drahtes und die ihn berührende Flüssigkeit etwas wärmer sein, als der etwa in der Ebene der Drahtmitte liegende Teil der umgebenden Flüssigkeit. Dieser untere, wärmere Teil der Flüssigkeit wird also mit dem oberen, kälteren Teil einen Austausch anstreben. Wenn man aber die geringe Drahtdicke, den sehr geringen Temperaturunterschied und den nur einen Radius erfüllenden Raum der Drähte in Betracht zieht, so läßt sich leicht absehen, daß diese Störung im ganzen sowie auch in Richtung der vertikalen Achse verschwindend klein ausfallen muß, im Vergleich zur ganzen durchströmenden Wärme Q .

Ein anderer Teil der Drähte des Thermoelementes verläuft vertikal durch das Heizgefäß und längs des Umfanges der zu untersuchenden Flüssigkeit. Das enge Messingrohr, welches den Drähten freien Durchgang durch das Heizgefäß gestattet und in dasselbe eingekeilt sind, hat natürlich die Heiztemperatur. Die Temperatur der Drähte wird wenig davon entfernt sein. So wird denn eine Wärmeleitung längs der Drähte unvermeidlich. Dieselben werden etwas Wärme vertikal abwärts führen und zwar schneller, als die nebenliegende Flüssigkeit. Dadurch wird der unterste Teil des vertikalen Drahtes eine höhere Temperatur erlangen, als die daneben liegende Flüssigkeit; diese wird von jener erwärmt und muß zu einer geringen Konvektion in jener Gegend Anlaß geben. Da aber der ganze Vorgang sich am einen Ende einer einzigen vertikalen Diametralebene vollzieht und von geringem Betrag ist, so ist anzunehmen, daß die Wirkung in der Gegend der vertikalen Achse der Flüssigkeitsschicht verschwindend klein ist.

Hier ist noch der Wärmestrahlung des Glases nach außen zu gedenken. Dieselbe wird schon durch die Wollhülle beschränkt und auf einen unveränderlichen Wert gebracht. Damit deren Betrag noch kleiner und die nötige Korrektur auch kleiner werde, habe ich im allgemeinen dafür Sorge getragen, daß das die Temperatur des Heizgefäßes und damit des oberen Randes des Glasringes nahe das gedoppelte der umgebenden Zimmertemperatur war. So nahm der Glasring in seiner unteren Hälfte so viel Wärme (durch die Wollhülle hindurch) auf, als derselbe in seiner oberen Hälfte abgab.

Die weitere Bedingung, daß die Flüssigkeitsschicht von zwei unendlichen, parallelen Ebenen begrenzt sei, ist in dieser Form nicht ausführbar. Da aber der Kern der Bedingung darin liegt, daß der Wärmedurchgang durch irgend einen vertikalen Zylinder oder Prisma genau unter denselben Bedingungen und auf dieselbe Weise geschehe, wie durch irgend einen anderen vertikalen Zylinder, so wird die Bedingung erfüllbar. Die untere Grenzebene ist horizontal gelegt dadurch, daß die Kupferplatte mit einer Libelle auf ihre horizontale Lage geprüft und durch die Stellschrauben des Dreifußes darauf eingestellt wurde. Die obere Grenzebene ist horizontal

als freie Oberfläche einer Flüssigkeit oder als Berührungsebene des ebenfalls horizontal gestellten Bodens des Heizgefäßes. Die Möglichkeit des Dazwischentretens einer mehr oder weniger großen Luftblase kann verhindert werden, wenn man das Heizgefäß in das überflüssig gefüllte Gefäß schief, mit einem Randteil zuerst, einsetzte und dann nach und nach horizontal legte. Die Durchsichtigkeit der Glaswand und der meisten Flüssigkeiten gestatten das richtige Aufliegen des Heizgefäßes leicht nachzusehen.

In unserer Versuchsanordnung sind alle Punkte der oberen Grenzfläche auf einer und derselben Heiztemperatur; denn die flächenartige Verteilung des Heizdrahtes und die stetige, besonders am Boden des Heizapparates tätige Bewegung des Rührers bürgen für die Gleichheit der Temperatur des Paraffinöles und damit des kupfernen Bodens und der Grenzfläche der Flüssigkeit.

Die Temperatur T des Paraffins wird von dem herausragenden, in $\frac{1}{10}$ Grade geteilten Thermometer angezeigt. Während der ganzen Dauer des Versuches muß diese Temperatur beständig beobachtet, und nötigenfalls durch Zu- oder Abschalten von Strom auf demselben Wert erhalten werden. Der Versuch selbst zeigt, daß dieses innerhalb weniger Zehntelgrade möglich ist.

Alle Punkte der unteren Grenzfläche sind ebenso auf einer und derselben Temperatur, der „Eistemperatur“. Die Gleichmäßigkeit dieser Temperatur wird gesichert durch den Umstand, daß das Eis die Kupferplatte auf ihrer ganzen Ausdehnung berührt, daß das Eis kräftig angedrückt wird und daß die Kupferplatte dick ist. Die Temperatur der unteren Grenzschicht der Flüssigkeit ist allerdings, trotz des verwendeten Eises und trotz des Kupfers, nicht Null Grad, sondern höher. Denn schon die unter der Kupferplatte am Eise liegende Flüssigkeitsschicht muß eine höhere Temperatur als 0° haben, sonst würde das Eis gar nicht schmelzen. Darans folgt dann, daß die Temperatur von jener Flüssigkeitsschicht ab bis zur unteren Fläche des Kupfers, bis zur oberen Fläche des Kupfers, bis an die Grenzschicht der Flüssigkeit mehr und mehr zunehmen muß.

Aus ähnlichem Grunde ist die Temperatur der oberen

Grenzfläche der Flüssigkeit nicht diejenige T , welche das im Paraffin steckende Thermometer anzeigt, sondern sie ist tiefer. Dieses Thermometer hatte sonach nicht den Zweck, eine Temperatur in absolutem Wert anzugeben, sondern nur die Möglichkeit zu vermitteln, irgend eine Temperatur festzuhalten. Aus diesem Grunde war auch jede Nachprüfung der Gradteilung und der Fixpunkte dieses, übrigens sehr guten, Thermometers überflüssig.

Die weitere allgemeine Bedingung, daß die Temperatur der Grenzflächen, sowie der dazwischen liegenden, ihnen parallelen Ebenen beliebig lange dieselbe bleibe, ist nur begrenzt durch den Vorrat an Eis und die Kapazität der Elektrizitätsquelle. Beide genügten bei den angeführten Maßen für ein und dasselbe mehrstündige Experiment. Bekanntlich ist noch ziemliches Dunkel über den Wärmeübergang von einem Körper zu einem anderen durch die gemeinschaftliche Grenzschrift. Derselbe hängt in hohem Maße von der Natur der beiden begrenzenden Körper und von der Beschaffenheit der Grenzfläche ab. Der Wärmeübergang ist in der Grenzschrift viel kleiner als in irgend welcher anderen homogenen Schicht. — Die angewandte Versuchsanordnung, insbesondere die Einfügung der Thermolemente hat den Vorteil, diese Schwierigkeit in der Grenzschrift zu umgehen.

4. Die Bestimmung der einzelnen Größen.

8. — Der Querschnitt S , der von der Wärme durchsetzten Flüssigkeitsschicht, ergibt sich aus dem angegebenen Durchmesser des Heizgefäßes oder des Glasringes zu

$$(3) \quad S = 315 \text{ cm}^2.$$

($T - t$) — Die Temperaturdifferenz der beiden Grenzflächen der Flüssigkeit kann aus oben angegebenen Gründen nicht mit Sicherheit aus den beiden Temperaturen der Heizflüssigkeit mit ihrem Quecksilberthermometer und der Schmelztemperatur des Eises abgeleitet werden. Jedenfalls wäre die Differenz der Temperaturen der Grenzflächen der Flüssigkeit kleiner als jene Differenz ($T - 0$)°.

An dem Wärmeproblem der „Mauer“ ist jedoch die Einführung der Grenzflächen mit ihren Temperaturen und Ent-

fernung nicht wesentlich. Wesentlich ist nur, daß der Wärmestrom unveränderlich, daß jeder Punkt der Flüssigkeit eine bestimmte, unveränderliche Temperatur annehme. Im übrigen kann die Entfernung D der zwei betrachteten parallelen, horizontalen Ebenen irgendwelche sein; es können beide im Innern der Flüssigkeitsschicht angenommen werden. Die Temperaturen T und t müssen dann diejenigen dieser beiden parallelen Ebenen sein. — Nun verlangt aber die Formel (2) für k p. 1048 nicht notwendig die Kenntnis von T und t besonders, sondern nur deren Differenz ($T - t$). Solche Differenzen werden von Thermoelementen bequem und sicher angegeben. Bei den nachfolgend mitgeteilten Messungen wurde ein Depretz-d'Arsonvalgalvanometer mit Spiegelablesung verwendet. Ein gut gestelltes Wiedemannsches Spiegelgalvanometer ist allerdings in der Handhabung bequemer und gibt Resultate, deren Sicherheit viel weiter reicht; aber die städtische Straßenbahnleitung, welche nahe am Laboratorium vorbeiführt, macht dessen Verwendung unmöglich.

Bezeichnet C die Konstante des Thermoelementes zum Galvanometer, so besteht zwischen der Temperaturdifferenz Δt an den Lötstellen und dem Ausschlag $(N - N_0)$ an der Skala des Galvanometers die Beziehung

$$(4) \quad \Delta t = C \cdot (N - N_0),$$

wodurch die Beziehung (2) die Form erhält

$$(5) \quad k = \frac{0,24 \cdot J \cdot E \cdot D}{S \cdot \Delta t} = 0,24 \cdot \frac{1}{C \cdot S} \cdot D \cdot \frac{J \cdot E}{(N - N_0)}.$$

D . — Die Lötstellen des Thermoelementes waren nach dem Verlöten möglichst kurz geschnitten und dann rund gefeilt worden. So wurden sie 1 mm dick. Aus deren größter Entfernung und aus ihrer inneren kleinsten Entfernung wurde der Mittelwert genommen und dieser als Entfernung D der Lötstellen und der durch sie gehenden parallelen Ebenen bezeichnet. Seine Größe änderte sich etwas im Verlauf der Versuche, weil absichtlich oder unabsichtlich etwa an dem sonst starren System gedrückt wurde. Der für den jeweiligen Versuch geltende Wert ist bei Behandlung des Versuches angegeben. — Die genaue Bestimmung der Entfernung D hat Schwierigkeiten, weil das ganze System der Lötstellen nicht

großen Druck und Stoß verträgt. Da die Entfernung 0,90 bis 1,00 cm betrug und kaum mehr als 0,1 mm abgelesen werden kann, so kann von dieser Bestimmung hier ein Fehler von 2—3 Proz. seines Wertes in k eingehen. Hierin liegt ein schwacher Punkt der Methode.

J . — Es bezeichnet J die Stromstärke in Ampères, welche die Akkumulatorenbatterie an den wärmeerzeugenden Widerstand im Heizgefäß abgab. Zu seiner Kenntnis war in denselben Stromkreis ein Präzisionsampèremeter von Siemens & Halske vorgeschaltet wodurch die Stromstärke nach Abzug des Voltmeterstromes direkt und genau ablesbar wurde.

E . — Die mit E bezeichnete elektromotorische Kraft ist diejenige, welche sich an den Messingsäulen der Heizdrahtvorrichtung befindet; also diejenige, welche mit J die an das Heizgefäß abgegebene Energie, und nur diese, bestimmt. Zu ihrer Bestimmung diente ein Präzisionsvoltmeter von Siemens & Halske.

$W = J \cdot E$. — Die dem Heizgefäß zugeführte Gesamtenergie beträgt $J \cdot E = W$ Watt. Die entsprechende sekundlich erzeugte Wärmemenge ist $Q = 0,24 J \cdot E$ g/Kal. Von ihr geht der größte Teil durch die Flüssigkeit nach dem Eise, ein anderer Teil aber vom Heizgefäß nach oben und seitlich, und ein anderer durch das Glas nach dem Eise. Nur der durch die Flüssigkeit gehende Teil der Wärme, oder der Energie, darf bei Formel (5) zur Bestimmung von k in Betracht kommen. Es sind somit die Beträge derjenigen Wärme- beziehentlich Energiemengen zu bestimmen, welche 1. nach oben und seitlich abgehen, und 2. durch die Glaswand nach der Kupferplatte und dem Eis abfließen.

5. Der nach oben und seitlich vom Heizgefäß ausgehende Wärme- oder Energiebetrag.

Zum Zwecke der Bestimmung dieser Größe wurden zwei Hilfsmessungen an zwei etwas verschiedenen Anordnungen gemacht. Bei der einen Anordnung wurde das Heizgefäß auf drei Holzkegel von 1,2 cm gestellt, um dasselbe von dem sie tragenden kleinen Tisch zu trennen. Der Zwischenraum wurde mit Eiderdunen dicht angefüllt; sodann umgab das Gefäß ein mit feiner geschardeter Wolle etwa 2 cm dick sorgfältig

belegter Gürtel aus Pappdeckel; endlich kam eine dickere und belastete Schicht derselben Wolle auf die Deckfläche des Heizgefäßes. Nach dieser Aufstellung wurde dem Heizgefäß elektrische Energie zugeführt und diese so weit verändert, bis die Heizflüssigkeit die gewollte, gewöhnlich bei den Hauptversuchen verwendete Temperatur dauernd hebehielt.

Bezeichnen z die Zeit der Beobachtung, Z die Dauer derselben, t_u die Temperatur der Umgebung, T die am abgebogenen Quecksilberthermometer abgelesene Heiztemperatur, J die Stromstärke, E die Spannung an den Enden des Heizdrahtes, und W_1 die aufgewandte elektrische Energie, so ergeben die Versuche für das mit Wolle und Eiderdunen geschützte Heizgefäß folgende sich entsprechende Werte:

Tabelle 1.

z	T	t_u	J	E
			Amp.	Volt
10 ^b 10 ^m	29,42°	16,0°	0,905	5,32
11 —	29,28	16,0	0,904	5,32
12 —	29,35	16,4	0,909	5,35
	29,35°	16,13°	0,906	5,33

woraus $W_1 = 4,830$ Watt.

In ähnlicher Weise ergaben sich bei sieben unabhängigen Versuchen die entsprechenden Werte

Tabelle 2.

Z	T	t_u	$T - t_u$	J	E	W_1
				Amp.	Volt	Watt
2 ^b — ^m	29,35°	16,13 ₀	13,22°	0,906	5,33	4,830
1 15	29,58	16,7	12,88	0,892	5,23	4,665
2 —	29,39	14,83	14,56	0,913	5,417	4,946
3 —	29,64	16,50	13,14	0,926	5,41	5,000
	29,5°	16,03°	13,47°	—	—	4,680
2 ^b 45 ^m	34,18°	14,1°	20,08°	1,107	6,31	6,988
2 —	34,61	15,35	19,26	1,090	6,265	6,829
3 —	34,54	15,5	19,0	1,081	6,27	6,777
	34,44°	15,0°	19,44	1,097	6,28 ₁	6,865

Diese vom Heizgefäß abgegebenen Energiemengen 6,865 und 4,860 Watt lassen sich nach den Gesetzen der Wärmeleitung folgendermaßen verteilen: Die durch jeden Flächenteil abgegebene Energiemenge ist der Temperaturdifferenz proportional, der Dicke der Schutzhülle umgekehrt proportional, der Fläche selbst proportional und übrigens der Natur der Schutzhülle, also einem gewissen Wärmeleitungskoeffizienten proportional.

Nun sind die Grund- und Deckfläche des Heizgefäßes 315 cm^2 , dessen zylindrische Fläche $20 \cdot \pi \cdot 7,5 = 471 \text{ cm}^2$. Die Wollschicht auf dem Gefäß ist 2,5 cm dick, diejenige über der zylindrischen Fläche 2 cm und die Eiderdunenschicht 1,8 cm dick. Demnach geht bei der höheren Temperatur von $34,44^\circ$ die Energiemenge

$$A \frac{315 \cdot 34,44}{(315 + 471 + 315) \cdot 1,8}$$

durch die Eiderdunenschicht, und

$$B \cdot \left[\frac{471}{1101} \cdot \frac{19,44}{2} + \frac{314}{1101} \cdot \frac{19,44}{2,5} \right]$$

durch die beiden Wollschichten. Ihre Summe muß nach der mitgeteilten experimentellen Bestimmung 6,865 Watt betragen. Dieses ergibt die eine Beziehung

$$A \cdot \frac{314 \cdot 34,44}{1101 \cdot 1,8} + B \frac{19,44}{1101} \cdot 361,1 = 6,865.$$

Aus den Messungen bei den niedrigeren Temperaturen $29,5^\circ$ und $16,03^\circ$ ergibt sich in derselben Weise

$$A \cdot \frac{314 \cdot 29,5}{1101 \cdot 1,8} + B \frac{19,46 \cdot 361,1}{1101} = 4,860,$$

woraus

$$A = 0,0018, \quad B = 1,096.$$

Aus diesen Zahlen läßt sich beiläufig ersehen, daß die Durchlässigkeit für Wärme bei Eiderdunen um viele hundert Mal geringer sein mag als für Wolle.

Die aus dem Boden des Heizgefäßes durch die Eiderdunen abgeleitete Energiemenge ist nun

$$C = \frac{0,0018 \cdot 314}{1101 \cdot 1,8} \cdot T = 0,00156 \cdot T \text{ Watt,}$$

somit für die beiden in Betracht kommenden Temperaturen

$$\begin{aligned} T' &= 34,60^\circ, & C' &= 0,0539 \text{ Watt,} \\ T'' &= 29,46^\circ, & C'' &= 0,0467 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

Bei einer zweiten Anordnung wurde das Heizgefäß auf den gut eben geschliffenen Rand des zylindrischen Glases genau aufgelegt. Außerdem war das Glas auf die Kupferplatte mit Siegelack festgekittet, der innere (für die Flüssigkeit bestimmte) Raum wieder dicht mit Eiderdunen ausgestopft und das Ganze seitlich und oben, genau wie in der ersten Anordnung, mit Wolle umgeben. Die Kupferplatte lag wieder auf Eis, genau wie in der ersten Anordnung, und wie bei den Hauptversuchen über k . In dieser Zusammenstellung war der Energieverlust bei Innehaltung der Temperaturen von etwa 34,5 und 29,5° durch mehrere Reihen bestimmt worden; ihre Mittelwerte sind:

Tabelle 3.

Z	T	t_n	$T - t_n$	J	E	W_z
				Amp.	Volt	Watt
1 ^b — ^m	34,61°	14,35°	20,26°	1,284	7,315	9,392
1 30	34,69	16,16	18,53	1,288	7,216	9,294
1 45	34,48	15,87	18,61	1,237	7,113	8,800
	34,6°	15,46°	19,14°	—	—	9,162
1 ^b — ^m	29,22°	15,60°	13,62°	1,118	6,43	7,189
2 —	29,41	14,60	14,81	1,115	6,385	7,119
1 —	29,46	16,85	12,59	1,115	6,37	7,103
2 —	29,66	15,85	13,81	1,095	6,295	6,890
	29,43°	15,72°	13,71°	—	—	7,075

Es geht also durch den Glasring und die drei Flächen des Heizgefäßes folgende Energiemenge ab:

$$\begin{aligned} \text{Bei } T' &= 34,60^\circ & W_z &= 9,162 \text{ Watt,} \\ \text{,, } T'' &= 29,43^\circ & W_z &= 7,075 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nun die gesamte für die Wärmeleitung durch die Flüssigkeit im Sinne der Theorie verlorene Energiemenge. Es ist dieselbe die Differenz der beiden eben gewonnenen Energiemengen $W - C$; also:

$$\begin{aligned} \text{Bei } T' = 34,60^\circ \quad w' &= 9,162 - 0,054 = 9,108 \text{ Watt,} \\ \text{,, } T'' = 29,46^\circ \quad w'' &= 7,075 - 0,047 = 7,028 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

Da bei den Messungen mit den Flüssigkeiten diese Temperaturen $34,60^\circ$ und $29,46^\circ$ nicht genau eingehalten werden können, so muß der jeweilige Energieverlust w oder die Korrektion w des Wertes $W = J \cdot E$ für jede besondere Temperatur des Intervalles von $28-35^\circ$ bestimmbar sein. Dieses geschieht wie folgt: Der fragliche Energieverlust muß dem Temperaturintervall $(T - 0)^\circ$ und dem anderen $(T - t_w)$ proportional sein; in anderen Worten: es muß die Beziehung bestehen

$$M \cdot T + N(T - t_w) = w,$$

wo M und N zwei zu bestimmende Konstanten sind. Nach Tab. 2 und 3 entsprechen sich die Werte:

$$\begin{aligned} T' = 34,60^\circ, \quad t'_w = 15,46^\circ, \quad T' - t'_w = 19,14 \text{ und } w' &= 9,108 \text{ Watt,} \\ T'' = 29,46^\circ, \quad t''_w = 15,72^\circ, \quad T'' - t''_w = 13,74 \text{ und } w'' &= 7,054 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen stellen sich also zu

$$M \cdot 34,60 + N \cdot 19,14 = 9,108,$$

$$M \cdot 29,46 + N \cdot 13,74 = 7,054,$$

woraus

$$M = 0,1117 \quad \text{und} \quad N = 0,2740,$$

also

$$(6) \quad w = 0,2 \cdot T + 0,274(T - t_w).$$

Dieses ist der Betrag, um welchen das Produkt $J \cdot E$ in (5) (p. 1056) zu vermindern ist, so daß also

$$(7) \quad k = \frac{0,24}{C \cdot S} \cdot D \cdot \frac{(W' - w)}{(N - N_0)}.$$

6. Resultate.

Da es sich heute kaum mehr darum handeln kann, den Wert des inneren Wärmeleitungskoeffizienten k für eine noch größere Zahl von Flüssigkeiten zu bestimmen, so galt mir als Ziel, eine theoretisch und experimentell einfache Methode auszuarbeiten und zu prüfen, sowie dann k für einige besonders hervorstechende Fälle zu bestimmen. Deshalb erstreckten sich die Messungen auf Wasser, Glyzerin, flüssiges Paraffin, festes Paraffin und Quecksilber.

A. Wasser.

Das gut ausgekochte Wasser wurde genau der Behandlung unterworfen, wie sie vorstehend beschrieben. Von den 12 Reihen soll hier eine vollständig wiedergegeben werden, sowie auch die zugehörige Berechnung von k . Von den übrigen Versuchsreihen sei nur das mittlere Ergebnis mitgeteilt und die berechneten Werte von W , w und k .

Bei der Entfernung $D=0,92$ cm der Lötstellen ergab sich nach einiger Zeit des Tastens:

Tabelle 4.

x	T	t_w	J	E	N_0	N	$N-N_0$
			Amp.	Volt			
5 ^b —	84,48°	14,5°	3,03	17,40	417	878	461
5 80	84,76	14,4	3,03	17,40	417	877	460
6 —	84,82	14,5	3,02	17,34	417	878	461
6 80	84,74	14,6	3,01	17,28	440	900	460
7 —	84,68	14,8	3,00	17,28	436	897	461
	84,70°	14,56°	3,017	17,34	—	—	460,5

Hieraus $W' = J \cdot E = 3,017 \cdot 17,34 = 52,315$ Watt

und nach (6) $w = 9,405$ „

demnach $W = 42,91$ Watt

und nach (7) für die Konstante des Thermoelementes $C = 0,0500$:

$$k = \frac{0,01525 \cdot 42,91 \cdot 0,92}{460,5} = 0,001\,307 \text{ [cm g sec]}.$$

Tabelle 5.
Wasser.

Z	T	t _u	J	E	N - N ₀	cm	T - t _u	W'	w	W	k
1 15	29,52°	15,32°	Amp. 2,700	Volt 15,70	372,3	0,92	13,70°	Watt 42,39	Watt 7,61	Watt 84,78	0,001313
2 —	29,40	14,70	2,69	16,62	375,5	0,92	15,70	42,02	8,12	33,90	1269
2 —	29,16	14,30	2,76	16,08	387,0	0,92	14,36	44,38	7,19	37,19	1351
2 —	29,28	15,02	2,74	15,95	392,0	0,92	14,26	43,65	7,16	36,49	1308
1 30	29,52	11,42	2,70	15,74	370,0	0,92	18,10	42,56	8,82	33,74	1282
2 —	29,65	17,25	2,72	15,81	380,0	0,92	12,40	43,00	6,70	36,30	1848
3 —	29,30	15,50	2,68	15,62	379,2	0,92	13,80	41,85	6,50	35,35	1310
1 15	34,70	14,56	3,02	17,34	460,0	0,92	20,14	52,32	9,41	42,91	1307
3 —	34,20	15,00	3,05	17,49	474,0	0,92	19,20	53,34	9,08	44,26	1318
2 30	38,92	12,56	2,94	16,90	440,4	0,92	21,36	49,62	9,64	39,98	1276
1 30	34,29	16,49	2,99	17,19	437,0	0,92	17,80	51,40	8,71	42,69	1373
2 —	34,53	16,65	3,00	17,30	459,0	0,92	17,88	51,90	8,75	43,15	1322
										Mittel	0,001314

Das mittlere Wärmeleitungsvermögen des Wassers ist sonach
 $k = 0,00131$ (cm g sec).

B. Glyzerin.

Bei dem vorstehenden genau entsprechender Behandlung
 ergab Glyzerin, dessen Dichte = 1,235, bei demselben Wert
 $C = 0,0500$ mm der Konstanten des Thermoelementes.

Tabelle 6.

Glyzerin.

Z	T	t_u	$T - t_u$	J	E	W'	w	W	$N - N_0$	k
				Amp.	Volt	Watt	Watt	Watt		0,000
2 ^h —	29,36°	16,23°	13,13°	2,22	12,32	27,50	6,87	20,63	432	671
2 —	29,39	15,89	13,70	2,20	12,34	27,14	7,03	20,11	430	657
2 —	29,54	16,23	13,31	2,24	12,49	27,98	6,94	21,04	433	682
2 —	29,40	14,90	14,50	2,22	12,41	27,51	7,25	20,26	430	662
2 —	34,17	16,67	17,50	2,42	13,49	32,66	8,61	24,05	517	654
2 —	34,54	15,47	19,07	2,44	13,62	33,28	9,08	24,20	524	649
2 30	34,64	16,80	17,84	2,44	13,49	32,96	8,75	24,20	523	650
2 —	34,30	14,50	19,80	2,37	13,51	32,01	9,26	22,75	516	620
Mittel										656

Das Leitungsvermögen des Glyzerins ist sonach
 $k = 0,000656$ (cm g sec).

C. Petroleum (Kaiseröl).

Bei den Messungen mit Petroleum war die Entfernung
 der Lötstellen am Thermoelement $D = 0,92$ cm und dessen
 Konstante war: 1 mm Ausschlag an der Skala entsprach
 0,0406° Celsius, Dichte 0,789.

Tabelle 7.

Petroleum.

Z	T	t_u	$T - t_u$	J	E	W'	w	W	$N - N_0$	k
				Amp.	Volt	Watt	Watt	Watt		0,000
1 ^h —	29,42°	14,7°	14,72°	1,68	9,99	16,79	7,31	9,48	445	368
— 30	29,23	15,15	14,08	1,67	9,85	16,45	7,42	9,03	443	352
— 50	29,21	16,00	13,21	1,71	10,12	17,29	7,64	9,65	433	385
— 20	34,37	14,9	19,47	1,83	11,02	20,20	7,92	12,28	526	403
— 40	34,31	15,2	19,11	1,83	11,00	20,16	7,99	12,17	522	403
Mittel										382

Das Leitungsvermögen dieses *Petroleum*s ist sonach

$$k = 0,000382 \text{ (cm g sec).}$$

D. Paraffinöl.

Der Gefrierpunkt dieses flüssigen Paraffins liegt unter -20°C. , seine Dichte ist $\delta = 0,870$. — Die Entfernung der Lötstellen am Thermoelement ist noch $D = 0,92$ cm, die Konstante $1 \text{ mm} = 0,0406^{\circ}\text{C.}$

Die Messungen ergaben für:

Tabelle 8.

Paraffinöl.

<i>Z</i>	<i>T</i>	<i>t_n</i>	<i>T - t_n</i>	<i>J</i>	<i>E</i>	<i>W'</i>	<i>w</i>	<i>W</i>	<i>N - N₀</i>	<i>k</i>
				Amp.	Volt	Watt	Watt	Watt		0,000
— ^b 30 ^m	29,32°	15,2°	14,12°	1,67	9,96	16,63	7,88	9,25	468,6	341
1 —	29,45	15,9	13,55	1,67	9,86	16,44	7,65	8,80	476,3	319
— 50	29,30	14,9	14,40	1,68	9,72	15,84	7,85	8,49	463,2	317
— 50	29,11	14,2	14,96	1,67	9,78	16,32	7,13	9,20	455,4	349
— 40	34,30	15,7	18,60	1,81	10,86	19,66	8,13	11,58	552,7	360
1 50	34,61	15,7	18,88	1,83	10,90	19,89	8,18	11,71	557,0	363
— 50	34,29	14,5	19,79	1,81	10,89	19,75	7,80	11,95	540,1	382
										Mittel 346

Also das Leitungsvermögen für *flüssiges Paraffin*

$$k = 0,000346 \text{ (cm g sec).}$$

E. Festes Paraffin.

Dieses feste Paraffin hat den Schmelzpunkt $50,4^{\circ}\text{C.}$ Um das Thermoelement an den richtigen Platz im Flüssigkeitsgefäß und im festen Paraffin zu bringen, wurde dasselbe frei schwebend im Gefäß gehalten und ihm die gewünschte Lage gegeben, darauf das gelinde erwärmte Paraffin flüssig eingegossen und nach Bedürfnis beim Erkalten Schicht um Schicht nachgegossen, bis bei gewöhnlicher Temperatur das feste Paraffin höher lag als der Glasrand. Hierauf wurde mit einem kantigen Stab das überragende Paraffin auf die Höhe des Glasrandes abgeschabt. Dann ließ sich das Heizgefäß über die Enden des Thermoelementes stülpen. Um dasselbe in gute Berührung mit dem Paraffin zu bringen, wurde dasselbe

noch auf etwa 50° erwärmt, belastet und erkalten gelassen. Endlich wurden die Enden des Thermoelementes wieder an die Enden der Galvanometerdrähte gelötet.

Bei den Messungen war $D = 0,90$ cm und die Konstante $1^{\circ} = 26,40$ mm Ausschlag der Skala. Es ergab sich dann:

Tabelle 9.

Festes Paraffin.

Z'	T	t_u	$T - t_u$	J	EF_{t_u}	W'	w	W	$N - N_0$	k
				Amp.	Volt	Watt	Watt	Watt		0,000
— ^b 30 ^m	<u>29,51</u> °	<u>16,13</u> °	<u>18,38</u> °	<u>1,490</u>	<u>8,82</u>	<u>13,14</u>	<u>7,72</u>	<u>5,42</u>	<u>268,8</u>	3736
— 40	<u>29,30</u>	<u>26,55</u>	<u>12,75</u>	<u>1,506</u>	<u>9,00</u>	<u>13,56</u>	<u>7,81</u>	<u>5,75</u>	<u>290,6</u>	3710
	<u>29,4</u> °								Mittel	3723
— 40	<u>34,33</u> °	<u>16,3</u>	<u>18,03</u>	<u>1,676</u>	<u>9,85</u>	<u>16,51</u>	<u>8,29</u>	<u>8,22</u>	<u>314,2</u>	4736
— 30	<u>34,47</u>	<u>16,1</u>	<u>18,37</u>	<u>1,658</u>	<u>10,06</u>	<u>16,63</u>	<u>8,31</u>	<u>8,32</u>	<u>317,6</u>	4742
— 30	<u>34,39</u>	<u>16,85</u>	<u>17,54</u>	<u>1,671</u>	<u>10,22</u>	<u>17,08</u>	<u>8,44</u>	<u>8,64</u>	<u>331,7</u>	4715
	<u>34,4</u> °								Mittel	4731

Das Leitungsvermögen des *festen Paraffins* ist sonach im

Temperaturintervall 0° bis 29,4° $k = 0,000372$ (cm g sec)

„ 0° „ 34,4° $k = 0,000473$ (cm g sec)

Das Wärmeleitungsvermögen ist also in ähnlicher Weise stark von der Temperatur abhängig, wie die spezifische Wärme derselben Körpergruppe.

Bei Gelegenheit der Behandlung des Wärmeleitungsproblems aus dem variablen Temperaturzustand einer Kugel¹⁾ machte ich früher Messungen an Paraffin und leitete die Beziehung ab, gültig für das Temperaturintervall -10° bis $+20^{\circ}$ C,

$$k = 0,000230 + 0,000014 \cdot t \text{ (cm g sec),}$$

welche mit obigem neueren Ergebnis in befriedigender Übereinstimmung steht.

¹⁾ R. Weber, Inaug.-Dissert., Zürich 1878; auch in Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Gesellsch. 1878.

F. Quecksilber.

Bei der Untersuchung des Quecksilbers ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß dasselbe elektrisch gut leitet, somit im stande ist den Thermostrom teilweise aufzunehmen. Ein Teil dieses Stromes wird immer durch die Drähte gehen; sein Betrag wird aber von der Beschaffenheit der Oberfläche der Drähte und Lötstellen sowie von der Leitungsfähigkeit des Quecksilbers abhängen. Eine vollkommene Isolation des Drahtes kann allein dienen. Deswegen wurden die Drähte sorgfältig mit Seide umwickelt und dann bei gelinder Wärme eine gut isolierende dünne Lackschicht aufgetragen. Vor Verwendung des Thermoelementes, und nachdem dasselbe in das Quecksilber eingestellt worden war, wurde die Isolation geprüft. Von einem Leclanchéelement ging ein Draht nach dem Quecksilber, die Drähte des Thermoelementes gingen nach der einen Klemme des für Messung der Thermostrome empfindlich eingestellten Galvanometer, von der anderen Klemme ein Draht zum Element. Es zeigte sich, wenn alles in Ordnung, kein zehntel Skalenteil Ausschlag.

Der weitere Umstand, daß das Quecksilber sehr dicht ist, hätte leicht eine Verbiegung oder Verdrehung des Thermoelementes aus der Vertikalebene zur Folge, und dann wäre man über die vertikale Entfernung D der Lötstellen ganz im unklaren.

Zur Verhinderung dieser Verschiebung setzte ich zwischen die beiden Drähte zwei kleine Stützen aus dünnem Hartgummi. Dieselben hatten die Form eines länglichen Rechtecks mit Auskerbungen an den Schmalseiten und wurden mit Seidenfaden an die Drähte festgezogen. Diese Stützen standen ungefähr in den zwei Dritteln der Drahtlängen. Die gegen die Mitte näher stehende Stütze war oben bis auf etwa ein Zentimeter ausgeladen und lag am Boden des Heizgefäßes an, um eine Verdrehung des Thermoelementes noch besser zu verhindern.

Die Messungen an Quecksilber wurden nicht alle bei derselben Entfernung D der Lötstellen gemacht, sondern dieselbe war bei den beiden erten Messungen in der nachfolgenden Tabelle 0,97 cm, dann 0,92 cm bei der dritten, und bei allen folgenden 0,955 cm. Die Konstante des Thermoelementes

ist überall $1^{\circ}\text{C.} = 26,40$ Teilstrichen der Skala. — Es ergab sich dann für

Tabelle 10.

Quecksilber.

Z	T	t_u	$T - t_u$	J	E	W'	w	W	$N - N_0$	k
				Amp.	Volt	Watt	Watt	Watt		
— ^b 20 ^m	29,56°	14,96°	14,60°	4,772	29,88	142,60	7,40	135,20	182,4	0,01993
— 15	34,62	15,10	19,52	5,280	33,19	175,24	8,00	167,24	164,5	1984
— 30	34,45	14,75	19,70	5,322	33,53	170,55	7,90	170,65	164,8	1916
— 20	29,30	15,07	14,23	4,090	25,84	105,69	7,43	98,26	98,25	2024
— 20	30,04	15,03	15,01	4,840	30,15	145,91	7,47	138,46	189,6	1905
— 40	34,34	15,00	19,84	5,850	34,55	184,84	7,94	176,90	170,9	1988
— 40	29,37	15,90	13,47	4,990	31,12	155,29	7,64	147,65	134,8	2110
— 30	34,42	16,80	17,62	5,430	34,09	185,21	8,44	176,77	167,2	2030
— 20	29,92	17,00	12,92	4,730	29,99	141,85	8,00	133,85	128,2	2005
— 30	29,51	15,10	14,41	5,250	32,79	172,14	7,43	164,71	163,8	1934
— 40	29,52	16,30	13,22	5,118	31,92	163,88	7,76	155,62	154,2	1940
— 35	34,77	17,05	17,72	5,530	34,43	190,38	8,55	181,83	182,3	1918
— 40	29,58	17,15	12,43	4,958	31,00	153,71	8,00	145,71	140,2	1917
— 25	29,41	16,00	13,41	5,216	32,39	168,95	7,73	161,22	166,3	1869
— 25	34,30	16,15	18,15	5,260	32,80	172,47	8,44	164,03	162,6	1938
— 20	29,62	16,20	13,42	4,794	29,93	143,48	7,75	135,73	130,0	2005
— 30	34,80	16,10	18,20	5,407	33,57	181,52	8,44	173,08	170,0	1956
— 15	29,55	16,00	13,57	4,929	30,55	150,41	7,75	142,66	138,5	2032

Mittel 1971

Das Wärmeleitungsvermögen des *Quecksilbers* ist also

$$k = 0,0197 \text{ (cm g sec).}$$

Wenn man die Ergebnisse nach den Temperaturen zusammenstellt, so zeigt sich für Quecksilber eine kleine Abnahme des Leitungsvermögens bei steigender Temperatur, wie solches von M. Berget¹⁾ nachgewiesen von anderen Forschern aber das Gegenteil gefunden wurde.

Eine Vergleichung der mitgeteilten Ergebnisse mit denjenigen anderer Forscher, nach der sorgfältigen Zusammen-

1) A. Berget, Compt. rend. 107. p. 171. 1888; 106. p. 1152. 1888.

stellung des Hrn. R. Wachsmuth¹⁾, zeigt meine Werte als kleiner, mit Ausnahme des Wertes für Quecksilber, welcher nahe an denjenigen von M. Berget²⁾ reicht ($k = 0,02015$).

Leider erweckt mir gerade das Verfahren von M. Berget kein großes Vertrauen. Derselbe nimmt bei seinem angepaßten Bunsenschen Kalorimeter an, daß im Niveau der unteren Begrenzungsebene des Quecksilbers die Temperatur des schmelzenden Eises, also Null Grade herrsche, und daß in der oberen horizontalen Ebene, entsprechend dem damaligen Barometerstand, die Temperatur des Quecksilbers 101° C. sei. Beides ist wohl unrichtig; die erstere Temperatur ist höher, letztere ist tiefer, und zwar zusammen wohl um mehrere Grade. In der Tat herrscht die Nulltemperatur nur im Wasser, das in unmittelbarer Berührung mit dem Eise ist, also an gewissen Stellen außerhalb des inneren, nur Quecksilber enthaltenden Gefäßes. Schon ganz nahe jener Schicht, z. B. ein zehntel Millimeter von diesem Eise, ist die Temperatur höher, sonst würde das Eis gar nicht schmelzen. Von da ab, Punkt um Punkt gegen die Glaswand, durch das Glas, zum untersten Teil des Quecksilbers, endlich bis zur unteren Horizontalebene der Quecksilbermasse, also bis zum „Eintritt“ ins Kalorimeter, steigt die Temperatur stetig an. Die Anzahl der Grade ist nicht leicht mit Sicherheit anzugeben; dieselbe hängt vom Wasser, vom Glas und Quecksilber und ihren Dimensionen ab. Da Wasser etwa 11 mal, und Glas etwa 17 mal schlechter leitet als Quecksilber, so muß der Temperaturanstieg vom Eis bis zum Quecksilber, und dann noch ein Stück lang im Quecksilber selbst, ziemlich groß sein; ich schätze mehrere Grade. — Ähnlich, einen Temperaturabfall bewirkend, das Übel verstärkend, liegt die Sache am oberen, durch einen Dampfstrom erhitzten Ende. Dieses zugegeben, so folgt für k ein erheblich größerer Wert.

Ein anderer Umstand, der verkleinernd auf k einwirkte, ist folgender: M. Berget führt dem Kalorimetergefäß sorgfältig durch das Quecksilber hindurch Wärme zu; aber eine

1) R. Wachsmuth, Wied. Ann. 48. p. 161. 1893.

2) A. Berget, Compt. rend. 105. p. 224. 1887; Journ. de Phys. p. 503. 1888.

weitere Wärmemenge wird dem Kalorimeteis offenbar von dem das Kapillarrohr tragenden Schenkel und seinem Quecksilber durch Leitung und, im Kalorimeterwasser, durch Konvektion zugeführt. Dieser Wärmebetrag wird wesentlich vom Querschnitt jenes Schenkels und von der Zimmertemperatur abhängen. Dann aber ist die von M. Berget gemessene Wärmemenge größer, als was er messen wollte; ihr richtiger, kleinerer Wert bedingt aber ein kleineres k .

Die Kontrollmethode und Versuch krankten wohl ebenfalls an der Bestimmung der richtigen und am Ausschluß jeder anderen Wärmemenge.

Da die beiden genannten Tatsachen in umgekehrtem Sinne auf k wirken, so bleibt die Möglichkeit, daß die von M. Berget angegebene Zahl doch richtig sein könnte.

Neuchatel, 15. April 1903.

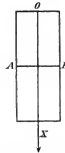
(Eingegangen 17. April 1903.)

**8. Das Maxwell'sche Verteilungsgesetz
der Geschwindigkeiten der Moleküle in Gasen
und Flüssigkeiten; von G. Jäger.**

I.

Wir wollen im folgenden einen neuen Beweis für das in der Überschrift erwähnte Gesetz geben, welcher lediglich der Annahme bedarf, daß ein Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmoleküle überhaupt existiert.

Wir denken uns ein zylindrisches Gefäß, welches eine ideale Trennungsebene AB besitzt (vgl. Figur). Diese Ebene habe die Eigenschaft, daß sie in der Richtung von oben nach unten eine Kraft auf jedes sie passierende Molekül ausübt. Es wird also jedem nach oben wandernden Molekül beim Durchsetzen der Ebene ein gewisser Betrag a an kinetischer Energie entzogen, während jedes nach unten fliegende Molekül denselben Betrag an kinetischer Energie gewinnt. Fassen wir die hydrostatischen Grundgleichungen in der Form zusammen:



$$\rho S - \frac{dp}{ds} = 0,$$

wohei die Buchstaben die bekannte Bedeutung besitzen, und formen wir sie um in:

$$\frac{dp}{\rho} = S ds,$$

so ist $S ds$ die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit des Gases in der Richtung der Kraft um den Weg ds transportiert wird, wobei der Druck um dp zunimmt. Wir können demnach unsere Gleichung auch schreiben:

$$\frac{dp}{\rho} = dA$$

oder:

$$(1) \quad \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} = A.$$

In dieser Form verstehen wir dann unter A die Gesamtarbeit der Kräfte, wenn die Masseneinheit des Gases von einem Ort mit dem Druck p_0 zu einem Ort vom Druck p_1 transportiert wird.

In unserem Gefäß befinde sich ein Gas, für welches das Boyle-Charlessche Gesetz

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}$$

vollkommen gültig ist. Dann wird Gleichung (1):

$$\frac{p_0}{\varrho_0} \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = A$$

oder:

$$l \frac{p_1}{p_0} = A \frac{\varrho_0}{p_0}$$

und weiter:

$$(2) \quad p_1 = p_0 e^{A \frac{\varrho_0}{p_0}}.$$

Ist nun p_0 der Druck im oberen Teil des Gefäßes, p_1 jener im unteren, so ist A nichts anderes als die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit des Gases aus dem oberen Teil in den unteren gebracht wird. Da für ein Molekül diese Arbeit a beträgt, ist:

$$A = na,$$

wenn wir unter n die Zahl der Moleküle in der Masseneinheit des Gases verstehen.

Nach der kinetischen Gastheorie gilt nun für die Beziehung zwischen Druck und Dichte die Gleichung:

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = \frac{n m \bar{c}^2}{3},$$

wie immer das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten auch lauten mag. Wir können daher auch

$$A \frac{\varrho_0}{p_0} = na \cdot \frac{3}{n m \bar{c}^2} = \frac{3a}{m \bar{c}^2}$$

setzen. Danach wird Gleichung (2):

$$(3) \quad p_1 = p_0 e^{\frac{3a}{m \bar{c}^2}}.$$

Diesen Ausdruck für die Beziehung zwischen p_1 und p_0 wollen wir jetzt aus den Vorstellungen der kinetischen Gas-

theorie ableiten. Es ist Gleichgewicht in beiden Teilen unseres Gefäßes vorhanden, wenn die Zahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit von oben nach unten wandern, gleich der Zahl der in entgegengesetzter Richtung fliegenden Moleküle ist. Wir nehmen nun an, daß ein Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmoleküle vorhanden, dessen Form jedoch unbekannt ist. Wir wollen deshalb die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu unserer Kraftebene AB zwischen u und $u + du$ besitzt, $f(u) du$ setzen. Die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, denen diese Geschwindigkeit zukommt, ist somit für das obere Gas $N_0 f(u) du$, für das untere $N_1 f(u) du$. Wir verstehen also unter N_0 und N_1 die bezüglichen Gesamtzahlen der Moleküle in der Volumeneinheit. In der Zeiteinheit werden sonach durch die Flächeneinheit unserer Kraftebene

$$(I) \quad \int_0^{\infty} N_0 u f(u) du = \frac{N_0 \bar{u}}{2}$$

Moleküle von oben nach unten fliegen. Dabei ist \bar{u} der Mittelwert aller positiven u . Daß im Integralwert dieser Mittelwert mit $N/2$ multipliziert erscheint, rührt daher, weil nur die Hälfte der Moleküle eine positive Geschwindigkeitskomponente hat, während die andere Hälfte in entgegengesetzter Richtung wandert.

Bilden wir jetzt die Zahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit der Ebene AB von unten nach oben durchsetzt, so wird dies nur jenen Molekülen möglich sein, welche senkrecht zur Ebene AB eine Komponente der kinetischen Energie besitzen, die größer ist als a , d. h. für welche $mu^2/2 > a$ ist. Also nur jene Moleküle, denen eine Geschwindigkeitskomponente $u > \sqrt{2a/m}$ zukommt, können die Ebene AB nach oben hin passieren, weshalb die Grenzen unseres Integrals für diesen Fall nicht 0 und ∞ , sondern: $\sqrt{2a/m}$ und ∞ sein werden. Und wir bekommen demnach für die Zahl der zur Zeiteinheit durch die Flächeneinheit nach oben fliegenden Moleküle:

$$(II) \quad \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} N_1 u f(u) du.$$

Für den Fall des Gleichgewichtes muß (I) = (II), d. h.:

$$\frac{N_0}{2} \bar{u} = N_1 \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du$$

sein. Nach bekannten Formeln der kinetischen Gastheorie ist aber:

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{p_0}{p_1} = \frac{2}{\bar{u}} \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du.$$

Da nun nach Gleichung (3)

$$\frac{p_0}{p_1} = e^{-\frac{2a}{m\bar{c}^2}}$$

ist, so erhalten wir die Beziehung:

$$(4) \quad \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du = \frac{\bar{u}}{2} \cdot e^{-\frac{3a}{m\bar{c}^2}}.$$

Wir wollen jetzt $\sqrt{2a/m} = x$ setzen. Es wird sonach:

$$\int_x^{\infty} u f(u) du = \frac{\bar{u}}{2} \cdot e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c}^2}}.$$

Diese Gleichung besagt, daß $\int u f(u) du$ für $u = \infty$ den Wert Null und für $u = x$ den Wert:

$$-\frac{\bar{u}}{2} e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c}^2}}$$

annimmt. Wir können demnach schreiben:

$$\int x f(x) dx = -\frac{\bar{u}}{2} e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c}^2}}.$$

Das Differential davon ist:

$$x f(x) dx = -\frac{3\bar{u}x}{2\bar{c}^2} e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c}^2}} dx.$$

Daraus erhalten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{3 \bar{u}}{2 c^3} e^{-\frac{3 x^2}{2 c^2}}.$$

Es ist somit die Funktion $f(x)$ gefunden.

Nennen wir nun die Komponenten irgend einer Geschwindigkeit parallel zu den drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems u , v , w , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül eine Komponente zwischen u und $u + du$ besitzt:

$$f(u) du = \frac{3 \bar{u}}{2 c^3} e^{-\frac{3 u^2}{2 c^2}} du.$$

Analog für eine Komponente zwischen v und $v + dv$:

$$f(v) dv = \frac{3 \bar{v}}{2 c^3} e^{-\frac{3 v^2}{2 c^2}} dv,$$

wobei $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w}$ ist.

Die Zahl der Moleküle, welche eine Komponente zwischen u und $u + du$ besitzt, ist für die Volumeneinheit im oberen Teil des Gefäßes $N_0 f(u) du$. Ihre Gesamtzahl somit:

$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 f(u) du.$$

Daraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 \bar{u}}{2 c^3} e^{-\frac{3 u^2}{2 c^2}} du = 1.$$

Wir wollen jetzt eine neue Variable einführen, indem wir $3 u^2 / 2 c^2 = y^2$ setzen. Daraus ergibt sich:

$$du = \sqrt{\frac{2 c^2}{3}} dy.$$

Und es wird nach einer leichten Reduktion:

$$\bar{u} \sqrt{\frac{3}{2 c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$

Nun ist aber:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi},$$

folglich:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{2c^2}{3\pi}}.$$

Und es wird:

$$(5) \quad f(u) = \sqrt{\frac{3}{2\pi c^2}} e^{-\frac{3u^2}{2c^2}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}},$$

wenn wir $2c^2/3 = \alpha^2$ setzen. Bekanntlich ist α dann nichts anderes als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Unsere Form für $f(u)$ ist also genau dieselbe, welche von Maxwell gefunden worden ist.

Wir denken uns jetzt unser Gefäß von einer sehr großen Zahl paralleler, idealer Ebenen von der Eigenschaft der Ebene AB durchsetzt. Der gegenseitige Abstand je zweier benachbarter Ebenen sei sehr klein, aber doch so groß, daß darin noch eine sehr große Anzahl von Molekülen vorhanden sind. Es läßt sich dann für zwei aufeinander folgende Gasschichten genau dieselbe Überlegung wiederholen, wie wir sie früher auf die einzelne Ebene AB angewendet haben.

Nennen wir die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit der aufeinander folgenden Gasschichten $N_0, N_1, N_2 \dots$, den Zuwachs der kinetischen Energie, welche ein Molekül beim Passieren der einzelnen Ebenen erfährt: $a_1, a_2, a_3 \dots$, so ist nach Gleichung (3):

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 e^{\frac{3a_1}{m c^2}}, \\ N_2 &= N_1 e^{\frac{3a_2}{m c^2}} = N_0 e^{\frac{3(a_1 + a_2)}{m c^2}}, \\ &\dots \dots \dots \\ N_k &= N_0 e^{\frac{3(a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{m c^2}} = N_0 e^{\frac{3X}{m c^2}}, \end{aligned}$$

wenn wir $a_1 + a_2 + \dots + a_k = -m\chi$ setzen.

Da die Arbeit der Kräfte gleich ist der Zunahme der kinetischen Energie, somit gleich der Abnahme der potentiellen,

so können wir χ als das Potential der äußeren Kräfte auffassen und damit unsere Formel nicht nur nach einer Richtung, sondern nach allen drei Richtungen des Raumes erweitern. Es ist dann die Zahl der Moleküle, welche eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u + du$ besitzen, gegeben durch:

$$\frac{N_0}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{3x}{c^2} - \frac{u^2}{\alpha^2}} du = \frac{N_0}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha^2} (u^2 + 2x)}$$

da ja, wie bereits erwähnt wurde, $\alpha^2 = 2c^2/3$ ist. Es ist somit N_0 die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit an einer Stelle des Gases, für welche das Potential der äußeren Kräfte gleich Null ist.

Wir haben demnach das Maxwell'sche Verteilungsgesetz mit jener Ergänzung gefunden, welche ihm Boltzmann¹⁾ gegeben hat.

II.

Das Maxwell'sche Verteilungsgesetz, welches ursprünglich für ideale Gase abgeleitet wurde, hat man später auch auf Flüssigkeiten angewendet und es ist mehrfach der Versuch gemacht worden, mit Benutzung dieses Gesetzes den Dampfdruck einer Flüssigkeit und dessen Abhängigkeit von der Temperatur zu bestimmen.²⁾ Allein bei diesen Versuchen war es immer notwendig, durch willkürliche Vernachlässigungen und Annahmen die Rechnung zu ermöglichen, so daß bis heute keine exakte Lösung dieser Aufgabe vorliegt und wohl auch nicht so bald geliefert werden dürfte.

Wie es nun von großem Vorteil für den Ausbau der kinetischen Gastheorie war, daß man zuerst die Eigenschaft der idealen Gase darzustellen suchte und später auf die wirk-

1) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I. p. 137. 1896.

2) Hr. M. Reinganum, dem ich dafür bestens danke, hatte die Güte, mich auf die Arbeit des Hrn. H. Kamerlingh Onnes, *Théorie générale de l'état finide* [Arch. Neerl. 30. p. 101–136. 1896 (Auszug aus einer im Jahre 1881 in der k. Akad. zu Amsterdam publizierten Arbeit)] aufmerksam zu machen, in welcher zum ersten Male ein Versuch einer kinetischen Theorie der Spannung des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit gemacht wird. Es ist sowohl mir als auch den Herren W. Voigt und C. Dieterici, gegen welche ich seinerzeit (Wied. Ann. 67. p. 894 ff. 1899) Prioritätsansprüche geltend machte, diese grundlegende Arbeit entgangen.

lichen Gase übergang, so scheint mir der einzig richtige Weg zum Ausbau einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten darin zu liegen, daß man erst versucht, eine ideale Flüssigkeit zu konstruieren und deren Eigenschaften zu präzisieren und erst dann zu den wirklichen Flüssigkeiten überzugehen. Daß dies bisher nicht geschah, lag wohl hauptsächlich daran, daß man durch den großen Erfolg der van der Waalsschen Zustandsgleichung bewogen, die kinetische Theorie der Flüssigkeiten immer als Erweiterung der Theorie der wirklichen Gase darzustellen suchte.

Wir wollen uns im folgenden eine ideale Flüssigkeit konstruieren. Die Flüssigkeitsmoleküle stellen wir uns als Kugeln vor — man tat dies ursprünglich zur Vereinfachung der Rechnung ja auch mit den Gasmolekülen. Diese Kugeln sollen für eine bestimmte Flüssigkeit in Größe und Masse alle einander gleich, vollkommen elastisch und unendlich wenig kompressibel sein. Sie üben Anziehungskräfte aufeinander aus, deren Wirkungssphäre so groß ist, daß sehr viele Moleküle innerhalb einer Wirkungssphäre Platz finden. Ferner sollen sie so nahe aneinander liegen, daß die Kräfte, welche ein Molekül von ihren Nachbarmolekülen erfährt, nach allen Richtungen dieselben sind, d. h. sich gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben. Im Innern der Flüssigkeit verhält sich also jedes Molekül so, als würde gar keine Kraft auf es einwirken. Abgesehen vom Größenunterschiede der mittleren Weglänge werden sich unsere Moleküle genau so bewegen wie die Moleküle eines idealen Gases. Der Kompressions- sowie der thermische Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit sei so klein, daß wir das Volumen der Flüssigkeit bezüglich des äußeren Druckes und der Temperatur als konstant annehmen können. Die Anziehungskräfte, welche die Moleküle aufeinander ausüben, seien nur von deren gegenseitiger Entfernung abhängig. Der innere Druck der Flüssigkeit, welcher aus diesen Anziehungskräften resultiert, ist also lediglich eine Funktion des Volumens der Flüssigkeit, ist somit ebenfalls vom äußeren Druck und der Temperatur unabhängig. Dasselbe ist mit der Kapillaritätskonstanten und der Verdampfungswärme der Fall. Der zu unserer idealen Flüssigkeit zugehörige gesättigte Dampf verhält sich wie ein ideales Gas

und seine Dichte sei sehr klein gegenüber der Dichte der Flüssigkeit.

Die so definierte Flüssigkeit, der ja auch wirkliche Flüssigkeiten, wie z. B. Quecksilber, sehr nahe kommen, erleichtert die Anwendung der Sätze der Thermodynamik als auch der kinetischen Theorie der Materie sehr bedeutend. Wir wollen das Gesagte dadurch erläutern, daß wir auf beiden Wegen die Abhängigkeit des Druckes des gesättigten Dampfes von der Temperatur ableiten. Ich habe etwas ganz Ähnliches schon in der Abhandlung: „Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmoleküle“¹⁾ veröffentlicht, nur galt es dort, für die ideale Flüssigkeit nachzuweisen, daß auch für sie nur das Maxwell'sche Verteilungsgesetz das einzig mögliche ist, während es sich uns diesmal hauptsächlich darum handelt, in einwandfreier Weise den Dampfdruck nach der kinetischen Theorie zu berechnen.

Wir wenden auf unsere Flüssigkeit die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung an:

$$rJ = T \frac{\partial p}{\partial T} (v - v')$$

(r = Verdampfungswärme, J = mechanisches Wärmeäquivalent, T = absolute Temperatur, p = Druck des gesättigten Dampfes, v = spezifisches Volumen des Dampfes, v' = spezifisches Volumen der Flüssigkeit). v' kann gegen v vernachlässigt werden. Nach dem Boyle-Charlesschen Gesetz ist:

$$pv = RT,$$

wobei in unserem Falle R sich auf die Masseneinheit der Flüssigkeit bezieht. Für $v - v'$ können wir somit RT/p einführen. Da nur p und T variabel sind, so erhält man leicht:

$$(6) \quad p = C e^{\frac{-rJ}{RT}}$$

(C = konst.). rJ ist die Arbeit, welche bei der Verdampfung der Masseneinheit Flüssigkeit geleistet werden muß. Ist n die Zahl der Moleküle dieser Masseneinheit, a die Arbeit, welche

1) G. Jäger, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 111. IIa. p. 255 ff. 1902.

nötig ist, um ein Molekül aus dem Flüssigkeitsinnern in das Dampfinnere zu schaffen, so ist:

$$rJ = na.$$

Nach der kinetischen Gastheorie ist ferner:

$$\frac{nm\bar{c}^2}{3} = RT,$$

(\bar{c}^2 = mittleres Quadrat der Geschwindigkeiten, m = Masse der Gasmoleküle), daher ist

$$\frac{rJ}{RT} = \frac{3a}{m\bar{c}^2}$$

und

$$p = C e^{-\frac{3a}{m\bar{c}^2}}$$

die Dampfspannung; p können wir nun dank unserer Definition der idealen Flüssigkeit auch nach der kinetischen Theorie herleiten. Es besteht thermisches Gleichgewicht, wenn in der Zeiteinheit ebensoviel Moleküle aus dem Dampf in die Flüssigkeit übergehen, wie umgekehrt aus der Flüssigkeit in den Dampf. Ist u die Geschwindigkeitskomponente der Moleküle senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche, so $Nu/2$ die Zahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit in die Flüssigkeit übertreten, wenn N die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit des Dampfes ist, von denen die Hälfte gegen die Flüssigkeitsoberfläche fliegt (\bar{u} = Mittelwert der gegen die Flüssigkeitsoberfläche gerichteten Komponenten u).

Die Zahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit durch die Einheit der Oberfläche unserer Flüssigkeit in den Dampf übergeht und eine Geschwindigkeitskomponente normal gegen die Oberfläche zwischen u und $u + du$ besitzen, sei $\varphi(u)du$. Nicht alle Flüssigkeitsmoleküle, welche die Oberfläche treffen, können in den Dampf übertreten, sondern nur jene, deren kinetische Energie senkrecht zur Oberfläche größer ist als die zum Übertritt nötige Arbeitsleistung a . Wir nehmen also an, daß wir infolge der Oberflächenspannung, welche durch die Anziehungskräfte der Moleküle entsteht, zur Überwindung dieser Kräfte eine Arbeit a leisten müssen, wenn wir die Moleküle aus dem Innern der Flüssigkeit in das Dampfinnere bringen. Es entspricht somit a der Verdampfungswärme eines Moleküls unserer

idealen Flüssigkeit. Für die Möglichkeit der Verdampfung muß also:

$$\frac{m \bar{u}^2}{2} > a \quad \text{oder} \quad u > \sqrt{\frac{2a}{m}}$$

sein. Die Zahl der in der Zeiteinheit durch die Oberflächeneinheit übertretenden Moleküle ist somit:

$$\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} q(u) du = \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du,$$

indem wir $q(u) = u f(u)$ einführen. Es gilt nun für den stationären Zustand:

$$(7) \quad \frac{N \bar{u}}{2} = \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du.$$

Nun ist aber nach der kinetischen Gastheorie der Dampfdruck

$$p = \frac{N m \bar{c}^2}{3} \quad \text{oder} \quad N = \frac{3p}{m \bar{c}^2}$$

und es folgt aus Gleichung (7):

$$(8) \quad p = \frac{2 m \bar{c}^2}{3 \bar{u}} \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du.$$

Die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung hat uns für den Druck ergeben:

$$p = C e^{\frac{-3a}{m \bar{c}^2}}.$$

Es muß demnach sein:

$$\frac{2 m \bar{c}^2}{3 \bar{u}} \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u f(u) du = C e^{\frac{-3a}{m \bar{c}^2}}.$$

Diese Gleichung entspricht aber in ihrer Form vollkommen der Gleichung (4). Wir können deshalb auch aus ihr ohne

weiteres die Funktion $f(u)$ finden und erhalten hier nach demselben Vorgang wie dort:

$$-x f(x) dx = \frac{-9\bar{u} C x}{2m(\bar{c})^3} e^{\frac{-3x^2}{\bar{c}^2}} dx.$$

Da nun $x f(x) = q(x)$ ist, so erhalten wir für die Zahl der Flüssigkeitsmoleküle, welche in der Zeiteinheit durch die Oberflächeneinheit in den Dampf übertreten und in der Flüssigkeit eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u + du$ besitzen:

$$(9) \quad q(u) du = \frac{9\bar{u} C u}{2m(\bar{c})^3} e^{\frac{-3u^2}{\bar{c}^2}} du.$$

Da nach dem früher Gesagten sich die Moleküle im Innern der Flüssigkeit so bewegen müssen, als würden gar keine Kräfte auf sie wirken, so gilt für sie natürlich dasselbe Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung wie für die Dampfmoleküle. Nun finden wir für jene, daß die Zahl der Moleküle, welche eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u + du$ haben, durch:

$$\frac{3\bar{u} N}{2\bar{c}^3} e^{\frac{-3u^2}{\bar{c}^2}} du$$

gegeben ist (N = Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit), und daß wir die Zahl der Moleküle, welche in der Zeiteinheit die Querschnitteinheit passieren, finden, wenn wir diesen Ausdruck noch mit u multiplizieren. Wir erhalten somit der Form nach für das ideale Gas denselben Ausdruck wie für unsere Flüssigkeit, nur hätten wir im letzteren Falle dann N durch $3C/m\bar{c}^3$ zu ersetzen.

Könnten wir die Konstitution einer Flüssigkeit analog jener eines idealen Gases auffassen, d. h. könnten wir auch bei der Flüssigkeit annehmen, daß der Durchmesser des Moleküls gegenüber der mittleren Weglänge des Moleküls eine kleine Größe sei, so würde $3C/m\bar{c}^3$ ebenfalls nichts anderes als die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit der Flüssigkeit bedeuten. Da wir aber bei unserer idealen Flüssigkeit umgekehrt die mittlere Weglänge des Moleküls als klein gegenüber dem Durchmesser eines Moleküls annehmen müssen, so

ist die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit klein gegenüber dem Ausdruck $3C/m\bar{c}^2$. In anderen Worten gesagt heißt das nichts anderes, als daß die Zahl der Stöße, welche die Moleküle auf die Flächeneinheit einer idealen durch die Flüssigkeit gelegten Ebene ausführen, viel größer ist, als wir erhalten, wenn wir diese Zahl nach der Formel für ideale Gase berechnen würden.

Bekanntlich ist man bei der Bestimmung der mittleren Weglänge mit Berücksichtigung der Ausdehnung der Moleküle auf bisher unüberwindliche Schwierigkeiten gestoßen. Es muß aber die Formel für die mittlere Weglänge bekannt sein, will man nach den bereits bestehenden Methoden den Druck eines Gases berechnen. Es war das auch bisher die Ursache, warum es nicht gelang, nach der kinetischen Theorie eine exakte Formel für den Druck des gesättigten Dampfes zu berechnen, während wie wir hier sehen sich für unsere ideale Flüssigkeit sowohl nach den Regeln der Thermodynamik als auch nach der kinetischen Theorie ein und dieselbe Form für den Dampfdruck mit Leichtigkeit ergibt, wenn wir nur die in Gleichung (8) vorkommende Funktion nach dem später für $\varphi(u)$ erhaltenen Ausdruck richtig deuten.

Zu dem Zweck ist es nötig, noch die Bedeutung der Konstanten C kennen zu lernen. Dies gelingt aber ebenfalls sehr leicht, wenn wir den inneren Druck der Flüssigkeit in unsere Rechnung einführen.

Unter dem inneren Druck verstehen wir jenen Druck, welcher auf die Flüssigkeit durch die inneren Kräfte der Moleküle hervorgebracht wird. Es müssen demnach infolge ihrer Bewegung die Flüssigkeitsmoleküle einen Druck ausüben, welcher gleich ist der Summe aus dem inneren und äußeren Druck.

Für unseren idealen Fall wird der äußere Druck gegenüber dem inneren verschwindend klein sein. Es ist daher der innere Druck jener Druck, den die Moleküle infolge ihrer kinetischen Energie ausüben würden, wenn keine inneren Kräfte vorhanden wären, sondern die Flüssigkeit durch äußeren Druck auf das ihr zukommende Volumen komprimiert würde. Diesen Druck können wir aber definieren als die Gesamtbewegungsgröße, welche durch die Flächeneinheit einer idealen Ebene,

die wir durch die Flüssigkeit legen, in der Zeiteinheit von den passierenden Molekülen getragen wird.

Multiplizieren wir demnach den Ausdruck (9) mit mu , d. i. die Komponente der Bewegungsgröße, welche ein Molekül von der Masse m senkrecht gegen unsere ideale Ebene besitzt, und integrieren wir nach u von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhalten wir den inneren Druck:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} m u \varphi(u) du = \frac{3 \bar{u}}{2(c^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{3u^2}{2c^2}} du$$

$$= \bar{u} C \sqrt{\frac{6}{c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \bar{u} C \sqrt{\frac{3\pi}{2c^2}}.$$

Es wird dieses Resultat leicht gewonnen, wenn wir $3u^2/2c^2 = x^2$ setzen und bedenken, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

ist. Da für unsere Flüssigkeit ebenfalls das Maxwellsche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten gilt, so können wir:

$$\bar{u} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{2\bar{c}^2}{3}$$

setzen, wenn wir unter α die wahrscheinlichste Geschwindigkeit verstehen. Durch Einführung dieser Werte für \bar{u} und c^2 , wird:

$$P = C.$$

Die Konstante C bedeutet sonach direkt den inneren Druck unserer Flüssigkeit. Es wird mithin die Gleichung (6) für den Druck des gesättigten Dampfes

$$p = P e^{-\frac{rJ}{RT}}.$$

Fassen wir demnach nochmals kurz die Resultate der vorliegenden Abhandlung zusammen, so haben wir erstens einen

neuen und, wie mir scheint, anschaulichen und einfachen Weg zum Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten gefunden, zweitens ist es uns gelungen für eine ideale Flüssigkeit den Druck des gesättigten Dampfes sowohl nach den Regeln der Thermodynamik als auch nach der kinetischen Theorie in vollkommen übereinstimmender und exakter Weise zu bestimmen und drittens die Beziehung aufzustellen, welche zwischen dem Druck des gesättigten Dampfes und dem Binnendruck dieser idealen Flüssigkeit besteht. —

(Eingegangen 30. April 1903.)

9. *Über Lamellentöne; von Moritz Weerth.*

(Auszug aus der Rostocker Inaugural-Dissertation.)

Die Lamellentöne, die Töne, die durch Strömen einer Luftlamelle gegen eine Einlage, z. B. die scharfe Schneide eines Keiles entstehen, sind hisher meist im Zusammenhang mit Untersuchungen über Tonquellen ähnlicher Art behandelt worden. So führt z. B. Helmholtz ¹⁾ in den älteren Auflagen seiner Tonempfindungen den Ton einer Lähialpfeife auf das Verstärken eines Tones des Schneidengeräusches zurück, ehen des Tones, auf den die Pfeife Resonanz gibt.

Ferner findet man in einer Abhandlung von Hrn. Strouhal ²⁾ Bemerkungen über Schneidengeräusche. Strouhal interessieren besonders die Hiebtöne, also Töne, wie sie durch rasche Bewegung einer Gerte in der Luft entstehen. Da die Tonhöhe mit der Bewegungsgeschwindigkeit variiert, so mußte er, um nicht ein Gemisch von Tönen, sondern nur einen Ton zu erhalten, sich einen Apparat konstruieren, der eine an allen Punkten des tonerzeugenden Gegenstandes gleiche Geschwindigkeit gestattete. Er erreichte das in sehr einfacher Weise, indem er einen Draht parallel zu einer Achse sich um diese bewegen ließ. So entsteht ein Ton, dessen Höhe der Bewegungsgeschwindigkeit direkt, und dem Drahtdurchmesser umgekehrt proportional ist. Dabei beobachtete Strouhal eine merkwürdige Erscheinung. Erreichte bei fortwährend steigender Bewegungsgeschwindigkeit der Ton die Höhe des Draht-eigentones, so setzte dieser, den anderen vernichtend, stark ein, um auch noch anzuhalten, wenn die Geschwindigkeit, weiter gesteigert, schon nicht mehr der Höhe des Draht-treihungstones entsprach. Durch stetiges Steigern der Geschwindigkeit konnte er auf diese Weise sowohl Grundton, wie Obertöne des Drahtes erregen, und zwar schlug der Ton

1) H. v. Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen 1. Aufl. 5. p. 150. 1862.

2) V. Strouhal, Wied. Ann. 5. p. 216. 1878.

immer plötzlich, d. h. ohne Zwischenglied vom 1. zum 2., vom 2. zum 3. etc. Oberton über.

Ich selbst habe nach Angabe von Hrn. Prof. Wachsmuth den Versuch in der Form wiederholt, daß ich zwei Stimmgabeln um eine gemeinsame Mittelachse rotieren ließ. Bei einer bestimmten, auch von dem Abstand der Stimmgabeln von der Achse abhängigen Geschwindigkeit, setzte der Eigenton lebhaft ein.

Strouhal identifiziert nun, wenigstens der Entstehungsgeschichte nach, Drahtreibungs- und Schneidenton und setzt diese Erscheinung im wesentlichen der Tongebung der Labialpfeife gleich.

Hr. Hensen¹⁾ dagegen verwirft vollkommen die alte Theorie, der zufolge ein primärer Reibungston die Eigenschwingungen der Luftsäule im Pfeifeninnern erregt. Er führt vielmehr die Tonbildung auf die Wirkung einer Transversallamelle zurück und identifiziert nun in gewisser Hinsicht die Entstehung des Lamellen- mit der des Labialpfeifentones, insofern nämlich, als er auch hier die Tonerzeugung dem Aufeinanderwirken zweier Lamellen zuschreibt. Dem Pfeifenraum fällt bloß die Aufgabe zu, in Bezug auf die Ortholamelle einseitige Druckschwankungen zu erzeugen, mit anderen Worten, die Bildung einer Transversallamelle zu ermöglichen. Der allen diesen Überlegungen naheliegende Versuch, Töne nur durch Aufeinanderwirken zweier Lamellen zu erzeugen, führte zu positiven Resultaten.²⁾

Wie ist nun aber die Entstehung einer Transversalschwingung zu erklären? Hier seien der Einfachheit halber die Ausführungen von Hensen wiedergegeben:

„Es lag die Annahme nahe, daß die Lamelle durch eine Art Schnürleiste (infolge des Durchströmens der zweiten Lamelle) im freien Erguß behindert werde. Daher werde sich die Luft vor der Leiste so lange anstauen, bis deren Widerstand überwunden, bez. die Leiste zersprengt und mit fortgerissen werde. Die angehäuften und gepreßte Luft schieße

1) V. Hensen, Ann. d. Phys. 2. p. 719. 1900.

2) W. Friedrich, Inaug.-Diss. Rostock 1901; Ann. d. Phys. 7. p. 97. 1902.

dann vorwärts, und jetzt bilde sich die Leiste von neuem. So entstehe, ähnlich wie an den Stimmbändern, die Periodizität in dem gleichmäßigem Fluß der Luft.“

Im Luftstrom der Primärlamelle entstehen infolge des periodischen Aufstauens der Luft Druckschwankungen, die longitudinal rückwärtsschreitend noch bis 10 m vor dem Spalt in der Luftzuleitung mittels Flammenmanometer von Hrn. Friedrich¹⁾ nachgewiesen worden sind.

Bilden sich also periodisch Luftverdichtungen, so weicht die Lamelle vor diesem Widerstand nach der anderen Seite aus, penduliert daher um die Schneide.

Den unmittelbaren Anlaß zu diesen Untersuchungen gaben die Arbeiten von Hensen und Friedrich. Es blieb die Frage offen, ob die Bedeutung der Pfeifenlippe identisch ist mit der der Schneide bei Lamellentönen. Gerade der Umstand, daß lediglich beim Strömen einer Luftlamelle gegen eine Schneide ein Ton entsteht, die Schneide also dabei für die Tonbildung von wesentlicher Bedeutung ist, muß zu der Vermutung Anlaß geben, daß sie die Tonentstehung direkt veranlaßt, ja bedingt. Was sind nun aber die Schneidentöne, wie entstehen sie, und welche Beziehungen bestehen zwischen ihnen und den Labialpfeifentönen? Vorliegende Arbeit ist ein Versuch, diese Frage zu beantworten. Sie wurde auf Veranlassung von Hrn. Prof. Dr. Wachsmuth unternommen.

1. Hensen empfiehlt, die Schneidentöne stroboskopisch zu untersuchen, z. B. mit einer isochronen Stimmgabel. Die Methode ist hier aber schwer zu verwenden, da sie eine konstante Höhe des Schneidentones voraussetzt, eine Bedingung, die wegen der Abhängigkeit der Tonhöhe vom Luftdruck kaum ganz genau zu erfüllen ist. Diesen auch nur für kurze Zeit mit einem Doppelbalg vollkommen konstant zu halten, ist nicht möglich. Freilich hätte man mittels der später erwähnten Bomben mit komprimierter Luft einen gleichmäßigen Druck erzielen können, doch wären dadurch diese Versuche zu kostspielig geworden.

War es aber nicht möglich, die Tonhöhe konstant zu halten, so mußte nach einem Stroboskop gesucht werden,

1) W. Friedrich, l. c.

welches sich nach ihr regulieren ließ. Mit der Stimmgabel ging das nicht, wohl aber mit einer mit Spalten versehenen Scheibe, deren Rotationsgeschwindigkeit sich der Tonhöhe entsprechend regulieren ließ.

Die Luftlamelle mußte natürlich auf irgend eine Weise sichtbar gemacht werden. Zuerst wurde das zu erreichen versucht, indem man zwei Glaskolben, deren einer Ammoniak, der andere Salzsäure enthielt, in die Luftzuleitung einschaltete. So konnte ja auch die Lamelle deutlich gekennzeichnet werden, bald verstopften aber Salmiakablagerungen den Spalt und machten weitere Beobachtungen unmöglich. Zweckmäßiger war die Verwendung von Tabaksqualm. Die Anordnung war folgende (vgl. Fig. 1): Vom Balg gingen zwei Luftzuleitungen

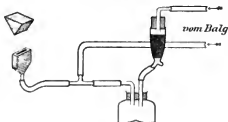


Fig. 1.

aus, die sich kurz vor dem Spalt vereinigten. In die eine war ein Pfeifenkopf so eingeschaltet, daß die Luft oben hineinblies und den angezündeten Tabak in Brand hielt. Durch ihn hindurch gelangte sie zur Verbindungsstelle, um dann mit dem direkt aus dem Balg tretenden Hauptstrom zum Spalt zu gehen. Die zweite Leitung hatte den Zweck, einmal den Druck der dem Spalt zugeführten Luft beliebig stark zu machen, und dann die Verbrennung nicht zu sehr zu beschleunigen, damit eine Füllung für eine Versuchsreihe genügte. Da das Kondenswasser sich im Spalt ansetzte und dadurch die Tonbildung störte, wurde der aus dem Pfeifenkopf tretende Rauch durch eine Flasche geleitet, die das Wasser fast völlig aufnahm. Ganz ließ es sich nicht vom Spalt fernhalten, die geringen Mengen störten aber nicht mehr und brauchten nur von Zeit zu Zeit entfernt zu werden.

Die so sichtbar gemachte, grell beleuchtete Lamelle wurde

nun durch die vor dem Auge vorüberziehenden Spalte der durch einen Elektromotor schnell gedrehten Scheibe betrachtet. Die Tourenzahl konnte mit einem geeigneten Widerstand, oder besser noch, nach rohem Einstellen mit dem Widerstand, durch Bremsen mit einem in der Hand gehaltenen Gegenstand der Schwingungszahl des Tones angepaßt werden. Hatte der Ton z. B. die Schwingungszahl 800, so waren bei 64 Spalten $12\frac{1}{2}$ Touren nötig, um die Spalte genau im zeitlichen Abstand einer ganzen Schwingung voneinander zu halten. Man mußte also immer dasselbe Phasenstück beobachten, d. h. keine Schwingung wahrnehmen, sondern die Luftlamelle in irgend einer Stellung beharren sehen. Die geringste Verstimmung gab dann ein Bild der Schwingung selbst, weil jeder Spalt das folgende oder vorangehende Phasenstück zeigte, je nachdem sich die Scheibe zu schnell oder zu langsam drehte.

Die Methode befriedigt jedoch auch nicht vollkommen. Ihre Verwendung ist nur zweckmäßig bei verhältnismäßig tiefen Tönen, die wegen ihrer Unreinheit nicht zu verwenden waren. Bei der großen Anzahl Spalte, welche die Scheibe haben mußte, waren die Abstände gegenüber der durch die Lichtschwächung bedingten Minimalbreite der Spalte, und somit auch das beobachtete Phasenstück zu groß, als daß es klare Bilder hätte geben können. Immerhin zeigte die Methode doch, daß, wie man in Fig. 2 sieht, Wülste aufsteigen, deren Existenz mit der Tonbildung in engem Zusammenhang schon wegen des Isochronismus ihrer Periode mit der des Tones stehen mußte. Der Versuch, die Lamelle in



Fig. 2.

mehreren Schwingungsphasen zu photographieren, wollte nicht gelingen. An eine Zeitaufnahme durch das Stroboskop war schon wegen der Unmöglichkeit, die Bewegung des Motors für die Zeit der Aufnahme mit der Schwingungszahl des Tones genau isochron zu halten, nicht zu denken. Bei einer Momentaufnahme durfte die Beleuchtungszeit nur einen geringen Teil der Dauer einer einzelnen Schwingung betragen. Ein Entladungsfunken erfüllte wohl diese Bedingung, er war aber als Beleuchtungsmittel, auch bei Anwendung von Zinkelektroden, zu wenig lichtstark.

Der Gedanke lag nun nahe, die Lamelle bei Funkenbeleuchtung zu beobachten. Dauernder Isochronismus war auch hier so gut wie ausgeschlossen. Machte man jedoch die Funkenzahl möglichst klein — der Primärstrom wurde 22 mal pro Sekunde unterbrochen — so konnte die Anzahl der Funken niemals weit von einer Zahl entfernt sein, die in die Schwingungszahl ohne Rest aufging. Zuerst wurden der großen Lichtstärke wegen Funkenstrecken mit Zinkelektroden verwandt. Das knatternde Funkengeräusch störte jedoch die Beobachtung, weil es den Schneidenton übertönte. Bei den späteren Untersuchungen benutzte man deswegen nur Geissler-

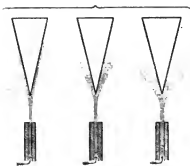


Fig. 3.

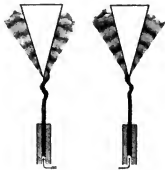


Fig. 4.

Fig. 5.

röhren, die zu beiden Seiten der Lamelle dieselbe beleuchteten, während von vorne beobachtet wurde.

Gab die Lamelle keinen Ton, so sah man bei konstanter Beleuchtung den Rauch zu beiden Seiten des Keiles so in die Höhe steigen, daß die Grenzebenen den Keilwänden parallel waren. Sobald der Ton einsetzte, divergierten die Rauchgrenzen gegen die Keilwände (vgl. Fig. 3) nach oben hin, und zwar um so mehr, je höher der Ton war. Dann sah man bei intermittierendem Licht und möglichst kleiner Zahl der Entladungen die Lamelle unterhalb der Schneide hin- und herschwingen, infolgedessen die Luft einmal vollständig an der einen, dann an der anderen Seite des Keiles in die Höhe strömte. So erklären sich die auf beiden Seiten von der Schneide aufwärts wandernden intermittierenden Wülste.¹⁾ Figg. 4 und 5,

1) Vgl. auch Fig. 16 bei Hensen.

nach der Beobachtung gezeichnet, zeigen diese Wülste. Es sind zwei Augenblicksbilder der schwingenden Lamelle in den Umkehrpunkten.

2. Die Untersuchungen erstreckten sich nun weiter darauf, inwieweit durch Variieren der Versuchsbedingungen die Tonhöhe verändert wird. In Übereinstimmung mit Hrn. Hensen konnte eine Abhängigkeit derselben von der Stärke des Luftdruckes, der Breite der Mundspalte und dem Abstand des Keiles festgestellt werden.

Zum Aufstellen der Tabellen war der sehr empfindlichen Abhängigkeit vom Luftdruck wegen ein Luftstromapparat nötig, der den Druck beliebig zu variieren und wenigstens für die Dauer einer Beobachtung konstant zu halten gestattete. Mit einem gewöhnlichen Blasebalg, oder selbst einem Doppelbalg war das nicht zu erreichen. Recht befriedigende Resultate wurden dagegen mit einer mit komprimierter Luft gefüllten Bombe erzielt, die in Verbindung mit einem Reduzierventil, wie sie bei Bierdruckapparaten gebraucht werden, einen für geraume Zeit konstanten und leicht auf jede Stärke einstellbaren Luftstrom hergab. Der Luftdruck wurde mit einem Wassermanometer gemessen, dessen Empfindlichkeit sich leicht durch Neigung des einen Schenkels steigern ließ.

In allen folgenden Untersuchungen wurde die Tonhöhe mit einem Monochord bestimmt. Die Belastung der Saite blieb konstant, die jedesmalige Tonhöhe ergab sich aus der regulierbaren Länge, die dieser ja umgekehrt proportional ist. Es wird nun leicht der Fehler gemacht, daß der verschiebbare Keil, der die Länge der Saite bestimmen soll, zu hoch gewählt wird, damit die Saite gut aufliegt. Indem man aber hiermit auch die Spannung vergrößert, und zwar um so mehr, je kürzer die Saite wird, ist die Tonhöhe nicht mehr proportional der Länge. Der verschiebbare Keil des Instrumentes reichte deshalb mit seiner Schneide genau bis zur Saite, vergrößerte also die Spannung nicht. Leises Aufpressen der Saite auf die Schneide unterdrückte das störende Vibrieren. Durch Vergleich mit den Stimmgabeln $n = 512, 1024, 2048$ wurde das Instrument geacht. Eine von Hrn. Professor Langendorff gütigst zur Verfügung gestellte Galtonpfeife überzeugte von der Richtigkeit der Angabe noch höherer Töne.

Über die Abhängigkeit der Tonhöhe vom Luftdruck, Keilabstand und von der Spaltbreite geben die mitgeteilten Tabellen näheren Aufschluß. Tab. I zeigt, wie die Tonhöhe mit dem Luftdruck variiert; Keilabstand und Spaltweite blieben während der ganzen Beobachtungsreihe konstant. Die Tabelle zeigt, daß die Tonhöhe nicht dem Druck einfach proportional ist, sondern mit steigendem Druck langsamer zunimmt. Merkwürdig ist besonders das Überspringen der Tonhöhe in die Oktave bei einem Druck von ca. 2,5 mm; und zwar springt sie plötzlich, ohne Zwischenglied über, während die tiefere Oktave noch leise mitklingt, um mit weiter steigendem Druck, natürlich an Höhe entsprechend zunehmend, allmählich immer leiser zu werden und schließlich vollkommen anzubleiben. Die um eine Oktave höheren Töne bleiben in unverminderter Stärke allein zurück.

Tabelle I.

Luftdruck	Tonhöhe	Luftdruck	Tonhöhe	
1,47	285	3,92	1196	Abstand des Keiles: 7,2 mm.
1,96	355	4,42	1301	
2,21	398	4,91	1399	Spaltweite: 1 mm (Luftdruck in cm Wasser.)
2,45	422	6,13	1560	
2,65	836	7,36	1762	
2,94	969	8,59	1951	
3,43	1085	9,81	2128	

Da die Erscheinung des Überspringens des Tones in allen Tabellen wiederkehrt, so soll vorher die Tab. II zeigen, wie der kritische Abstand, bei dem die Tonhöhe überspringt, mit dem Luftdruck und der Spaltbreite variiert.

Tabelle II.

Tonhöhe	Luftdruck	Abstand des		Spaltbreite
		1. Punktes	2. Punktes	
959	2,45	5,2 mm		1 mm
649	2,45		8,3 mm	1 „
1609	4,9	6,6 „		1 „
1218	4,9		7,0 „	1 „
3081	4,9	2,5 „		0,5 „
2681	4,9		3,5 „	0,5 „

Der Kürze wegen wird hier von dem „Punkt“ gesprochen werden. Der zweite Punkt der Tabelle ist der eben beschriebene, der erste ist der geringste Keilabstand, bei welchem noch ein Ton entsteht. Auch dieser Punkt variiert mit Luftdruck und Spaltbreite. Aus der Tabelle ist ersichtlich, wie bei konstanter Spaltbreite der Keilabstand des ersten Punktes mit dem Luftdruck zunimmt, der des zweiten dagegen abnimmt. Der Abstand beider Punkte nimmt jedoch mit der Spaltbreite ab. Die Kurve zeigt übrigens noch, daß vor dem zweiten Punkt, also im Bereich der tieferen Töne, die Zunahme der Tonhöhe mit dem Luftdruck noch langsamer ist, wie unmittelbar oberhalb desselben.

Tab. III zeigt die Abhängigkeit der Tonhöhe vom Keilabstand. Bei dieser Versuchsreihe blieben sowohl Spaltbreite wie Luftdruck konstant, zwischen dem ersten und zweiten Punkt zeigt der Ton eine schnelle Abnahme der Tonhöhe, beim zweiten Punkt springt er über in die Oktave, um dann wieder stark abzunehmen. Eine graphische Darstellung zeigt durch eine etwas gebogene Linie, daß die Tonhöhe etwas stärker abnimmt im Vergleich zur Zunahme des Abstandes.

Tabelle III.

Keilabstand	Tonhöhe	
3,0 mm	2992	
4,0 "	1820	
5,0 "	{ 1828 (lauter)	Spaltbreite: 1 mm. Luftdruck: 9,8 (cm Wasser).
	{ 2745	
7,5 "	1943	
10,0 "	1346	
12,5 "	902	
15,0 "	559	

Hier ist aber noch etwas besonders zu bemerken. Der Punkt hat nicht nur die Bedeutung, daß die Tonhöhe so plötzlich überspringt, sondern man erhält von da an für jeden größeren Abstand zwei verschieden hohe Töne. Geht man nämlich bei gleichbleibendem Abstand mit dem Keil allmählich durch die Lamelle, während Keilschneide und Spalt parallel

bleiben, so erhält man zunächst einen Ton, dessen Höhe nach der Tabelle nicht dem Abstand entspricht, sondern die weitere Fortsetzung der tieferen Oktave. Der Keil steht so, daß die Hauptmenge der Luft an einer Seite entlang geht. Schiebt man den Keil weiter, so daß auf beiden Seiten des Keiles ungefähr gleiche Luftmengen hinaufströmen, so erhält man den dem Abstand entsprechenden Ton, der bei noch weiterem Verschieben wieder in die nächst tiefere Oktave umschlägt.

Die Rauchversuche sind auch auf diese besonderen Fälle ausgedehnt worden. Figg. 6 u. 7 lassen die Stellung des Keiles gegenüber dem Spalt deutlich erkennen und zeigen die Lamelle in den beiden Grenzstellungen ihrer Schwingung. Die



Fig. 6.



Fig. 7.

Luft steigt also in der größten Ausbiegung nach rechts vollkommen an einer Seite in die Höhe, während Fig. 7 erkennen läßt, wie in der anderen Grenzstellung die Lamelle nur zum größten Teil, jedoch nicht ganz einseitig an dem Keil vorbeiströmt. Die vollkommene Schwingung kann hier scheinbar nicht zu stande kommen, weil die tonerzeugende Kraft nicht groß genug ist, die Lamelle soweit zur Seite zu biegen, daß sie an der abgekehrten Keilwand vollkommen in die Höhe steigen kann.

Ferner variiert die Tonhöhe mit der Spaltbreite. Ein Bild der Abhängigkeit gibt Tab. IV. Abstand und Luftdruck blieben in der ganzen Versuchsreihe konstant. Die Zahlenwerte zeigen eine Abnahme der Tonhöhe mit der Zunahme der Spaltbreite. Je dünner also das Luftblatt ist, um so

höher ist der Ton. Übrigens nicht nur die Tonhöhe (bei gleichem Abstand und Luftdruck), sondern auch der Abstand der beiden Punkte variiert, wie aus Tab. II hervorgeht, mit der Spaltbreite. Und zwar ist bei größerer Spaltbreite auch der Abstand der beiden Punkte größer. Interessant ist hier besonders, daß bei doppelter Spaltbreite der zweite Punkt genau doppelt so weit vom Spalt entfernt ist, wie bei der halben Spaltbreite.

Tabelle IV.

Spaltbreite	Tonhöhe	
1,5 mm	1857	Keilabstand: 7 mm.
1,0 „	2598	Luftdruck:
0,5 „	2763	9,57 (cm Wasser).

Weiter war es von Bedeutung, festzustellen, inwieweit Veränderungen durch verschiedene Keilformen etc. verursacht werden.

Zuerst war die Frage nach dem Einfluß des Keilwinkels auf die Tonhöhe zu beantworten. Die Winkel der zu diesem Versuch angewandten Keile waren 15° , 47° , 133° . Wenn überhaupt die Größe des Winkels von Einfluß war, so mußten die Unterschiede genügen, um ihn festzustellen. Es konnte jedoch, unter sonst gleichen Bedingungen, immer nur dieselbe Tonhöhe erhalten werden.

Ein Versuch mit Keilen verschiedener Rauheit, so mit verschiedenen rauhen Feilen, glattpolierten Messern, mit Holzkeilen überzeugte von der vollkommenen Unabhängigkeit der Tonhöhe vom Material des Keiles und von dem verschieden großen Widerstand, den die Keilwände dem Luftstrom entgegenseetzen.

Nicht ganz ohne Einfluß ist dagegen die Schärfe des Keiles. Einige Beobachtungen in dieser Hinsicht enthält Tab. V. Spaltbreite, Luftdruck und Abstand des Keiles blieben konstant. Es wurden abgestumpfte Keile verwandt, deren Abstumpfungsflächen verschieden breit waren. Die bis 2,5—3,0 mm abgestumpften Keile verhielten sich genau so, wie die spitzen.

Tabelle V.

Abstumpffläche	Tonhöhe	
0 mm	941	
0,5 "	941	Spaltbreite: 1 mm.
1,0 "	941	Luftdruck:
2,5 "	{ 471 941	4,9 (cm Wasser).
4,5 "	{ 471 941	Keilabstand: 7,2 mm.

War aber die Fläche breiter, so erhielt man bei gleichbleibendem Abstand je nach Stellung des Keiles zur Lamelle verschieden hohe Töne; jedoch in anderer Weise wie bei den scharfen Schneiden. Derselbe Ton, den man bei Anwendung der spitzen Keile in der Mittelstellung erhielt, entstand hier, wenn die Lamelle den Keil so traf, daß sie in der Gleichgewichtslage vollständig an einer Seitenwand in die Höhe stieg. Bei weiterem Verschieben, wenn die Lamelle die erste Lage, jetzt aber auf der anderen Seite, eingenommen hatte, sprang der Ton wieder in die höhere Oktave über. War die Fläche breiter wie 3,7—4 mm, so blieb in der Mittelstellung die Lamelle überhaupt in Ruhe; beim Verschieben nach den Kanten hin entstanden dagegen, wie vorher, nacheinander die beiden Oktaven, also zuerst (von der Mittelstellung aus) die tiefere, dann die höhere. In den Fällen, wo man den höheren Ton bekommt, kann offenbar die Lamelle auf der freien Seite vollkommen ausschlagen, während nur ein kleiner Teil der Luft bei jeder Schwingung an der horizontalen Fläche entlang geworfen wird. Entsteht aber die tiefere Oktave, so geht der größte Teil der Lamelle der horizontalen Fläche entlang, während, wie auch die Rauchversuche zeigten, nur sehr wenig an der Seitenwand in die Höhe steigt. Dennoch ist letzteres zur Tonentstehung unbedingt notwendig, denn da, wo während einer Schwingung die Lamelle in einer Grenzstellung überhaupt nicht über die Kante des Keiles hinausgeht, entsteht kein Ton. Das ist der Fall, wenn die Fläche über 3,7 mm breit ist.

Bei einigen Vorversuchen schien die Beschaffenheit des Spaltes, Material oder innerer Bau desselben, die Tonbildung wesentlich zu beeinflussen. Auch ist in der Arbeit von Hrn.

Hensen¹⁾ die Vermutung ausgedrückt, daß man vielleicht in den Geschwindigkeitsunterschieden innerhalb der Lamelle (infolge der Reibung an den Spaltwänden) die Entstehungsursache des Tones zu suchen habe. Es wurden nun genauere Versuche mit zwei Spalten, deren Innenwände der Lamelle verschieden großen Widerstand entgegengesetzten, angestellt. Bei gleichem Luftdruck, gleichem Keilabstand und gleicher Spaltbreite entstand aber trotz der sehr stark verschiedenen Reibung der gleiche Ton. Auch wurde mit Innenwänden verschiedener Stellung zueinander gearbeitet. Bei dem einen Mundstück waren die Spaltwände parallel, bei anderen konvergierten sie in verschiedenen Winkeln gegen den Spalt hin. In keinem Fall konnten jedoch, wenn die übrigen Bedingungen konstant blieben, Veränderungen der Tonhöhe beobachtet werden. Die Klarheit des Tones nahm freilich ab, je größer die Konvergenzwinkel, je weniger blattförmig also die Lamelle wurde. Bei sehr großen Konvergenzwinkeln entstand überhaupt nur noch ein Geräusch.

3. Demnach scheint festzustehen, daß weder die Erklärung von Strouhal noch die von Hensen für die Erscheinung der Lamellentöne ausreicht. Weder sind sie unmittelbar Reibungstöne, noch kann eine momentan an der Schneide entstehende Transversallamelle, die also die Ortholamelle von der Schneide fortbläst, das hier nachgewiesene Pendeln der O-Lamelle um eben diese Schneide zur Folge haben. Übrigens weist auch schon Hr. Hensen auf die Schwierigkeit hin, die der Bildung einer Transversallamelle an messerscharfer Schneide entgegensteht.

Der Vorgang selbst ist nach den vorstehenden Versuchen vielleicht so zu denken: Der die Schneide treffende Luftstrom teilt sich daselbst, und die den Keilwänden entlang strömenden Teile erhalten durch die Reibung kleine Verzögerungen, Kompressionen, die, rückwirkend, auf den unteren Teil der Lamelle drücken. Eine Mittelstellung mit gleich großen Kompressionen auf beiden Seiten erscheint theoretisch möglich, wird aber bei auch nur im geringsten bewegter Luft niemals eintreten, vielmehr wird die eine der anderen überlegen sein. Diesem Überlegen sein entspricht die Ausbiegung unterhalb der Schneide.

1) V. Hensen, l. c. p. 729.

Tritt nun infolgedessen die Lamelle ganz auf die andere Seite, so entsteht hier ein neuer Wulst, der nun seinerseits die Lamelle in die Gegenlage zurücktreibt. So entsteht also ein dauerndes Spiel um die Schneide und mit ihm auf jeder Seite eine gegen die andere versetzt auftretende Serie von Wulsten, wie sie Figg. 4 und 5 und bei Hensen Fig. 8 erkennen lassen.

Übrigens genügt der Widerstand der zusammengedrückten, ruhenden Luft, um das Pendeln aufrecht zu erhalten. Unter dieser Annahme kann man, ist einmal durch die Reibung der Prozeß eingeleitet, auf die Mitwirkung der Reibung an den Keilwänden verzichten. So fiel also dem Keil nur die Rolle zu, der Lamelle die Gleichgewichtslage zu verwehren.

Vorstehende Erklärung ließe vielleicht eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer z. B. von der Größe des Keilwinkels erwarten. Eine solche war jedenfalls nicht aufzuweisen. Dies steht vielleicht mit der Erscheinung des Sprunges in die Oktave in Zusammenhang, für welche sich keine ausreichende Erklärung bot. Beide Erscheinungen zeigen eine gewisse Analogie mit dem Verhalten von Körpern, die, unabhängig von der Stärke der Erregung, immer ihren Eigenton oder dessen Obertöne geben.¹⁾

1) Die Versuche werden von anderer Seite fortgesetzt.

(Eingegangen 13. April 1903.)

10. VII. Die Bedeutung der Oberflächenspannung
für die Photographie mit Bromsilbergelatine und
eine neue Wirkung des Lichtes;
von G. Quincke.¹⁾

§ 120. Die Oberflächenspannung an der Grenze von wasserarmem und wasserreichem Silberbromidleim. Ähnlich wie Gerbsäure löst sich Silberbromid in wässerigen Lösungen von Gelatine oder β -Leim und gibt damit eine öltartige wasserarme Leimlösung *A*, die an der Grenze mit wasserreicher Leimlösung *B* oder mit Wasser eine Oberflächenspannung hat, wie oben (§§ 111 und 112) gezeigt wurde.

Man kann auch statt dessen sagen, Silberbromid ist in der öltartigen wasserarmen Leimlösung *A* stärker löslich, als in der wasserreichen Leimlösung *B*.

Bei der immer noch unerklärten Wirkung des Lichtes auf Bromsilber-Gelatineplatten, die in der Photographie häufige Verwendung finden, hat diese öltartige AgBr-haltige Leimlösung ein besonderes Interesse.

Schon Hardwich²⁾ fand 1860, daß Gelatine die Fällung von AgCl oder AgBr verhindert. Frische durchsichtige Bromsilbergelatine sei gar nicht oder wenig lichtempfindlich. Einige Zeit erhitzt, werde sie lichtempfindlicher und undurchsichtiger bei dem Prozeß des Reifens.

Die Löslichkeit des AgBr in 1 Proz. KBr-Lösung wird durch Zusatz von 1 Proz. Gelatine um das 4,5 fache gesteigert. Nach Hecht³⁾ lösen bei 30—40°

99 g Wasser + 1 g KBr	0,011 g AgBr
98 g Wasser + 1 g KBr + 1 g Gelatine	0,059 g AgBr
Durch 1 g Gelatine löst sich mehr	0,048 g AgBr

1) G. Quincke, Fortsetzung von Ann. d. Phys. 7. p. 57—96, 631—682, 701—744. 1902; 9. p. 1—43, 793—836, 969—1045. 1902; 10. p. 478—521, 673—703. 1903; 11. p. 54—95, 449—488. 1903.

2) Hardwich, Eders Handb. d. Photographie 3. p. 32. 1890.

3) Hecht, Bull. de l'assoc. Belge de Photogr. 8. p. 19. 1881; Eders Handb. d. Photogr. 3. p. 32. 1890.

Man kann im Dunkelzimmer frisch gefälltes AgBr in Lösung von β -Leim einrühren und auflösen, oder man kann zu einer wässrigen Lösung von β -Leim und KBr die äquivalente Menge von AgNO_3 zusetzen und das AgBr in der Leimlösung selbst entstehen lassen. Das letzte Verfahren bietet den Vorteil, daß man die Menge des gebildeten und gelösten AgBr genau angeben kann.

Bei den folgenden Versuchen waren gewöhnlich in 100 g Lösung enthalten 20 g trockener β -Leim und $20 \times 0,005 = 0,1$ g AgBr, also $\frac{1}{10}$ der Menge AgBr, die sich nach Hecht in gewöhnlicher Gelatine lösen soll. Die Lösung wurde in einem Probierröhrchen im Dunkeln auf 100° erwärmt und langsam erkaltet.

Man erhält dann eine sehr schwach getrübe Gallerte. Der Zusatz von AgBr hat den flüssigen β -Leim zum Gelatinieren gebracht oder (nach § 96) neue Schaumwände gebildet.

Hält man das Probierröhrchen mit ausgestrecktem Arme zwischen eine Glühlampe mit rotem Zylinder und das Auge, so sieht man eine von einer Aureole umgebene Lichtlinie. Die Aureole hat in verschiedener Höhe ein wenig verschiedene Breite, entsprechend der verschiedenen Größe der in der Gallerte schwebenden Teilchen anderer Lichtbrechnng.

Gießt man eine Wasserschicht auf die Gallerte und beobachtet den Regenbogen, der durch Reflexion der roten Strahlen der Glühlampe an den Flüssigkeiten des Probierröhrchens entsteht, so ist der Regenbogen im Wasser gegen den Regenbogen in der Leimgallerte verschoben, der Brechungsexponent der letzteren größer als der des Wassers. Außerdem scheint aber auch der Regenbogen im oberen und unteren Teile der Gallerte verschieden zu liegen, die Gallerte unten einen größeren Brechungsexponenten als oben zu haben.

Bringt man die geschmolzene AgBr-haltige Gallerte auf einen Objektträger unter ein Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen, erwärmt sie im Wasserbade auf 100° und untersucht sie dann im Dunkelzimmer bei starker Vergrößerung und roter Beleuchtung, so erkennt man einzelne Kugeln und viele kleine Körnchen.

Mit Tageslicht oder Auerbrenner beleuchtet und also auch belichtet, zeigen sich sehr feine dunkle Körnchen und sehr

viele kleine durchsichtige Kugeln von 0,0003 mm Durchmesser (0,6 λ) höchst regelmäßig auf Kugelflächen und Schaumwänden verteilt. Zuweilen sind viele Kugeln aneinander gebacken.

Im Tageslicht schwärzt sich die ganze Masse des Leimes, die dunklen Körnchen sind dabei auf den Schanmflächen geblieben: Nach der Belichtung sind viel mehr Kugeln und Kugelflächen sichtbar als vorher.

Nach 6 Stunden sind die Kreise und Schaumwände weit schlechter zu erkennen, als vorher. Die AgBr-Gallerte läßt dann noch Licht von der Wellenlänge 540—590 $\mu\mu$, bei starker Verdünnung von 512—617 $\mu\mu$ hindurch. Das übrige wird absorbiert.

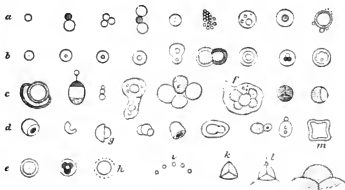
Gießt man die warme Lösung von AgBr-Leim in ein Probierröhrchen mit Wasser, so entsteht eine Flüssigkeit, die bei dem Lichte einer roten Glühlampe einen Nebelschleier oder eine Trübung zeigt. Untersucht man diese trübe Flüssigkeit unter einem Deckglas mit einem Mikroskop bei starker Vergrößerung und derselben roten Beleuchtung, so erkennt man einzelne kleine Leimkugeln mit Brownscher Molekularbewegung. Die letztere verschwindet nach einiger Zeit.

Häufig sind auch die Leimkugeln zu Gruppen von 2—20 und mehr aneinander gebacken.

In der trüben Flüssigkeit bildet sich nach 12 Stunden ein Niederschlag, den man mit einem hohlen Glasfaden aufsaugen und in diesem oder unter einem Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen bei Beleuchtung mit Tageslicht oder einem Auerbrenner mit starker Vergrößerung untersuchen kann. Er besteht aus Leimkugeln von 0,005—0,0003 mm oder noch kleiner, einzeln verstreut oder zu Haufen von 2—3 und mehr vereinigt. Einzelne Kugeln zeigen am Rande doppelte Konturen; viele erscheinen von einem hellen Scheine umgeben, wenn das Mikroskop scharf auf den Kugelrand eingestellt wird, als ob hier die Umgebung eine andere Lichtbrechung hätte. Fig. 171 stellt eine Reihe der von mir beobachteten Formen dar.

Nach der Belichtung liefen plötzlich zwei Luftblasen unter Wasser fort und vereinigten sich zu einer Blase, als ob sich Bromwasser an der Grenze von Wasser und Luft ausgebreitet und damit Wirbel erzeugt hätte.

Die Leimkugeln speichern im Dunkeln oder im Tageslicht aus Wasser mit Methylenblau, Bismarckbraun oder Rosanilin den Farbstoff auf. An verschiedenen Stellen verschieden stark. Gewöhnlich sind die Leimkugeln klar, mit einer farbigen Hülle, deren Dicke zwischen 0,1 des Radius und 0 schwankt. In der Mitte ist oft ein dunkler oder heller Punkt zu erkennen, der im Laufe von 1—2 Tagen sich zu einer kugelförmigen Blase entwickelt (Fig. 171 *b*, die ersten vier Kugeln), während gleichzeitig der Durchmesser der Leimkugel um 50 Proz. oder mehr zunimmt. Oft treten mehrere Blasen gleichzeitig auf, oder zahlreiche dunkel gefärbte Schaumwände in einer schwach oder gar nicht gefärbten Grundmasse, die sich unter Winkeln



Bromsilberleim.

Fig. 171.

von 120° schneiden. Die blaugefärbten Teile sind in der Fig. 171 schraffiert oder dunkel gezeichnet. Fig. 171 *f* war mit Rosanilin gefärbt und enthielt viele Schaumzellen im Innern.

Da zahlreiche Leimkugeln anfänglich kein Methylenblau oder Rosanilin aufnehmen, so müssen sie eine schützende Hülle haben, deren Dicke unmerklich sein kann und die doch den Farbstoff zurückhält. Da die Oberfläche der Leimkugeln glatt ist und beim Größerwerden glatt bleibt, so muß man annehmen, daß diese Hülle, wie die oben erwähnten Schaumwände, bei ihrer Bildung und noch längere Zeit nachher aus öltartiger Flüssigkeit, öltartigem Bromsilberleim, bestand.

Die halbkugelförmigen Formen (Fig. 171, d) beweisen, daß jedenfalls ein Teil der öltartigen Lamellen später fest geworden ist, da die Bruchstücke von Schaumwänden sonst in dieser Form nicht längere Zeit bestehen könnten.

Oft erscheinen nach längerer Zeit alle Leimkugeln gefärbt, wenn die schützende Hülle Löcher bekommen hat oder ganz zerstört ist.

Zuweilen nimmt auch nach einigen Tagen die Kugel die Form eines unregelmäßigen Vierecks oder einer Ellipse an (Fig. 171, m).

Im allgemeinen sieht man mit den verschiedenen Farbstoffen ähnliche Erscheinungen. Bismarckbraun scheint schneller aufgespeichert zu werden, als Methylenblau. Doch ist bei ersterem der hohle zentrale Raum der Leimkugeln oder Leimblasen oft unregelmäßig begrenzt, während er bei Methylenblau von einer glatten Kreislinie begrenzt erscheint.

Hiermit wäre erwiesen, daß kleine Mengen AgBr, in wässriger β -Leimlösung gelöst, eine öltartige Flüssigkeit geben; daß wässrige Lösungen von β -Leim, in denen kleine Mengen AgBr gelöst sind, mit Wasser eine Milch oder Emulsion von Leimkugeln, Blasen oder zusammenhängende Blasen und Schaumwände geben, wobei der öltartige Bromsilberleim die Oberfläche der Leimkugeln und Blasen in dünnen oder in unmerklich dicken Schichten überzieht, Blasen und Schaumwände bildet und mit Farbstoffen, vielleicht auch ohne Farbstoffe fest wird.

Diese Resultate sind in Übereinstimmung mit den oben (§ 111) beschriebenen Erscheinungen bei der Bildung von AgCl, AgBr, AgJ in β -Leimlösung.

§ 121. *Flocken von AgBr und AgBr-Leim wandern nach Bromwasser, Ammoniak, Alkohol hin.* Zwei Glasröhrchen von $8 \times 0,9$ mm wurden mit einer $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat gefüllt, welche 25 Proz. β -Leim enthielt, nebeneinander auf einen Objektträger unter ein Deckglas von 36×18 mm gelegt und zwischen beide die Mündung eines hohlen Glasfadens von $50 \times 0,9$ mm bis 0,6 mm geschoben, der mit Bromwasser gefüllt und am anderen Ende zugeschmolzen war (vgl. Fig. 4, § 7). Unter das Deckglas wurde $\frac{1}{10}$ Normallösung von Bromkalium gebracht und der ganze Objektträger sofort mit einer Blechkappe gegen Licht und Verdunstung geschützt.

Nach sechs Stunden hatte sich im Dunkeln bei verschiedenen Versuchen eine Flockenschicht von 3—5 mm Länge am Boden des Glasfadens festgesetzt in 10—18 mm Entfernung von der Mündung des Glasfadens. Die Flockenschicht bestand aus Tropfen und flüssigen Schaumzellen von 0,025—0,05 mm Durchmesser mit 0,004 mm dicken Wänden, die sich später in Kugeln oder Kugelhaufen von 0,0005 bis 0,005 mm Durchmesser verwandelten und noch die Lage der Schaumwände erkennen ließen, aus denen sie entstanden waren. Die größten Flocken und Kugeln lagen in der Mitte, die kleinsten an den Enden der Flockenschicht. Zuweilen waren auch größere Flocken in dem Bromwasser aufwärts gewandert und hatten sich an verschiedenen Stellen, näher der Mündung des Glasfadens festgesetzt.

Bei ähnlichen Versuchen mit $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat ohne β -Leim lagen nur in der Nähe der Mündung am Boden des Glasfadens auf einer 1,2 mm langen Strecke Schaumflocken von AgBr mit Anschwellungen, Einschnürungen und Schraubenwindungen und aneinander gebackenen Kugeln von 0,001 mm.

Die AgBr-Flocken mit Leim sind also viel weiter in das Bromwasser hineingewandert, als die Flocken ohne Leim.

Die Ursache der Flockung und Wanderung ist eine periodisch wiederkehrende Ausbreitung von Brom an der Oberfläche der in der Flüssigkeit schwebenden Teilchen von AgBr-Leim oder AgBr, ähnlich der Klärung und Flockung anderer trüber Lösungen (§§ 4—15) oder ähnlich wie Blasen oder Flocken mit einer Ölsäurehaut durch periodische Ausbreitung von Seifenlösung nach alkalischer Flüssigkeit hingezogen werden oder nach dieser hinwandern.¹⁾

Diese Versuche entsprechen den oben (§ 7, Fig. 4) beschriebenen Versuchen, wo mit derselben Anordnung Mastix-trübung unter dem Einfluß von Kupfersulfatlösung Flocken bildete, welche in die Kupfersulfatlösung hineinwanderten.

Zwei Glasröhrchen von $8 \times 0,7$ mm mit $\frac{1}{10}$ Normallösung von Silbernitrat, die 48 Proz. β -Leim enthielt, und ein einseitig zugeschmolzener langer Glasfaden von $50 \times 0,7$ mm mit 7,8 Proz.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 35. p. 613. 1888.

Ammoniak wurden auf einen Objektträger unter ein 36 mm langes Deckglas gelegt, $\frac{1}{10}$ Normallösung von Bromkalium unter das Deckglas gebracht und der Objektträger unter einer Blechkappe vor Licht und Verdunstung geschützt. Es entstanden Teilchen von AgBr-Leim, die allmählich in dem Glasfaden aufwärts wanderten und braune Kristallnadeln und kleine Körnchen mit Brownscher Molekularbewegung bildeten. Nach 3 Stunden lagen die Kristalle auf einer Strecke von 2 mm in der Nähe der Mündung; daneben, 3 mm weiter aufwärts, eine Körnchenschicht. Nach 24 Stunden lag im unteren Teile des Glasfadens bis 25 mm von seiner Mündung eine große Menge brauner sehr schwach doppeltbrechender Kristallnadeln von $0,025 \times 0,005$ mm, zum Teil mit gut ausgebildeten Endflächen und optischer Achse normal zur Längsrichtung. Wegen der Kleinheit der Kristalle war das Kristallsystem nicht zu bestimmen. Die Kristalle waren zum Teil röhrenförmig mit doppeltbrechenden Massen in den Wänden, die aus runden Blasen oder Schäumkammern sich abgeschieden hatten. Dazwischen waren viele runde Körnchen von $0,0005$ — $0,0002$ mm verteilt, welche Tage lang lebhafte Brownsche Molekularbewegung zeigten. Am weitesten von der Mündung des Glasfadens entfernt lagen viele zusammengebackene runde Blasen von $0,015$ mm, zum Teil in rechtwinkeligen Reihen angeordnet, und an einzelnen Stellen auch würfelförmige Kristalle von $0,005$ mm oder kleiner neben den braunen Kristallnadeln. Die Flocken AgBr-Leim waren also in dem Glasfaden bis 25 mm von der Mündung hinaufgewandert und teilweise aufgequollen zu aneinander hängenden runden Blasen, teilweise in braune Kristalle übergegangen.

Bei ähnlichen Versuchen mit $\frac{1}{10}$ Normallösungen von AgNO_3 und KBr ohne Leim waren dunkle Körnchen und AgBr-Flocken nur 3,2 mm weit in den Glasfaden mit Ammoniak hineingewandert und hatten sich am oberen und unteren Teil der Wandung festgesetzt. Dazwischen lagen einzelne sechseckige einfachbrechende Tafeln mit Schaummassen im Innern.

Wurde bei diesen Versuchen mit AgNO_3 und 48 proz. β -Leim der Glasfaden mit Alkohol statt mit Ammoniak gefüllt, so wanderten die Flocken von AgBr-Leim 3—10 mm weit in

den Alkohol ein und setzten sich als eine 7 mm lange Masse von 0,02—0,07 mm dicken Flocken an der Glaswand fest. In 20 mm Entfernung von der Mündung waren größere kreisrunde Blasen von 0,1 mm Durchmesser in einer gallertartigen Masse sichtbar, neben einer Lufthlase, die sich im Alkohol ausgeschieden hatte.

Diese Versuche beweisen, daß Ammoniak und Alkohol, wie Bromwasser, sich an der Oberfläche von dem öltartigen AgBr-Leim ausbreiten, durch Ausbreitungswirbel die kleinen schwebenden Teilchen von AgBr-Leim zusammenführen, zu Schaumflocken vereinigen und die Schaumflocken nach dem Ausbreitungszentrum hin verschieben, d. h. in den Glasfaden mit Ammoniak oder Alkohol hineinziehen. Bei einer bestimmten Konzentration dieser Flüssigkeiten werden die Ausbreitungswirbel einzelne Schaumwände zerstören können und größere Schaumkammern gebildet werden.

§ 122. *Abscheidung von Linsen und sichtbaren Schaumwänden in Bromsilberemulsion durch Belichtung.* Ähnliche Erscheinungen wie Bromsilber mit β -Leim (§ 120) zeigte unter dem Mikroskop bei starker Vergrößerung Bromsilberemulsion von Dr. Schleussner in Frankfurt a. M., die im Dunkeln bei 40° unter ein Deckglas mit untergelegten Deckglasstreifen gebracht und unter diesem erkaltet war.

Bei Beleuchtung durch eine elektrische Glühlampe mit rotem Zylinder zeigte gereifte Bromsilbergelatine viele Pünktchen oder sehr kleine Kügelchen von größerer Lichthrechung als die Umgebung, welche auf Kreishöhen von 0,03 mm Durchmesser verteilt waren. Durch $3\frac{1}{2}$ stündige rote Belichtung wurden neue Kügelchen auf Kreisbögen oder Schaumkanten von 0,09 mm Durchmesser sichtbar. Bei Belichtung mit derselben elektrischen Glühlampe ohne roten Zylinder traten diese neuen Kügelchen in sehr kurzer Zeit auf.

Durch Belichtung wurden also aus der scheinbar homogenen Flüssigkeit Wände von Blasen und Schaumkammern abgeschieden, die aus öltartiger Flüssigkeit bestehen. Um so schneller, je intensiver die Beleuchtung ist.

Die Schaumwände und die Kügelchen halte ich für öltartige wasserarme Leimlösung mit AgBr, für AgBr-reichen Bromsilberleim. Durch Belichtung entsteht eine Flockung der

trüben Lösung oder Emulsion von Bromsilberleim, die nach analogen Vorgängen bei der Klärung und Flockung trüber Lösungen (§§ 4—15) durch periodische Ausbreitung einer Flüssigkeit *C* an der Oberfläche der schwebenden AgBr-Leimteilchen herbeigeführt sein muß. Die Flüssigkeit *C* halte ich für freies Brom, das durch Licht aus AgBr abgeschieden wurde. Diese Ansicht wird durch die in § 121 beschriebenen Versuche bestätigt.

§ 123. *Eine neue Wirkung des Lichtes. Bildung von Falten und unsichtbaren Schaumwänden in Lamellen aus Bromsilberemulsion auf Quecksilber durch Belichtung.* Bei dem Licht einer elektrischen Glühlampe mit rotem Zylinder wurden 1—5 Tropfen frisch geschmolzener Bromsilberemulsion von Matter in Mannheim auf frische oder 20 Min. alte Quecksilberflächen gelegt und mit einer hohen weiten Blechkappe bedeckt. Nach 12 Stunden wurde die Blechkappe abgenommen und dadurch die halberstarzte graue Lamelle von Bromsilbergelatine von 40—14 mm Durchmesser dem Sonnenlicht ausgesetzt. Die Lamelle zeigte beim Abheben der Blechkappe wenige flache Randfalten. Durch Belichtung wurden in 1 Min. viele neue und tiefere Randfalten gebildet, deren Anzahl und Tiefe sich dann noch langsam 4—5 Min. lang weiter vermehrte. Die graue Farbe der Lamelle wurde dabei braun. Beim Behauchen der Lamelle nahm zuerst die Faltenhöhe zu. Dann verschwanden die Falten. Am Rande entstand eine klare Flüssigkeit ohne Randfalten, die beim Eintrocknen wieder neue andere Randfalten bildete. Newtonsche Farhenstreifen rückten dabei vom Rande nach dem Innern der Lamelle. Die Lamelle wurde durch Eintrocknen dünner. Durch Belichtung bilden sich also neue Schaumwände in der halberstarzten Bromsilbergelatine, die die obere und untere Lamellenfläche gegeneinander ziehen und die Lamelle länger und dünner machen.

Bei anderen Versuchen wurde die Bromsilberemulsion mit neun Volumenteilen 5proz. Gelatinelösung bei 100° im Dunkeln durch Umschütteln gemischt. Einzelne Tropfen dieser verdünnten Bromsilberemulsion geben auf einer reinen Quecksilberfläche unter einer Blechkappe halberstarzte Lamellen von 40—11 mm Durchmesser. Beim Abheben der Blechkappe bildeten die Lamellen im Tageslicht in 5—20 Sek. zahlreiche

radiale Randfalten, die von außen nach innen liefen. Die Lamelle zeigte am äußeren Rande drei Newtonsche Farbstreifen, welche an derselben Stelle blieben, während die Randfalten auftraten oder zeitweise verschwanden.

Bei manchen Bromsilbergelatinelamellen traten zuweilen beim Behauchen am Rande und nahe der Mitte neue Falten oder neue Schaumwände im Innern der Lamelle auf. Wurde die Lamelle behaucht, bis alle Falten verschwunden waren, so erschienen beim Eintrocknen die neuen Falten erst in der Mitte und dann am Rande. Aus diesen Versuchen folgt, daß die Falten und unsichtbaren Schaumwände im Innern der Lamelle besonders reichlich und kräftig auftreten bei einem bestimmten Wassergehalt oder einer bestimmten Konzentration der Bromsilbergelatine, indem die durch das Licht abgeschiedenen Schaumwände von öltartiger Flüssigkeit bei größerer oder geringerer Konzentration wieder von der umgebenden Flüssigkeit gelöst werden.

Die Faltenbildung bestätigt die Resultate der Beobachtungen unter dem Mikroskop mit Schleussnerscher Bromsilbergelatine (§ 122) und mit AgBr und β -Leim (§ 120). Es darf aber nicht unerwähnt bleiben, daß die Bromsilberemulsionen des Handels gewöhnlich Chromatleim enthalten, aus dem bei Belichtung ebenfalls sichtbare und unsichtbare Schaumwände abgeschieden werden, wie ich später ausführlich nachweisen werde.

Chromatfreie Bromsilbergelatine bildet bei Belichtung ebenfalls Falten und Schaumwände im Innern. Tropfen von ausgewaschener Bromsilbergelatine (6 g Ammoniumbromid + 10 g Silbernitrat + 10 g Gelatine + 100 g Wasser) trockneten auf reinen Quecksilberflächen unter einer Blechkappe in 3 Stunden zu einer Lamelle von 5 cm Durchmesser ein. Bei Belichtung mit Sonnenlicht bildeten sich in 20 Sek. radiale Falten. Die Dicke der Lamelle blieb dabei scheinbar ungeändert, da sich die Newtonschen Farben des Lamellenrandes während der Faltenbildung nicht verschoben.

§ 124. *Bromsilbergelatineplatten.* In hochempfindlichen Bromsilbergelatineplatten, welche belichtet, aber nicht fixiert waren, habe ich mit starker Vergrößerung zahlreiche kreisförmige und elliptische Kurven wahrnehmen können, die

dunkle Kugeln enthielten oder sich hell zwischen dunklen Massen abhoben. Die kleineren Kugeln hatten 0,0003 bis 0,0026 mm (0,6—5 λ) Durchmesser und lagen auf Kreisbogen von 0,003—0,009 mm (6—18 λ) Durchmesser. Vereinzelt habe ich auch Doppelkugeln oder Tetraeder, mit größerer Lichtbrechung als die benachbarten Leimmassen und mit kleinen Blasen in den Ecken gesehen, von der gleichen Form, wie die Seifenwasserfiguren in einem Plateauschen Drahttetraeder (Fig. 173, k, l).

Diese Formen beweisen, daß in der Bromsilbergelatineplatte flüssige Leimmassen von größerer Lichtbrechung mit einer dünnen Haut ölartigen AgBr-Leims bekleidet waren. In der Leimmasse sind zahlreiche Kugeln, Blasen und Schaumwände aus ölartigem AgBr-Leim verteilt. Dieser AgBr-Leim ändert sich bei der Belichtung und wird dunkel.

Später habe ich auf Photographien, die Dr. Carl Kaiserling¹⁾ in seinen mikroskopischen Studien über das Plattenkorn in 950 facher Vergrößerung veröffentlicht hat, ebenfalls Kugeln vom Durchmesser $2r$ wahrnehmen können, die auf Kreisen oder Schaumkugelflächen vom Durchmesser $2R$ verteilt sind. In allen Stadien der Belichtung, Entwicklung und Verstärkung zeigen die Platten

	$2r$	$2R$
von Bromsilbergelatine (Eosinsilberplatten) . .	1—3 λ	12—20 λ
Bromsilber Collodiumplatten	1	20—26
Collodium-Bromsilberemulsionsplatte	1,6	8—16
Diapositivplatte (Cblorsilbergelatine)	1,6	4—8
während ich mit meinen Messungen fand für		
Bromsilbergelatine	0,6—5	6—18 λ

wobei $\lambda = 0,0005$ mm angenommen wurde.

In den kleinen Kugeloberflächen erscheinen dabei bei allen Stadien der Behandlung durchsichtige Pünktchen eingesprengt, die ich für Linsen von reinem oder AgBr-armem Leim halten möchte, welche in den Schaumkanten festgehalten und durch das Licht gar nicht oder wenig verändert werden. Diese Ansicht wird durch die am Schluß von § 120 beschriebenen Versuche bestätigt.

1) C. Kaiserling, Photogr. Mitteil. 35. p. 7—11, p. 29—32. 1898.

Da die belichteten Stellen der photographischen Platten die Eigenschaft haben, bei der sogenannten physikalischen Verstärkung aus der Verstärkungsflüssigkeit metallisches Silber aufzuspeichern, so muß man annehmen, daß sich an der Oberfläche der ölartigen Schaumwände von AgBr-Leim bei dem Belichten metallisches Silber abscheidet, und durch Kontaktwirkung die Abscheidung und Anlagerung von metallischem Silber einleitet.

Dies metallische Silber ist nach meinen Versuchen in β -Leim unlöslich, wird in Flittern in der Oberfläche der Schaumwände festgehalten und bildet hier die Kondensationskerne der Verstärkungsflüssigkeit.

Dünne durchsichtige Silberschichten, welche sich aus einer doppelkeilförmigen Schicht von Martinscher Versilberungsflüssigkeit auf der Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen Glasprismas abgesetzt hatten, wurden vor und nach längerer Berührung mit wässriger Lösung von β -Leim in der Nähe des Grenzwinkels der totalen Reflexion durch ein Nicol'sches Prisma betrachtet. Sie zeigten vor und nach der Behandlung mit Leimlösung dasselbe Ansehen und dieselben optischen Eigenschaften. Man hat also anzunehmen, daß metallisches Silber in Leimgallerte unlöslich ist.

Die oben beschriebenen kleinen Kugeln von Bromsilberleim werden in der praktischen Photographie als Körner bezeichnet und gewöhnlich für reines Silberbromid gehalten. Abegg¹⁾ fand 160000 bis 602000 Körner auf 1 mm².

Die Bromsilbergelatine wird vor oder nach dem Gießen der Platten längere Zeit im Dunkeln erwärmt und durch diesen sogenannten *Reifungsprozeß* bedeutend lichtempfindlicher, wobei die Körnchengröße zunimmt, nach Eder²⁾ von 0,0008 auf 0,003 mm. Nach Lüppts-Cramer³⁾ verhält sich die Lichtempfindlichkeit einer Emulsion für das Lippmannsche Farbverfahren zu der einer modernen Momentplatte wie 1:20000. Die Lichtempfindlichkeit wird also durch den Reifungsprozeß bedeutend gesteigert, in Übereinstimmung mit der alten Angabe von Hardwich (vgl. § 20).

1) Abegg, Arch. f. wissenschaftl. Photographie 1. p. 109. 1899.

2) Eder, Handbuch d. Photogr. 3. p. 56. 101. 1902.

3) Lüppts-Cramer, Eders Jahrb. p. 165. 1901.

Schaum und Bellach¹⁾ fanden beim Reifungsprozeß eine 7—8 fache Vergrößerung des Silberbromidkornes, das bei empfindlichen Platten etwa 0,003 mm (6λ) Durchmesser hatte, in Übereinstimmung mit den oben angeführten Messungen. An den photographischen Abbildungen der ungereiften und gereiften Platten dieser Forscher kann ich eine Anordnung der Körner auf Kugelflächen erkennen, deren Durchmesser bei den gereiften Platten etwas größer zu sein scheint, als bei den ungereiften. Die Reifung, normales und solarisiertes latentes Bild sollen nach Schaum und Bellach durch Oxydationsmittel zerstört werden. Platten, welche stundenlang dem Tageslicht ausgesetzt waren, können durch Behandlung mit Ammoniumpersulfat wieder zur Aufnahme gebrauchsfähig gemacht werden, unter Herabsetzung der Empfindlichkeit. In feuchter Atmosphäre stieg die Dicke der Gelatineschicht von 0,024 auf 0,033 mm unter Herabsetzen der Empfindlichkeit. Beim Austrocknen schien eine Kornverkleinerung des Bromsilbers stattzufinden (Abgabe des im amorphen Bromsilber gelösten Wassers). Die Zahl der Bromsilberkörner in der obersten Schicht des Negativs betrug im Mittel 270 000 für 1 mm². Die Zahl der Silberkörner in der Flächeneinheit der Negativschicht war innerhalb weiter Grenzen unabhängig von der Belichtungszeit und Entwicklungsdauer. Eine sehr kornreiche Schicht mit großen Silberpartikeln lag zwischen zwei kornarmen Schichten, deren untere kleinere Körner enthielt.

Nach meinen in §§ 111, 112, 120 und im Vorstehenden beschriebenen Versuchen hat man die Körner als Silberbromidteilchen und nicht als Silberbromid aufzufassen. Damit stimmt auch die mehrfach festgestellte Tatsache, daß frische Bromsilbergelatine wenig lichtempfindlich ist, daß die Lichtempfindlichkeit erst durch den Prozeß des Reifens herbeigeführt wird und auf das 20 000 fache gesteigert wird durch längeres Erhitzen der Bromsilbergelatine.

§ 125. *Der Einfluß des Reifens auf die Lichtempfindlichkeit der Bromsilbergelatine.* Vielfach bezeichnet man das Gemisch von AgBr und Gelatine vor und nach dem Reifungsprozeß mit dem Namen Emulsion. Ich habe nicht feststellen können,

1) K. Schaum u. V. Bellach, Physik. Zeitschr. 4. p. 4 u. 40. 1902.

woher dieser Name stammt. Ursprünglich nannte man eine wässrige Flüssigkeit, in welcher Fettkügelchen schwebten, wie bei der Milch, eine Emulsion. Später hat man auch wohl eine Trübung flüssiger oder mit flüssiger Haut bekleideter schwebender Teilchen eine Emulsion genannt (§ 80). In dieser erweiterten Bedeutung kann man geschmolzene Bromsilbergelatine auch als Emulsion von AgBr-Leim bezeichnen.

Schaum ist eine geflockte Emulsion. Flüssige oder steife Gallerte sind Schaummassen mit flüssigen oder festen Schaumwänden und sehr kleinen oder unsichtbaren Schaumkammern. Die auf Glasplatten erstarrten Bromsilbergelatineschichten sind steife Gallerte mit halb oder ganz erstarrten Schaumwänden von öltartiger AgBr-reicher und wasserarmer Leimlösung *A*, die sich in einer wasserreichen und AgBr-ärmeren Leimlösung *B* ausgeschieden hat. In den Schaumwänden und besonders in den Kanten der Schaumwände liegen Blasen, Kugeln und Schaumflocken aus der erwähnten Leimlösung *A*, die gewöhnlich als Körner bezeichnet werden. Der Prozeß des Reifens besteht in einem längeren Erwärmen einer Trübung von Bromsilberleim, wobei die kleinen schwebenden Teilchen zu größeren Schaumflocken, größeren Körnern, vereinigt werden. Nach dem analogen Verhalten anderer Trübungen geschieht die Flockenbildung (§§ 4—17) durch periodische Ausbreitung einer fremden Flüssigkeit *C* an der flüssigen Oberfläche der schwebenden Teilchen. Die „kleinen“ Körner aus AgBr-reicher Leimlösung sind also bei dem Reifungsprozeß mit einer fremden Flüssigkeitsschicht *C* bekleidet und zu größeren Kugeln, Blasen oder Schaumflocken mit kleinerer Oberfläche vereinigt worden oder zusammengefloßen.

Nach meinen oben (§§ 120, 121) beschriebenen Beobachtungen findet eine Flockung oder eine Bildung neuer öltartiger Kugeln durch Belichtung auch durch rote Belichtung statt und breitet sich Brom an der Oberfläche von öltartigem AgBr-Leim aus. Es wäre also denkbar, daß auch durch Temperaturerhöhung eine kleine Menge AgBr zersetzt und das freigewordene Brom die Flüssigkeit *C* wäre, durch deren Ausbreitung die Flockenbildung oder Verkleinerung der Oberfläche des AgBr-Leims *A* herbeigeführt wird.

Aber da wässrige Leimlösung in warmem Wasser und

in warmer wasserarmer Leimlösung löslich ist, so kann die Flüssigkeit *C* sehr wohl aus einer AgBr-haltigen Leimlösung mit größerem Wassergehalt als die öltartige Leimlösung *A* bestehen. Auch habe ich in § 111 mit der Röhrenmethode nachgewiesen, daß AgBr-haltiger β -Leim in konzentrierter β -Leimlösung löslich ist, bei geringerem Leimgehalt aber kleine Körnchen abgeschieden werden von größerem spezifischen Gewicht als die Leimlösung, also daß AgBr abgeschieden wird.

Bei Leimtannatlösung habe ich ebenfalls eine ähnliche Ausbreitung von wasserhaltiger Leimlösung *C* an der gemeinsamen Grenzfläche von öltartiger Leimtannatlösung *A* und wasserreicher Leimtannatlösung *B* beschrieben (§§ 97 ff.). Diese Ausbreitung bewirkte auch Zerstörung von Schaumwänden oder Flockung oder Emulsionsbildung. Diese Erscheinungen der Ausbreitung und Flockung waren in voller Übereinstimmung mit den Messungen der Größe der Oberflächenspannung an der Grenze der verschiedenen Flüssigkeiten.

Wir haben also an der Oberfläche der Flocken und Schaumwände von öltartigem wasserarmen Bromsilberleim eine sehr dünne wasserreichere Leimhaut *C* mit geringerem AgBr-gehalt anzunehmen, deren Dicke und Zusammensetzung von der Temperatur und der Dauer des Reifungsprozesses abhängt.

Wenn ferner in Übereinstimmung mit den in § 120 aufgeführten Tatsachen die Löslichkeit des AgBr durch die Gegenwart von Leim befördert wird und kontinuierlich mit der Menge des Leimes wächst, so ist der AgBr-gehalt der Leimhaut *C* um so kleiner, je weniger leimhaltig und je dicker diese Leimhaut ist, sobald deren Dicke kleiner ist, als die doppelte Wirkungsweite der Molekularkräfte. Die dünne Leimhaut wird, indem sie dicker wird, dann eine übersättigte Lösung von AgBr und *bei der Verkleinerung der Oberfläche und Verdickung der Leimhaut C muß AgBr in der Leimhaut ausgeschieden werden*. Diese ausgeschiedenen AgBr-teilchen ohne Leim, von denen jedes einzelne viel kleiner als eine Lichtwelle und unsichtbar ist, werden beim Photographieren vom Licht in Silber und Brom gespalten und bedingen die Lichtempfindlichkeit der photographischen Platten. Die unsichtbaren Silberteilchen bilden das latente Bild.

Für diese Auffassung spricht auch die Tatsache, daß die Bromsilbergelatineplatten mit der Zeit noch empfindlicher werden, indem sich aus der übersättigten AgBr-Lösung, der Leimhaut *C*, allmählich mehr AgBr-Teilchen ausscheiden. Nach M. Wolf¹⁾ nimmt die Empfindlichkeit der Schichten beim Lagern bis zum dreifachen Betrage ihres ursprünglichen Wertes zu und erreicht nach einiger Zeit ein Maximum, auf dem sie sich längere Zeit hält. Später nehmen dann alle Platten wieder periodisch an Empfindlichkeit ab.

Es ist zu erwarten daß durch Temperaturschwankungen innerhalb gewisser Grenzen die Abscheidung der unsichtbaren AgBr-Teilchen vermehrt und damit die Lichtempfindlichkeit der Platten gesteigert werden kann, indem sich an der Oberfläche des ölartigen Bromsilberleims eine neue Haut von wasserreicherem AgBr-Leim bildet, durch neue Flockung oder Verkleinerung der Oberfläche wieder eine übersättigte Lösung von AgBr entsteht und von neuem AgBr-Teilchen an der Oberfläche der Schaumwände abgeschieden werden.

In der Tat wird, wie ich nach dem Niederschreiben der vorstehenden Bemerkung erfahren habe, die Empfindlichkeit der Bromsilbergelatine durch wiederholtes Umschmelzen nach David und Scolick²⁾ gesteigert, wobei eine Temperatur von 55—60° nicht überschritten werden soll.

Nach meinen § 120 beschriebenen Versuchen breitet sich ölartiger Bromsilberleim in dünnen Schichten auf reinem ölartigen Leim *A* aus. Durch Zusatz von konzentrierter Gelatine-lösung zu einer Emulsion von ölartigem Bromsilberleim wird sich der ölartige Leim *A* der Gelatinelösung mit einer dünnen Haut von ölartigem Bromsilberleim überziehen und diesem ölartigen Bromsilberleim eine größere Oberfläche gehen, durch deren Verkleinerung dann wieder eine größere Menge übersättigter Bromsilberlösung *C* oder mehr AgBr-Teilchen entstehen.

Dies erklärt die Beobachtung der praktischen Photographie, daß es vorteilhaft ist (nach David und Scolick) zuerst eine Bromsilberemulsion mit $\frac{1}{10}$ des Gelatinegehaltes herzustellen

1) M. Wolf, Eders Jahrb. f. Photogr. p. 258. 1892.

2) Ludwig David u. Charles Scolick, Die Photographie mit Bromsilbergelatine 1. p. 27, 28, 40. Halle a. S. 1889.

und später die übrigen $\frac{9}{10}$ der harten Gelatine (d. h. solcher, welche nach dem Erkalten rasch erstarrt [l. c. p. 22]), zuzusetzen.

Wenn ferner nach David und Scolick durch Zusatz von Ammoniak oder Alkohol zu der Bromsilbergelatine der Reifungsprozeß befördert und die Lichtempfindlichkeit gesteigert wird, so erklärt sich dies auch durch die oben (§ 121) nachgewiesene Flockung von AgBr-Leim mit Ammoniak oder Alkohol oder die von den Aushreitungsirbeln dieser Flüssigkeiten herbeigeführte Verkleinerung der Oberfläche des öltartigen AgBr-Leimes.

Rudolph Weber¹⁾ hat beim Verkleinern von Wasseroberflächen, welche mit einer sehr dünnen Olhant bekleidet waren, ebenfalls Trübnngen der Ölschicht oder Ausscheidung von Linsen anderer Lichtbrechung beobachtet, wenn die Dicke der Ölschicht größer als $6,23 \times 10^{-6}$ mm wurde.

§ 126. *Die chemische Wirkung des Lichtes.* Wahrscheinlich werden die AgBr-Teilchen in der Leimhaut C um so leichter vom Licht zerlegt, je kleiner sie sind, und zwar aus folgendem Grunde.

Wenn die großen Wellen des Ozeans auf seichteres Wasser kommen und ihre Energie auf eine geringere Wassermenge übertragen, so werden die Wellen höher und branden.

Wenn die Wellen eines Erdbebens nach der Spitze eines Berges fortschreiten und immer weniger Masse von der Wellenbewegung ergriffen wird, so werden die Amplituden der schwingenden Teilchen größer. Die Amplituden sind am größten an der Spitze des Berges. Die Gebände an der Spitze des Berges sind am meisten gefährdet, zerfallen am leichtesten in Trümmern.

In ähnlicher Weise werden auch die Ätherwellen des Lichtes die Bestandteile einer chemischen Verbindung um so schneller in Schwingungen mit großer Amplitude versetzen, je geringer die Masse der Verbindung ist, in welcher die Wellen zusammenlaufen und je mehr die Schwingungsperiode der Ätherteilchen mit der Schwingungsperiode der chemischen Moleküle zusammen stimmt.

Die am Rande der Schaumwände in den Schaumkanten

1) R. Weber, Ann. d. Phys. 4. p. 715. 1901.

der Bromsilbergallerte hängenden winzigen Bromsilberteilen werden in ähnlicher Weise von den Lichtwellen in besonders starke Schwingungen versetzt, wie die Gebäude auf einem Bergrücken durch die Wellen eines Erdbebens.

Das vom Licht abgeschiedene Brom breitet sich nach den oben (§ 121) angeführten Versuchen auf der Oberfläche des Bromsilberleimes *A* aus und wird durch diese Wirkung der Molekularkräfte sofort von dem Silber entfernt, mit dem es verbunden war, sobald es bei genügender Schwingungsamplitude sich außerhalb der Wirkungsweite dieses Silbers befindet.

Das Silber selbst bleibt in der Schaumwand vom Bromsilberleim *A* hängen, bildet das latente Bild und kann bei der Verstärkung der photographischen Platte als Kondensationskern für neu zugeführtes Silber dienen.

Das neu zugeführte Silber stammt bei der physikalischen Verstärkung der photographischen Platten aus einer anderen Flüssigkeit, welche Silber abscheidet, oder bei der gewöhnlichen Entwicklung der Platten aus dem AgBr des ölartigen Bromsilberleimes *A*, aus welchem die Entwicklungsflüssigkeit durch chemische Einwirkung Silber abscheidet. Die Schaumzellen der Körner aus Bromsilberleim scheinen offene Schaumzellen zu sein, da sie nur unbedeutende Formänderungen und Volumenvergrößerungen bei diesem Entwicklungsprozeß zeigen.

Je nach der geringeren oder größeren Konsonanz der erregenden Ätherwellen wird die Amplitude der schwingenden Teilchen des Bromsilbers oder einer anderen chemischen Verbindung langsam oder schnell zunehmen und der Zerfall der chemischen Verbindung nach längerer oder kürzerer Bestrahlung eintreten. Dies erklärt die von Bunsen und Roscoe¹⁾ bei Chlorknallgas eingehend untersuchte *Photochemische Induktion*, ferner die Erscheinung, daß erst bei einer bestimmten Größe von Intensität \times Dauer der Belichtung oder dem sogenannten *Schwellenwert*²⁾ eine chemische Zersetzung eintritt; daß nach Precht³⁾ für schwaches rotes Licht gleichen

1) R. W. Bunsen u. H. E. Roscoe, Pogg. Ann. 117. p. 529. 1862.

2) H. Ebert, Eders Jahrb. 1894. p. 16; J. Precht, Arch. f. wissensch. Photographie p. 189. 1899; K. Schwarzschild, Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne. Publikationen der von Kuffnerschen Sternwarte. V. C. p. 33. Wien 1900.

Schwärzungsgraden um so größere Produkte Lichtstärke \times Belichtungsdauer entsprechen, je geringer die Lichtstärke ist; daß weiter nach Abney ¹⁾ und Englisch ²⁾ für gleiche Lichtintensität dieselbe Schwärzung der Bromsilbergelatineplatte in kürzerer Zeit eintritt, als bei intermittierender Beleuchtung. Es ist dann auch verständlich, daß nach denselben Untersuchungen von Englisch das Verhältnis der Zeiten, welche bei intermittierender und dauernder Belichtung gleiche Schwärzung der Bromsilbergelatineplatten hervorbringen, mit der Wellenlänge des auffallenden Lichtes und der Periode der intermittierenden Belichtung sich ändern. Englisch sieht freilich die Ursache der chemischen Zersetzung nicht in einer Resonanz, sondern in einer Druck- oder Zugkraft der Lichtwellen auf die chemischen Moleküle.

Wenn ich die chemische Wirkung der Lichtwellen als eine Resonanzerscheinung auffasse, so wird diese Ansicht unterstützt durch die Versuche von Champion und Pellet ³⁾, welche an den Saiten einer Bassgeige Stückchen Goldschlägerhaut mit Jodstickstoff befestigten. Der Jodstickstoff explodierte bei dem Anstreichen der Saite, sobald dieselben mehr als 60 Schwingungen in der Sekunde machte. Der Jodstickstoff konnte auch durch die Schallwellen einer 2,4 m entfernten Jodstickstoffexplosion zum Explodieren gebracht werden, wenn die Energie der an ihm brandenden Schallwellen genügend groß war. Schallwellen einer Pulverexplosion brachten Jodstickstoff im Brennpunkt eines Hohlspiegels nicht zum Explodieren, wohl aber die Schallwellen einer Nitroglycerinexplosion. Der Jodstickstoff ist also eine chemische Verbindung, die auf viel langsamere Schwingungen resoniert, als Bromsilber.

§ 127. *Resultate.* 1. Es sind zu unterscheiden die langsame Wirkung des Lichtes auf ölarartigen Bromsilberleim in

1) W. de Abney, Proc. Roy. Soc. 54. p. 143. 1893.

2) E. Englisch, Verhandl. d. Gesellsch. deutsch. Naturforscher, Düsseldorf, 1. p. 171. 1898, u. E. Englisch, Das Schwärzungsgesetz der Bromsilbergelatine. Habilitationsschrift. 8°. p. 13 ff. Stuttgart 1901, wo auch die Literatur über Abhängigkeit der Lichtwirkung von Intensität und Belichtungsdauer zusammengestellt ist.

3) P. Champion u. H. Pellet, Compt. rend. 75. p. 210. 1872.

der ungereiften Bromsilbergelatine, und die schnelle Wirkung des Lichtes auf Bromsilber in der gereiften Bromsilbergelatine.

2. Durch Belichtung scheidet sich aus Bromsilbergelatine öltartiger Bromsilberleim *A* in kugelförmigen Blasen oder in sichtbaren oder unsichtbaren Schaumwänden aus. Aus diesem Bromsilberleim scheidet sich durch Belichtung langsam metallisches Silber ab.

3. Die „Körner“ der gereiften Bromsilbergelatineplatten bestehen aus öltartigem Bromsilberleim und nicht aus Bromsilber.

4. In der ungereiften Bromsilbergelatine ist der öltartige Bromsilberleim *A* mit einer unmerklich dicken Haut *C* von wasserreicherem und bromsilberärmerem Leim überzogen. Die Dicke dieser Haut ist kleiner als die doppelte Wirkungsweite der Molekularkräfte oder $\frac{1}{8}$ Lichtwelle. Bei dem Reifungsprozeß der geschmolzenen Bromsilbergelatine wird die Oberfläche des öltartigen Bromsilberleims *A* kleiner, die Dicke der Leimhaut *C* größer, und diese Leimhaut *C* geht dadurch in eine übersättigte Lösung von Bromsilber über, aus der sich langsam unsichtbare Teilchen von Bromsilber abscheiden und in der Haut *C* hängen bleiben. Beim Erkalten erstarren die Schaumwände von öltartigem Bromsilberleim *A* und die Leimhaut *C* (oder werden sehr klebrige Flüssigkeit).

5. Der Reifungsprozeß der Bromsilbergelatine entspricht der Flockung trüber Lösungen. Die Methoden der praktischen Photographie vergrößern die Empfindlichkeit der gereiften Bromsilbergelatine, indem sie künstlich zuerst eine große Oberfläche des öltartigen Bromsilberleims und eine große Leimhaut *C* schaffen, dann diese Oberfläche durch Ausbreitung einer fremden Flüssigkeit (Brom, Ammoniak, Alkohol u. a.) verkleinern und dadurch viele (unsichtbare) Bromsilberteilchen ausscheiden.

6. Durch Belichten zerfällt des Bromsilber in Brom und Silber. Ersteres breitet sich auf der Oberfläche des öltartigen und erstarrten Bromsilberleimes *A* aus, die metallischen Silberteilchen hängen auf dieser Oberfläche und in der Leimhaut *C* fest, bilden das sogenannte latente Bild und sind die Kondensationskerne, an welche sich durch Kontaktwirkung neue Silberteilchen anlegen, die aus fremder Silber bildender Flüssigkeit

stammen bei der sogenannten physikalischen Verstärkung oder von den Silberteilchen herrühren, die sich aus dem Bromsilber des öartigen Bromsilberleimes durch die „Entwicklung“ der photographischen Platte bilden.

7. Das Nachreifen der Bromsilbergelatineplatten erklärt sich durch allmähliche weitere Abscheidung von Bromsilber aus der übersättigten Bromsilberlösung C.

8. Die photographischen Bromsilbergelatineplatten werden mit der Zeit unempfindlicher, wenn ein Teil des angeschiedenen Bromsilbers sich in der sehr klebrigen öartigen Leimlösung A wieder auflöst, oder wenn die Wände von Bromsilberleim durch starken Wasserverlust verhärten.

9. Die chemische Wirkung des Lichtes auf Bromsilber ist eine Resonanzerscheinung. Die Bromsilberteilchen zerfallen um so eher, je größer die Amplitude der schwingenden Teilchen ist; bei gleicher Energie der Lichtwellen um so eher, je kleiner die Maße der schwingenden Teilchen ist.

10. Mit dieser Auffassung sind in voller Übereinstimmung eine Reihe bekannter Erscheinungen, wie die photochemische Induktion, der Schwellenwert oder die kleinste Belichtung, welche einen Zerfall des Bromsilbers oder eine merkliche Schwärzung bewirkt, die verhältnismäßig geringere Wirkung schwacher Belichtung, die Unterschiede kontinuierlicher und intermittierender Belichtung und die Abhängigkeit der Schwärzung von Periode und Wellenlänge der intermittierenden Belichtung.

Ich möchte auch an dieser Stelle dem früheren und dem jetzigen Assistenten am hiesigen physikalischen Institut, Hrn. Prof. Dr. J. Precht und Hrn. Dr. R. Weber, meinen besten Dank aussprechen für ihre freundliche Mitwirkung bei diesen Untersuchungen.

Heidelberg, den 24. Februar 1903.

(Eingegangen 28. April 1903.)

**11. Die Energieverhältnisse
in oszillatorischen magnetischen Kreisen;
von J. Zenneck.**

In einer früheren Mitteilung¹⁾ habe ich die Analogie, die zwischen elektrischen Wechselstromkreisen und oszillatorischen magnetischen Kreisen besteht, verfolgt. Eine Ausnahme erleidet diese Analogie unter anderem in den Energieverhältnissen.

1.

Im *elektrischen* Wechselstromkreis ist der *Energieverbrauch* pro Sekunde, abgesehen von der Stromstärke i , bestimmt durch den Ohmschen Widerstand und zwar $= w i_{\max}^2 / 2$. Der *Energieumsatz*, d. h. die Energie, welche vom Stromkreis in der Sekunde aufgenommen und wieder abgegeben wird, ist

$$= n \cdot \frac{1}{2} p i_{\max}^2 = \pi n p \cdot \frac{1}{2\pi} i_{\max}^2,$$

also proportional dem induktiven Widerstand $\pi n p$ (n = Wechselzahl).

Im *magnetischen* Kreis liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Der *Energieverbrauch* hängt ab vom *induktiven* magnetischen Widerstand $\pi n p_m$, der *Energieumsatz* vom Ohmschen magnetischen Widerstand w_m bez. w_m' ²⁾ und zwar ist der letztere

$$= w_m \frac{n}{2} \cdot Q_{\max}^2 \quad \text{bez.} \quad w_m' \frac{n}{2} \cdot Q_{\max}^2,$$

während für den Energieverbrauch \mathfrak{Q} pro Sekunde gilt:

$$\mathfrak{Q} = \pi n p_m \cdot \pi n \cdot \frac{Q_{\max}^2}{2} = \pi n p_m \cdot \pi n \cdot Q_{\max}^2.$$

(Q = Induktionsfluß im magnetischen Kreis.)

Mit Hilfe des induktiven magnetischen Widerstandes gewinnt man also für den Energieverbrauch, der durch einen magnetischen oszillatorischen Kreis verursacht wird, einen ebenso einfachen

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 9. p. 497–521. 1902.

2) Über das Verhältnis von w_m und w_m' vgl. l. c. und unten § 2, b.

Ausdruck wie in elektrischen Wechselstromkreisen. Die Berechnung des Energieverbrauchs ist mit den l. c. gegebenen Formeln für den induktiven magnetischen Widerstand unmittelbar möglich.

2.

a) Der *Beweis*, daß die angegebenen Ausdrücke Energieverbrauch bez. Energieumsatz des magnetischen Kreises darstellen, kann für spezielle Fälle¹⁾ *direkt* erbracht werden. Es läßt sich in einfachen Fällen leicht zeigen, daß der Ausdruck

$$\pi n p_m \frac{\pi n}{2} Q_{\max}^2$$

identisch ist mit der Wärmeentwicklung der Ströme, welche durch den betrachteten magnetischen Kreis induziert werden, und deshalb den Energieverbrauch angibt, den der magnetische Kreis in der Sekunde verursacht.

b) Weit allgemeiner kann aber der Beweis *indirekt* geführt werden. Alle Energie, welche der magnetische Kreis und die von ihm induzierten Ströme verbrauchen oder aufnehmen und wieder abgeben, stammt in letzter Linie von dem elektrischen Strom bez. den elektrischen Strömen, von dem bez. denen die magnetomotorische Kraft längs des magnetischen Kreises herrührt. Die Frage nach dem Energieverbrauch bez. Energieumsatz, welchen der magnetische Kreis vermittelt, läßt sich also bis zu einem gewissen Grade ersetzen durch die Frage nach dem Energieverbrauch und Energieumsatz des erregenden Stromes bez. der erregenden Ströme.

Diese Frage soll unter zwei beschränkenden Annahmen behandelt werden:

1. Die äußere magnetomotorische Kraft M längs des magnetischen Kreises soll von einem einzigen Wechselstromkreis i herrühren, der den betrachteten magnetischen Kreis mit N Windungen umgibt:

$$(1) \quad M = \frac{N i}{V}.$$

(V vom Maßsystem abhängige Konstante.)

1) Besonders einfach in den Beispielen l. c. §§ 1—5.

2. Der betrachtete magnetische Kreis soll das gesamte magnetische Feld dieses Wechselstromes ausmachen¹⁾ und konstante Permeabilität besitzen.

In anderer Beziehung werde aber der allgemeinste Fall vorausgesetzt. Es sollen keinerlei Annahmen gemacht werden darüber, wodurch der induktive magnetische Widerstand des magnetischen Kreises veranlaßt ist, ob durch Ströme, die derselbe in einer Spule oder ähnlichem induziert, oder durch Foucaultströme im magnetischen Kreis selbst. Es muß nur möglich sein, die Amplitude des Induktionsflusses und den Phasenwinkel φ zwischen Induktionsfluß und magnetomotorischer Kraft durch die folgenden Beziehungen, durch die man sich $\pi n p_m$ und w'_m definiert denken kann, darzustellen:

$$Q_{\max.} = \frac{M_{\max.}}{\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi n p_m}{w'_m},$$

oder in komplexer Form:

$$(2) \quad Q = \frac{M}{w_m + i \pi n p_m}.$$

Für den erregenden Wechselstrom i gilt

$$(3) \quad E = i w + \frac{N}{V} \cdot \frac{d Q}{d t}$$

(E = äußere elektromotorische Kraft in demselben, w Ohmscher Widerstand).

Wenn man $d Q/d t$ aus Gleichung (2), M aus Gleichung (1) entnimmt und $i \pi n$ gegen $d/d t$ vertauscht, so geht diese Gleichung über in

$$E = i w + \pi n \cdot \frac{\pi n p_m}{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} \cdot \frac{N^2}{V^2} \cdot i + \frac{w'_m}{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} \cdot \frac{N^2}{V^2} \cdot \frac{d i}{d t},$$

1) Der Fall, daß mehrere erregende Ströme derselben Wechselzahl vorhanden sind, ist kaum von Interesse. — Der Fall, daß der betrachtete magnetische Kreis nur einen Teil des magnetischen Feldes des erregenden Stromes ausmacht, läßt sich genau in derselben Weise behandeln.

2) Das ist — konstante Permeabilität auch bei Eisenkernen vorausgesetzt — immer möglich, wenn die induzierten Ströme nicht die Richtung der magnetischen Kraftlinien ändern, d. h. nicht Anlaß zu Drehfeldkomponenten geben.

oder nach Multiplikation mit $i dt$ in

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} E i dt &= i^2 w \cdot dt + \pi n \cdot \frac{\pi n p_m}{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} \cdot \frac{N^2}{V^2} \cdot i^2 dt \\ &\quad + \frac{w_m'}{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} \cdot \frac{N^2}{V^2} i di. \end{aligned} \right.$$

Zu dem Energieverbrauch durch Joulesche Wärme im erregenden Stromkreis selbst ($i^2 w dt$) treten also, durch den magnetischen Kreis veranlaßt, zwei Terme hinzu.

Integriert man über 1 Sek. bez. $n/2$ Perioden, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=1} E i dt &= \frac{w i_{\max}^2}{2} + \pi n p_m \cdot \frac{\pi n}{2} \cdot \frac{N^2}{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} \cdot i_{\max}^2 \\ &= \frac{w i_{\max}^2}{2} + \pi n p_m \cdot \pi n \cdot \frac{Q_{\max}^2}{2} \quad (\text{Gleichung (1) u. (2)}). \end{aligned}$$

Es stellt also

$$\pi n p_m \cdot \frac{\pi n}{2} \cdot Q_{\max}^2$$

den gesamten Energieverbrauch dar, soweit er durch den magnetischen Kreis verursacht ist.

Integriert man über die erste Viertelperiode, von $i = 0$ bis $i = i_{\max}$, so liefert der letzte Term in Gleichung (4) den Beitrag

$$+ \frac{w_m'}{2} \cdot Q_{\max}^2,$$

während der zweiten Viertelperiode den Beitrag

$$- \frac{w_m'}{2} \cdot Q_{\max}^2.$$

$w_m'/2 \cdot Q_{\max}^2$ bedeutet also die gesamte Energiemenge, die der elektrische Kreis an den magnetischen Kreis während einer halben Periode abgibt und von ihm wieder zurückerhält. Der gesamte Energieumsatz pro Sekunde ist also

$$= \frac{n}{2} w_m' Q_{\max}^2.$$

Nun kann das gesamte magnetische Feld zerlegt werden in das magnetische Feld

1. des betrachteten magnetischen Kreises selbst,
2. der von ihm induzierten Ströme, soweit das Feld derselben nicht mit dem betrachteten magnetischen Kreis zusammenfällt.

Die Energie dieser beiden Teilfelder ist in dem Ausdruck

$$\frac{n}{2} \cdot w_m' \cdot Q_{\max}^2.$$

enthalten. Die magnetische Energie, welche der betrachtete magnetische Kreis allein pro Sekunde aufnimmt und wieder abgibt, ist

$$= \frac{n}{2} \cdot w_m \cdot Q_{\max}^2 \quad 1)$$

c) In sehr übersichtlicher Form kann der eben geführte Beweis durch Verwendung von *Vektordiagrammen* erbracht werden.

Das Vektordiagramm für i , Q und die durch Q in dem elektrischen Stromkreis induzierte elektromotorische Kraft E_i ist das nebenstehende. Der Vektor von E_i ist senkrecht auf demjenigen von Q und seine Größe

$$E_{i \max} = \frac{\pi n \cdot N}{V} \cdot Q_{\max}.$$

E_i kann in zwei Komponenten zerlegt werden, eine gegen i um 180° in der Phase verschobene „Wattkomponente“ E_i' und eine gegen i um 90° in der Phase verschobene „wattlose“ Komponente E_i'' (vgl. Fig. 1), und zwar ist

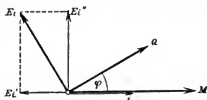


Fig. 1.

$$E_{i' \max} = E_{i \max} \sin \varphi = \pi n \cdot \frac{\pi n p_m}{\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}} \cdot \frac{N}{V} Q_{\max} \quad (\text{Gl. (2)}),$$

$$E_{i'' \max} = E_{i \max} \cos \varphi = \pi n \cdot \frac{w_m'}{\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}} \cdot \frac{N}{V} \cdot Q_{\max}.$$

Nur die erste Komponente liefert einen dauernden Energieverbrauch

$$= E_{i \text{ eff}} \cdot i_{\text{eff}},$$

$$= \pi n \cdot \frac{\pi n p_m}{\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}} \cdot \frac{N}{V} \cdot i_{\text{eff}} \cdot Q_{\text{eff}},$$

$$= \pi n p_m \cdot \pi n \cdot Q_{\text{eff}}^2 \text{ etc.}$$

1) Folgt aus dem allgemeinen Ausdruck für die magnetische Energie im Volumenelement $d\tau = \frac{1}{2} \mu M^2 d\tau$ (μ Permeabilität, M magnetische Feldintensität in $d\tau$). Derselbe kann für den magnetischen Kreis leicht auf die Form $\frac{1}{2} w_m \cdot Q^2$ gebracht werden.

3.

Beispiel: Die Verwendung von Spulenkernen aus dünnen Eisendrähten bei langsamen und schnellen Schwingungen.

In eine zum Ring geschlossene Spule werde ein Kern aus dünnen Eisendrähten gebracht. Untersucht soll werden

1. wie groß die Erhöhung des magnetischen Induktionsflusses durch den Eisenkern,

2. wie groß der Energieverlust durch die Foucaultströme im Eisenkern ist.¹⁾

a) Es bezeichne Q den magnetischen Induktionsfluß, w_m den magnetischen Widerstand im Innern der Spule, wenn ein Eisenkern sich in derselben befindet, Q_0 bez. w_0 dasselbe, wenn der Eisenkern entfernt ist. Dann ist

$$Q_{0 \max.} = \frac{M_{\max.}}{w_0},$$

$$Q_{\max.} = \frac{M_{\max.}}{\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2}} = \frac{M_{\max.}}{w_m \sqrt{\left(\frac{w_m'}{w_m}\right)^2 + \left(\frac{\pi n p_m}{w_m}\right)^2}}.$$

Da

$$\frac{w_0}{w_m} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

ist (μ Permeabilität des Eisens, μ_0 der Luft), so folgt für die Erhöhung des Induktionsflusses durch den Eisenkern:

$$(5a) \quad \frac{Q_{\max.}}{Q_{0 \max.}} = \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w_m'}{w_m}\right)^2 + \left(\frac{\pi n p_m}{w_m}\right)^2}}.$$

Der Energieverbrauch durch Foucaultströme \mathcal{Q}_F ist nach § 1 pro Sekunde

$$\mathcal{Q}_F = \pi n p_m \cdot \pi n \cdot Q_{\text{eff.}}^2,$$

1) Formeln für den Energieverbrauch durch Foucaultströme in Eisendrähten finden sich an den verschiedensten Stellen, z. B. bei A. Oberbeck, Wied. Ann. 21. p. 672 ff. 1884; O. Heaviside, Electrical Papers 1. p. 363. 1892; J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism p. 318 ff. 1893. Das Folgende hat also — abgesehen von der numerischen Berechnung — nur den Zweck, zu zeigen, daß sich jene Formeln aus der Beziehung § 1 für den Energieverbrauch und den früher (l. c. p. 504 ff.) für den induktiven magnetischen Widerstand gegebenen Ausdrücken sehr einfach ableiten lassen.

oder für die Länge 1 cm und den Querschnitt 1 cm² des Eisenkernes

$$(6a) \quad \Omega_F = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\pi n p_m}{w_m} \right) \cdot \pi n Q_{eff}^2,$$

wenn nun auch unter Q der Induktionsfluß durch 1 cm² verstanden wird. Nimmt man an, daß die Spule eine Windung auf 1 cm Länge besitzt, so kann die Beziehung (6a) ersetzt werden durch

$$(7a) \quad \Omega_F = \mu \cdot \frac{\pi n p_m}{w_m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{w_m'}{w_m} \right)^2 + \left(\frac{\pi n p_m}{w_m} \right)^2} \cdot \frac{\pi n}{V^2} \cdot i_{eff}^2.$$

Die Berechnung von w_m'/w_m und $\pi n p_m/w_m$ führt im allgemeinen auf Besselsche Funktionen. In zwei Grenzfällen aber erhält man sehr einfache Formeln.¹⁾

b) Ist

$$(9) \quad x = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\pi n \lambda \mu}{2 V^2}}$$

(r Radius eines Drahtes, λ sein Leitvermögen) so klein, daß $x^4/3$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so wird annähernd

$$\frac{w_m'}{w_m} = 1, \quad \frac{\pi n p_m}{w_m} = x^2 \cdot 2)$$

und

$$(5b) \quad \frac{Q_{max.}}{Q_{0max.}} = \frac{\mu}{\mu_0},$$

$$(6b) \quad \Omega_F = \frac{x^3}{\mu} \cdot \pi n Q_{eff.}^2),$$

$$(7b) \quad = \mu x^3 \cdot \frac{\pi n}{V^2} \cdot i_{eff.}^2.$$

1) Vgl. J. Zenneck, l. c. § 7.

2) Für $x = 0,5$ ist der Fehler, den diese Formeln für w_m'/w_m ergeben = 2 Proz., für $\pi n p_m/w_m = 3$ Proz. (vgl. J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. p. 1135. 1903).

3) Führt man C.G.S.-Einheiten ein, nimmt man das Leitvermögen des Eisens = ca. 10mal größer als dasjenige des Quecksilbers, so wird Gleichung (6b):

$$\begin{aligned} \Omega_F &= r^3 n^3 \pi^3 Q_{max.}^2 \cdot 10^{-3} \text{ C.G.S.} = r^3 n^3 \pi^3 \cdot Q_{max.}^2 \cdot 10^{-10} \text{ Watt} \\ &= \left[\frac{r n B_{max.}}{4 \cdot 10^5} \right]^2 \text{ Watt} \end{aligned}$$

($B_{max.}$ = Maximalzahl der technischen Induktionslinien = $4 \pi Q_{max.}$). Man erhält damit eine bekannte technische Formel für den Energieverlust

Bei den in der Technik üblichen Wechselzahlen gelten diese Formeln für Eisendrähte, deren Radius 0,5 mm nicht merklich überschreitet. Für Kerne aus solchen Drähten gilt also:

Gleichung (5 b): Die Erhöhung des Induktionsflusses hängt nur von der Permeabilität des Kernes ab.

Gleichung (6 b): Bei demselben Induktionsfluß ist der Energieverbrauch durch die Foucaultströme proportional dem Leitvermögen und dem Quadrat der Wechselzahl und des Drahtradius, aber unabhängig von der Permeabilität des Kernes.

Gleichung (7 b): Bei demselben erregenden Strom ist der Energieverbrauch durch die Foucaultströme außerdem noch proportional dem Quadrat der Permeabilität des Kernes. Bei Erhöhung der Permeabilität steigt also der Verbrauch durch die Foucaultströme rascher als die Erhöhung des Induktionsflusses. — Der Energieverbrauch durch Foucaultströme ist um so größer, je größer der Drahtradius ist.

c) Ist κ groß gegen 1, so wird um so genauer, je größer κ ist:

$$\frac{w_m'}{w_m} = \frac{\pi n p_m}{w_m} = \kappa^2$$

und

$$(5c) \quad \frac{Q_{\max}}{Q_{0\max}} = \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{1}{\kappa^2},$$

$$(6c) \quad \Omega_F = \frac{\pi}{\mu} \cdot \pi n Q_{\text{eff}}^2,$$

$$(7c) \quad = \frac{\mu}{\kappa} \cdot \frac{\pi n}{2 l^2} \cdot i_{\text{eff}}^2.$$

Bei schnellen Schwingungen ($n > 10^6/\text{Sec.}$) sind diese Beziehungen brauchbar für Eisendrähte von mittlerer Permeabilität ($\mu/\mu_0 = 100$) bis herab zu einem Radius von $1/10$ mm. Sie sagen aus:

Gleichung (5 c): Die Erhöhung des Induktionsflusses nimmt mit der Permeabilität zu, wenn auch langsam ($\sim \sqrt{\mu}$), hängt

durch Foucaultströme in Transformatorenkernen aus dünnen Eisendrähten, vgl. z. B. C. P. Feldmann, Wirkungsweise, Prüfung und Berechnung der Wechselstrom-Transformatoren, p. 155. Leipzig 1894. (Durchmesser in Millimetern angegeben.)

1) Die Formeln geben für w_m'/w_m erst bei $\kappa = 5$ eine Genauigkeit von 6 Proz., für $\pi n p_m/w_m$ schon bei $\kappa = 1,5$ eine Genauigkeit von 3 Proz. vgl. J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. p. 1135. 1903).

aber außerdem von der Wechselzahl und in hohem Maß vom Drahtradius ab ($\sim 1/r\sqrt{n}$). Mit zunehmender Wechselzahl muß für jeden beliebigen Kern ein Punkt erreicht werden, wo das Einführen des Kernes eine Steigerung des Induktionsflusses überhaupt nicht mehr hervorruft, sondern eventuell denselben sogar herabdrückt.

Gleichung (6c): Bei demselben Induktionsfluß ist nun der Energieverbrauch auch von der Permeabilität abhängig ($\sim 1/\sqrt{\mu}$) und läßt sich durch Verkleinern des Drahtradius nicht mehr in demselben Maße herabdrücken wie bei langsamen Schwingungen.

Gleichung (7c): Bei demselben Strom und derselben Wechselzahl ist der Energieverbrauch durch die Foucaultströme ebenso wie die Erhöhung des Induktionsflusses $\sim \mu/x$. Jede Änderung des Kernes also, — gleichgültig welcher Art sie sei — die den Induktionsfluß steigert, steigert in demselben Maße den Verbrauch durch die Foucaultströme. — Auffallend ist insbesondere das Resultat, daß der Energieverbrauch durch Foucaultströme um so größer wird, je kleiner der Drahtradius ist. Das Verhältnis ist also genau umgekehrt wie bei langsamen Schwingungen.

d) In der drahtlosen Telegraphie kann für ganz spezielle Zwecke möglichst enge Koppelung zwischen zwei Systemen und damit die Verwendung von Kernen aus Eisendrähten in Frage kommen. Ich habe deshalb die oben entwickelten Formeln für eine in der drahtlosen Telegraphie häufig gebrauchte Wechselzahl $n = 3 \cdot 10^6/\text{Sek.}$ — entsprechend einer Viertelwellenlänge von 50 m — numerisch ausgewertet.

Die Werte von x (Gleichung (9), § 3) sind in Tab. I berechnet (C.G.S.-Einheiten).

Tabelle I.

μ ¹⁾	r in mm					
	1	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025
μ_0						
1000	112,2	56,1	28,0	11,2	5,61	2,80
100	35,5	17,7	8,87	3,55	1,77	0,89
10	11,2	5,61	2,80	1,12	0,56	0,28

1) Nach den Angaben in der Literatur scheint die Permeabilität μ/μ_0 von weichen Eisendrähten bei schnellen Schwingungen, deren Wechselzahl von der Größenordnung $10^6/\text{sec}$ ist, in der Nähe von 100 zu liegen.

Tab. II gibt die Erhöhung des Induktionsflusses $Q_{\max.}/Q_{0\max.}$ (Gleichung 5a) durch Einführen des Eisenkernes. Sie fällt, abgesehen von den extrem dünnen Drähten, relativ zur Permeabilität sehr niedrig aus.

Tabelle II.¹⁾

μ μ_0	r in mm					
	1	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025
1000	6,3	12,6	25,2	63	122	241
100	2,0	4,0	8,0	19,2	37,2	73,5
10	0,6 ²⁾	1,2	2,4	5,8	9,4	10

In Tab. III ist der Betrag des Ausdruckes

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\pi n p_m}{w_m} \pi n \cdot 10^{-7}$$

[Gleichung (6a)] in C.G.S.-Einheiten enthalten. Die Zahlen dieser Tabelle zeigen also, in welchem Verhältnis der Energieverlust durch Foucaultströme bei den verschiedenen Draht-dicken für gleichen Induktionsfluß steht.

Tabelle III.

μ μ_0	r in mm					
	1	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025
1000	1,33	0,66	0,33	0,13	0,07	0,03
100	4,10	2,05	1,03	0,41	0,21	0,08
10	13,3	6,7	3,3	1,23	0,36	0,09

Die Zahlen von Tab. IV geben die Größe

$$\mu \cdot \frac{\pi n p_m}{w_m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{w_m}{w_m}\right)^2 + \left(\frac{\pi n p_m}{w_m}\right)^2} \cdot \frac{\pi n}{V^2}$$

(Gleichung (7a), (7b), (7c)) in Ohm. Man kann sich den Energieverlust, der durch die Foucaultströme in dem Eisenkern

1) Die Zahlen dieser und der folgenden Tabellen sind zum großen Teil mit Hilfe der in Ann. d. Phys. 11. p. 1135. 1903 gegebenen Kurven berechnet, da die Näherungsformeln zum Teil nicht zu verwenden sind.

2) Hier ist also der Fall, daß der Eisenkern den Induktionsfluß schwächt, schon erreicht (vgl. c).

pro 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt verursacht wird, dadurch hergestellt denken, daß man den Widerstand jeder Spulenumwicklung um einen gewissen Betrag vermehrt. Den Betrag dieses Zusatzwiderstandes in Ohm gibt Tab. IV an.

Tabelle IV.

μ μ_0	r in mm					
	1	0,5	0,025	0,1	0,05	0,025
1000	0,53	1,06	2,11	5,3	10,0	19,2
100	0,17	0,33	0,67	1,52	2,85	4,4
10	0,053	0,10	0,19	0,41	0,81	0,09

Vergleicht man die Tab. II und IV, so muß man zu dem Resultate kommen, daß die Erhöhung des Induktionsflusses durch einen Eisenkern aus dünnen Eisendrähten unter allen Umständen teuer erkauft ist durch einen relativ bedeutenden Energieverlust und damit eine erhebliche Steigerung der Dämpfung.

e) Für eine Abschätzung, um welche Beträge die angegebenen Zahlen wegen der Hysteresis geändert werden müßten, damit sie die tatsächlichen Verhältnisse richtig wiedergeben, fehlt so gut wie jede Grundlage. Es schien mir deshalb wünschenswert, durch einen *Versuch* festzustellen, wie die Verhältnisse tatsächlich liegen, um so mehr als es nur durch einen Versuch möglich war, das Verhalten von Eisendrähten zu vergleichen mit demjenigen von Eisenpulver, über dessen magnetische Wirkung bei schnellen Schwingungen Hr. Prof. Braun kürzlich¹⁾ einige Erfahrungen mitgeteilt hat.

Ich stellte deshalb fünf möglichst gleiche zylindrische Kerne her (Länge 20 cm, Radius 2 cm) und zwar

- A. aus einem massiven Eisenzylinder,
- B. aus dicken Eisendrähten (Radius = 0,9 mm),
- C. aus mittleren Eisendrähten (Radius = 0,35 mm),
- D. aus dünnen Eisendrähten (Radius = 0,12 mm),
- E. aus Eisenpulver.

Die Eisendrähte waren durch Paraffin voneinander isoliert, das Eisenpulver befand sich lose in einer Glasröhre.

1) F. Braun, Ann. d. Phys. 10. p. 326. 1903.

Um die Erhöhung des magnetischen Induktionsflusses in einer Spule durch diese Kerne kennen zu lernen, bediente ich mich der Anordnung von Fig. 2. C_1 und C_2 sind Leydener Flaschen von 312 bez. 299 cm Kapazität, S_1 und S_2 genau gleiche Spulen von 10 Windungen (Radius der Windung 2,5 cm). U ist ein Umschalter, der es gestattet, das Funkenmikrometer F in Nebenschluß zu S_1 oder S_2 zu legen. In S_1 wurden der Reihe nach die verschiedenen Kerne ge-

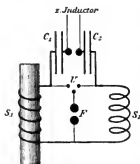


Fig. 2.

bracht. Die Schlagweite des Funkenmikrometers F — d. h. die Entfernung, bis zu welcher die Kugeln genähert werden können, so daß eben keine Funken übergehen — liefert

eine für die vorliegenden Zwecke genügend genaue Maß der Spannungsamplitude, die zwischen den Endpunkten der betreffenden Spule herrscht. Die Spannungsamplitude ist mit großer Annäherung proportional dem Selbstinduktionskoeffizienten der betreffenden Spule, da der Strom in beiden Spulen derselbe ist. Da außerdem die beiden Spulen gleich sind, so folgt aus dem Verhältnis der Schlagweite F_1 — wenn das Funkenmikrometer im Nebenschluß zu S_1 sich befindet — zu der Schlagweite F_2 — wenn das Funkenmikrometer im Nebenschluß zu S_2 ist — unmittelbar das Verhältnis des Induktionsflusses in S_1 zu demjenigen in S_2 , d. h. das Verhältnis des Induktionsflusses mit Kern zu demjenigen ohne Kern.

Die Resultate waren:

Tabelle V.

Kern	A. Massiv	B. Dicker Draht	C. Mittlerer Draht	D. Dünner Draht	E. Pulver
$F_1 : F_2$	0,66	1,31	1,73	1,72	2,76

Der Energieverlust in den verschiedenen Kernen läßt sich durch die Anordnung Fig. 3 bestimmen. H ist ein Hitzdraht-

instrument¹⁾ W ein regulierbarer Kupfersulfatwiderstand, S ein Spulenpaar, von dem durch einen verschiebbaren Bügel beliebig Windungen zu- oder ausgeschaltet werden können. Außerdem befindet sich in der Nähe dieses Kondensatorkreises ein zweiter, auf den der erste in sehr loser Koppelung induziert.

Der Versuch wurde in folgender Weise angestellt.²⁾ Ein Kern wurde in S_1 gebracht, der Kondensatorkreis mit Hülfe von S auf Resonanz mit dem zweiten Kondensatorkreis eingestellt, das Hitzdrahtinstrument abgelesen. Nun wurde der Kern aus S_1 entfernt und mit Hülfe von S wieder dieselbe Wechselzahl

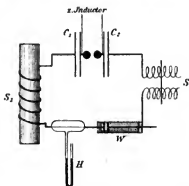


Fig. 3.

hergestellt. Das Hitzdrahtinstrument gab wegen der geringeren Dämpfung³⁾ einen bedeutend höheren Ausschlag. Nun wurde so viel CuSO_4 -Widerstand (w) eingeschaltet, bis das Hitzdrahtinstrument wieder denselben Ausschlag zeigte, wie wenn der Kern in S_1 sich befand; wenn nötig, wurde die Wechselzahl nachreguliert. Es ist also jetzt nicht nur die Wechselzahl und Stromamplitude, sondern auch die Dämpfung dieselbe wie vorher. Die Größe des CuSO_4 -Widerstandes aber, die

1) Riessches Luftthermometer der von F. Braun (Drahtlose Telegraphie durch Wasser und Luft, p. 65. Leipzig 1901) angegebenen Form.

2) Eine andere Anordnung, um ganz qualitativ den Energieverbrauch in Spulenkernen zu demonstrieren, ist von J. J. Thomson (Recent Researches p. 102 ff. Oxford 1893) angegeben worden.

3) Die Angabe eines Hitzdrahtinstrumentes bei gedämpften Schwingungen ist proportional

$$\frac{w' \dot{q}_{\max}^2}{4 \delta \left(1 + \left(\frac{\delta}{\pi n} \right)^2 \right)} = \text{approx.} \frac{w' \dot{q}_{\max}^2}{4 \delta}$$

(w' = Widerstand des Instrumentes für die betreffende Wechselzahl, δ = Dämpfungsfaktor). Sie liefert also bei derselben Amplitude und Wechselzahl ein Maß für die Dämpfung (vgl. V. Bjerknes, Wied. Ann. 44. p. 85. 1891).

nötig war, um diese Dämpfung herzustellen, gibt ein unmittelbares Maß für den Energieverbrauch in dem betreffenden Kern und damit ein äußerst bequemes Mittel, um den Energieverbrauch verschiedener Kerne miteinander zu vergleichen.

Das Ergebnis war:

Tabelle VI.

Kern	A. Massiv	B. Dicker Draht	C. Mittlerer Draht	D. Dünner Draht	E. Pulver
w in Ω	4,5	31	41	55	6

Die Tab. V und VI, soweit sie sich auf Eisendrähte bez. Zylinder beziehen, bestätigen also durchaus die oben entwickelten Beziehungen. Sie zeigen ferner, daß *Kerne aus Eisenpulver sowohl bezüglich der Erhöhung des Induktionsflusses als auch bezüglich des geringen Energieverbrauches Kernen aus Eisendrähten außerordentlich überlegen sind*. Aber sie beweisen auch, daß der Energieverbrauch selbst im Eisenpulver noch so erheblich ist¹⁾, daß die praktische Verwendbarkeit auch dieses Mittels zur Erhöhung des magnetischen Induktionsflusses sehr fragwürdig erscheinen muß.

Am Platze sind aber Spulen mit Eisenkernen da, wo durch dieselben elektromagnetische Schwingungen von Apparaten ferngehalten werden sollen (Galvanometer bei Verwendung von Bolometer oder Thermoelementen — Schutz des Kohärrers gegen Störung durch die übrigen Teile des Empfangsapparates). Hier ist eine starke Absorption nur erwünscht und hier leisten, wie die Erfahrung zeigt, auch Kerne aus Eisendrähten sehr gute Dienste.

Straßburg i. Els., Physikalisches Institut.

1) Der Kern aus Eisenpulver brachte die Dämpfung in dem Kondensatorkreis auf den 1,4 fachen Betrag. Die Energieabsorption war ziemlich genau doppelt so groß, wie wenn der Kern aus maximal leitender Schwefelsäure bestand.

(Eingegangen 2. April 1903.)

12. *Elektrischer und magnetischer Widerstand bei Schwingungen; von J. Zenneck.*

Beim Arbeiten mit elektrischen Schwingungen stößt man immer wieder auf die Aufgabe, den Ohmschen Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten bez. induktiven Widerstand von Drähten berechnen zu müssen. Unter gewissen Bedingungen ist diese Aufgabe sehr einfach zu lösen, dann nämlich, wenn die Näherungsformeln, die unter dem Namen der Rayleighschen bez. Stefanschen Formeln bekannt sind, genügende Genauigkeit liefern. Ist das nicht der Fall, so führt die Aufgabe bekanntlich auf die Summierung der Reihen für die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung Null und zwar für komplexe Argumente. Dann kann die Berechnung sehr mühsam werden. Von Tabellen, durch die man dieser Aufgabe enthoben wäre, existiert, soweit mir bekannt ist, nur eine für den Ohmschen Widerstand: diejenige, welche Lord Kelvin¹⁾ in seinen *Mathematical and physical papers* nach Berechnungen von M. Maclean veröffentlicht hat.

Auf magnetischem Gebiet gelangt man bei der Berechnung des Ohmschen und induktiven magnetischen Widerstandes²⁾ von Metallzylindern bez. Drähten für oszillatorische Felder auf genau dieselben Formeln wie bei der entsprechenden elektrischen Aufgabe. Während aber im elektrischen Fall der genaue Wert des Selbstinduktionskoeffizienten relativ geringe Bedeutung hat, da der aus reiner Oberflächenströmung berechnete gewöhnlich ausreicht, so ist auf magnetischem Gebiet die Berechnung des induktiven magnetischen Widerstandes genau ebenso wichtig, wie diejenige des Ohmschen.

Um ein für allemal diese Aufgabe zu erledigen, habe ich mir Kurven gezeichnet, die ich im folgenden mitteile. Es

1) W. Thomson, *Mathematical and physical papers* 3. p. 493. 1890. Für ein beschränktes Gebiet finden sich ausgerechnete Werte bei J. J. Thomson, *Recent Researches etc.* p. 295 f. 1893.

2) Daß diese für manche Fälle zum mindesten sehr bequeme Hilfsgrößen darstellen, habe ich früher gezeigt. Vgl. *Ann. d. Phys.* 9. p. 497. 1902; 10. p. 845. 1903; 11. p. 1121. 1903.

ist aus ihnen der Wert des Ohmschen und induktiven elektrischen und magnetischen Widerstandes für Schwingungen unmittelbar zu entnehmen, wenn man den Ohmschen Widerstand für stationären Zustand kennt.

1.

Die Benutzung der Kurven setzt voraus, daß man die Größe

$$x = r \sqrt{\frac{\pi n \lambda \mu}{8 V^2}} = r \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \pi n \lambda \mu}{2 \mu_0}} \text{ (C.G.S.-Einheiten)}$$

kennt. Darin bedeutet:

r = Radius des Drahtes.

λ = Leitvermögen des Drahtes,

μ = Permeabilität des Drahtes,

μ_0 = " " der Luft,

n = Wechselzahl der Schwingung,

V = vom Maßsystem abhängige Konstante.

Der Einfluß von Radius und Wechselzahl wird isoliert, wenn man schreibt:

$$x = r \sqrt{n \cdot f}.$$

Die Konstante f hängt nur vom Material des Drahtes bez. Zylinders ab und ist in der folgenden Tabelle für die gebräuchlichsten Materialien berechnet.

Material	$\lambda : \lambda_{Hg}^1)$	$\mu : \mu_0$	f
Eisen	8	3000	1,12
"	8	1000	0,648
"	8	300	0,355
"	8	100	0,214
Kupfer	55	1	0,0537
Messing	12	1	0,0251
Platin	6,5	1	0,0185
Neusilber	4	1	0,0145
Nickelin	2,3	1	0,0110
Manganin	2,2	1	0,0107
Constantan	1,9	1	0,0100

1) λ_{Hg} bedeutet Leitvermögen des Quecksilbers. Die Werte für das Leitvermögen der verschiedenen Materialien wurden der praktischen Physik von F. Kohlrausch entnommen und sind zum Teil Mittelwerte.

2.

Es sei:

w elektrischer } Ohmscher Widerstand für stationären Zustand,
 w_m magnetischer }
 w' elektrischer } Ohmscher Widerstand für die betreffende Schwingung ¹⁾,
 w'_m magnetischer }
 p' elektrischer Selbstinduktionskoeffizient für die betreffende Schwingung,
 p_0 elektrischer Selbstinduktionskoeffizient, soweit er von dem magnetischen
 Feld außerhalb des Drahtes herrührt ²⁾,
 p_m magnetischer Selbstinduktionskoeffizient.

Dann gilt allgemein und streng ³⁾ für eine ungedämpfte ⁴⁾ sinusförmige Schwingung der Wechselzahl n

$$(1) \quad \left\{ \frac{\frac{w' + i \pi n (p' - p_0)}{w}}{\frac{w'_m + i \pi n p_m}{w_m}} \right\} = 4 i x^2 \left[\frac{J_0(x)}{x J'_0(x)} \right]_{x = i \sqrt{-8} i},$$

worin $i = \sqrt{-1}$ und $J_0(x)$ die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung Null, $J'_0(x)$ deren Differentialquotienten nach x bedeutet.

Ist $x < 1$, so wird annähernd

$$\left\{ \frac{\frac{w'}{w}}{\frac{w'_m}{w_m}} \right\} = 1 + \frac{x^4}{3} \dots,$$

$$\left\{ \frac{\frac{\pi n (p' - p_0)}{w}}{\frac{\pi n p_m}{w_m}} \right\} = x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \dots \right),$$

1) \equiv „effektiver“ Widerstand nach der Bezeichnung von Lord Kelvin, l. c.

2) Identisch mit dem aus reiner Oberflächenströmung berechneten Selbstinduktionskoeffizienten.

3) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 357 ff.

4) Der Einfluß einer Dämpfung ist aus E. H. Barton, Phil. Mag. (5) 47. p. 433. 1899 zu entnehmen.

und für so kleines x , daß $x^4/3$ gegen 1 vernachlässigt werden kann

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{w'}{w} \\ \frac{w_m'}{w_m} \\ \frac{\pi n (p' - p_0)}{w} \\ \frac{\pi n p_m}{w_m} \end{array} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi n (p' - p_0)}{w} \\ \frac{\pi n p_m}{w_m} \end{array} \right\} = x^2.$$

Im entgegengesetzten Grenzfall, wenn x groß ist gegen 1, wird annähernd

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{w'}{w} = \frac{\pi n (p' - p_0)}{w} \\ \frac{w_m'}{w_m} = \frac{\pi n p_m}{w_m} \end{array} \right\} = x.$$

3.

In den *Kurven*, Figg. 1—4, sind als Abszissen die Werte von x , als Ordinaten der Kurve *A* die Werte von w'/w bez.

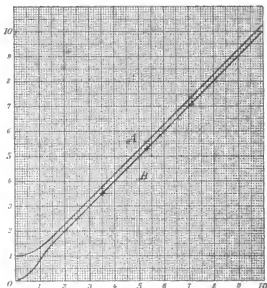


Fig. 1.

w_m'/w_m , als Ordinaten der Kurve $B^1)$ die Werte von $\pi n(p' - p_0)/w$ bez. $\pi n p_m/w_m$ aufgetragen. Die tatsächlich berechneten Punkte der Kurven sind durch Kreuze²⁾, die der zitierten Tabelle von Lord Kelvin entnommen durch kleine Kreise markiert.

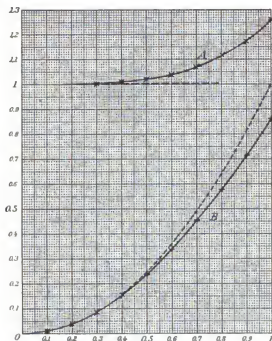


Fig. 2.

Fig. 1 zeigt den allgemeinen Verlauf der Kurven für κ von 0 bis 10; in Figg. 2, 3 und 4 sind die Kurven für κ von 0 bis 1, 1 bis 2 und 2 bis 3 in vergrößertem Maßstab wiedergegeben.

1) Für die Berechnung der Kurve B in dem Gebiete $\kappa > 1$ wurden die von Lord Kelvin l. c. angegebenen Hilfsfunktionen $\text{ber } q$, $\text{bei } q$, $\text{ber}' q$, $\text{bei}' q$ ($q = \kappa \sqrt{8}$) benutzt. Es ist ohne Schwierigkeit zu beweisen, daß die Kurve B aus diesen Hilfsfunktionen durch die Beziehung

$$\frac{\pi n(p' - p)}{w} = \frac{\pi n p_m}{w_m} = \frac{q}{2} \cdot \frac{\text{ber } q \cdot \text{ber}' q + \text{bei } q \cdot \text{bei}' q}{\text{ber}^2 q + \text{bei}^2 q}$$

abgeleitet werden kann.

2) In Fig. 1 nur die Werte für $\kappa > 3$.

Die gestrichelte Kurve in Fig. 2 stellt die durch die Näherungsformeln Gleichung (2), die strichpunktierte Gerade in Fig. 3 u. 4 die durch die Näherungsformeln Gleichung (3)

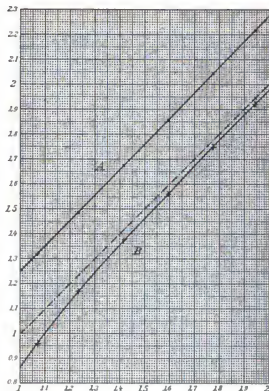


Fig. 3.

gegebenen Werte dar. Aus einem Vergleich dieser Kurven mit den Kurven *A* und *B* ist unmittelbar zu entnehmen, welche Genauigkeit in jedem einzelnen Falle diesen Näherungsformeln zukommt.

4.

Die Kurven *A* und *B* verlaufen zwischen $x = 1,5$ und $x = 10$ beinahe genau linear. Berechnet man die Gleichungen

der Geraden, welche sich den Kurven *A* und *B* am besten anschmiegen, so erhält man:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{w'}{w} = \frac{w'_m}{w_m} = 0,997 x + 0,277, \\ \frac{\pi n (p' - p_0)}{w} = \frac{\pi n p_m}{w_m} = 1,007 x - 0,040. \end{cases}$$

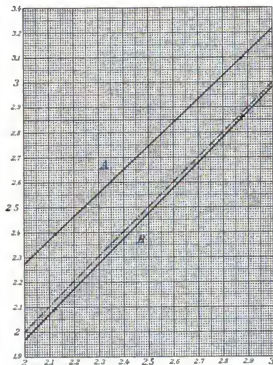


Fig. 4.

Die erste dieser Gleichungen gibt noch für $x = 1$ eine Genauigkeit von ca. 1 Proz., noch für $x = 0,9$ eine Genauigkeit von ca. 8 Proz. Diese Gleichungen stellen also Näherungsformeln dar für den größten Teil desjenigen Gebietes, in welchem die Näherungsformeln Gleichungen (2) und (3) keine genügende Genauigkeit liefern.

Straßburg i. Els., Physik. Institut.

(Eingegangen 2. April 1903.)

13. Bemerkungen über die Schmidtsche Theorie der Phosphoremanation; von Carl Barus.

1. Die schönen Versuche, welche Hr. G. C. Schmidt¹⁾ mitgeteilt hat, lassen sich leicht so wiederholen, daß man Phosphorscheibchen zwischen Drahtnetzstreifen gepreßt, isoliert und horizontal aufstellt. Nähert man dann dem Phosphor horizontal eine geriebene Siegellackstange, so sieht man, wie die Teilchen an der einen Seite den Kraftlinien zufolge sich auf den Siegellack stürzen, nach der anderen Seite aber alsbald vom Drahtnetz weggetrieben werden. Beiderseits liegen die Dunstfäden in einer Ebene. Sowohl der Gang positiver wie negativer Ladung wird offenbart, und was besonders auffällt, ist die Geschwindigkeit v , mit welcher sich die Fäden vorwärts bewegen. Bedenkt man, daß für ein einzelnes Teilchen von der Ladung e und dem Radius R , das sich im Kraftfeld F durch Luft von der Zähigkeit μ bewegt, die Gleichung $v = e F / 6 \pi \mu R$ erfüllt sein muß, so kommt man zu dem Schluß, daß es sich hier um relativ außerordentliche Kraftäußerungen handeln müßte. Die Erscheinung verläuft aber so, als wenn an den diametral gegenüberstehenden Teilen der Dunstwolke ein negativer Druck anhaftete.

2. Die Theorie des Hrn. Schmidt veranlaßt mich, insofern sie sich auf meine Versuche bezieht, zu folgenden Äußerungen: Ich habe mich bei meiner quantitativen Bearbeitung des Gegenstandes²⁾ keiner reinen Elektronentheorie bedient. Ich habe allerdings oft berechnet, was vorliegen würde, wenn jedes Teilchen mit einem Elektron geladen wäre; doch das ist etwas anderes. Ich nenne die Teilchen ziemlich konsequenterweise, „Nuklei“. Wird ein koaxialer Zylinderkondensator vorausgesetzt (Länge l , Radien r_1, r_2 , effektive Kapazität C , radialer Potentialunterschied E), so gilt bei meinen Versuchen die allgemeine Gleichung

$$C \cdot \frac{dE}{dt} = \frac{16,7 n_0 e V}{1 + k / U E (r_2 - r_1)^{-1}} (1 - e^{-0,377 l (r_1 + r_2) (k + U E) (r_2 - r_1) / V}),$$

wo n_0 die Anzahl der eintretenden Partikelchen pro Kubikzentimeter, V die Geschwindigkeit des tragenden Luftstromes in Liter pro Minute bedeuten. Ferner ist U die Geschwindig-

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 10. p. 704. 1903.

2) C. Barus, Smithsonian Contributions to knowledge Nr. 1309. 1901; Nr. 1373. 1903.

keit der Partikelchen mit der Ladung e , im Kraftfeld Eins, k (Absorptionsgeschwindigkeit) die Geschwindigkeit in einer gegebenen Richtung im Kraftfeld Null. Die Wichtigkeit des k beweist der Dampfstrahl oder die Kondensationskammer.

Bei Phosphor ist nun k groß gegen $UE/(r_2 - r_1)$, und es kommt ein dem Ohmschen ähnlicher Gesetz zu stande. Bei Wassernuklei ist k relativ klein und man erhält bei großem E konstante Ströme von letzterer Größe unabhängig. Bei Phosphor schätze ich die Anzahl der Teilchen unmittelbar an der Phosphorfläche auf 10^6 pro Kubikzentimeter. Bei Wassernuklei kann die Zahl im Fall äußerst kräftiger Zerstäubung verdünnter Lösungen nicht weit über 10^4 hinausgetrieben werden. Die Ladungen der Teilchen verhalten sich etwa im umgekehrten Verhältnis.

3. Die Eigengeschwindigkeit der Teilchen denke ich mir so bedingt, daß dieselben einerseits zu klein sind, um symmetrischen Molekularstoß zu empfangen, andererseits nicht klein genug, um auf diese Weise die gewöhnliche Ordnung der Molekulargeschwindigkeiten zu erreichen.

4. Den Ursprung der Ladung der Phosphorteilchen (man wird sie doch wohl schlechtweg Ionisation nennen müssen) stelle ich mir als Verlauf einer Massenwirkung dar: Bei der Oxydation des Phosphors bildet sich ein Produkt, das bei überschüssigem Phosphor stabil, bei überschüssiger Luft dagegen instabil ist. Während das Oxyd von der Phosphorfläche fortwandert, zerfällt es, und daher rühren die in gleicher Anzahl vorhandenen positiven und negativen Ionen. Man darf daher nicht überrascht sein, wenn das Kraftfeld die Ionen nicht wegschaffen kann.

Analoge Erscheinungen mögen hier Platz finden. Aus staubfreier feuchter Luft bekommt man durch mäßige plötzliche Abkühlung bekanntlich keine Kondensation. Das Gleiche gilt für staubfreies feuchtes Leuchtgas. Mischt man aber beide Gase, so wird die Kondensation kurz nach der Mischung beträchtlich (etwa 2500 Nuklei pro Kubikzentimeter). Es haben sich Nuklei durch chemische Reaktion gebildet.¹⁾ Ionisation kann man hier nicht nachweisen. Schichtet man Leuchtgas vorsichtig über Luft, so kann man den Verlauf der Diffusion an der Grenzfläche durch Kondensation der vorhandenen Feuchtigkeit beobachten. Desgleichen wenn man schwere Dämpfe wie Benzol

1) Wahrscheinlich schwefelhaltiger Natur. So erzeugt z. B. Schwefelkohlenstoff an einer Luftgrenze ohne weiteres Kondensationskerne.

in staubhaltiger Luft nach oben diffundieren läßt, eine Erscheinung, die ich anfangs irrtümlich als Diffusion der Nuklei selber angesehen habe.

5. Wichtig für die Erscheinung ist das Verschwinden der Ionisation. Leitet man die Luft über Phosphor direkt in den geladenen Kondensator, so bekommt man verhältnismäßig kräftige Ströme. Führt man aber die geladene Luft erst durch eine große Flasche oder dergleichen, und dann in den Kondensator, so verschwinden die Ströme im letzteren bis auf wenige Prozente. Die Anzahl der Partikelchen ist, wie man durch Kondensation nachweisen kann, in beiden Fällen nahezu dieselbe.

Das Gleiche ergibt sich auch für Wassernuklei, wo die Ladung ebenfalls positiv und negativ, aber nicht symmetrisch vorhanden ist und fast vollständig verschwindet, während sich die Anzahl der Teilchen nahezu konstant erhalten hat. Im wesentlichen hat dies ja schon längst Lenard gefunden.

6. Übrigens wird die Luft nicht dadurch leitend, daß man leitende Partikelchen hinein gibt. Hypothesen über die Art der Leitung von Partikelchen zu Partikelchen ergeben sich als erste Bedingung der Schmidtschen Theorie. Am einfachsten kommt man wohl hier zum Ziel, wenn man zugibt, der ganze Raum innerhalb der Wolke sei ionisiert, denn jede Theorie muß sich bis auf verschwindende Kraftfelder kontinuierlich erstrecken. Man müßte wenigstens zum Stoß der Partikelchen Zuflucht nehmen. Daß die beobachteten beträchtlichen Geschwindigkeiten ihre Entstehung lediglich der Inhomogenität des Kraftfeldes verdanken können, scheint mir ausgeschlossen. [Bei der konzentrierten Schwefelsäure ist z. B. die Abgabe der jedenfalls leitenden Nuklei etwa ebenso kräftig wie bei Phosphor, und dennoch zeigt die umgebende Luft vorzügliche Nichtleitung. Anmerkung bei der Korrektur.]

Providence, U.S.A., Brown University.

(Eingegangen 30. April 1903.)

Berichtigungen

zu der Arbeit W. Schwarze, Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit von Argon und Helium. Bd. 11. p. 803. 1903.

Seite 303, 328, 329 lies Conrau statt Conran.

„ 304, Zeile 18 von oben lies Gasmenge.

„ 325, „ 13 von unten lies 0 = 16 statt 0 = 10.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



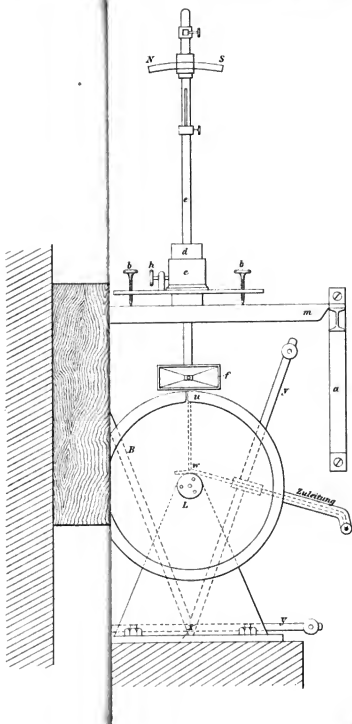


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

1. Nicolage.

2. Nicolage.

2. Nicolage mit Gypskeil.

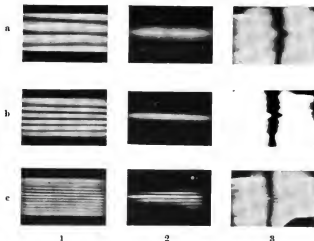


Fig. 4.

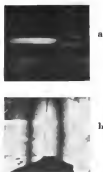
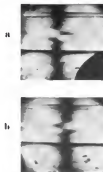
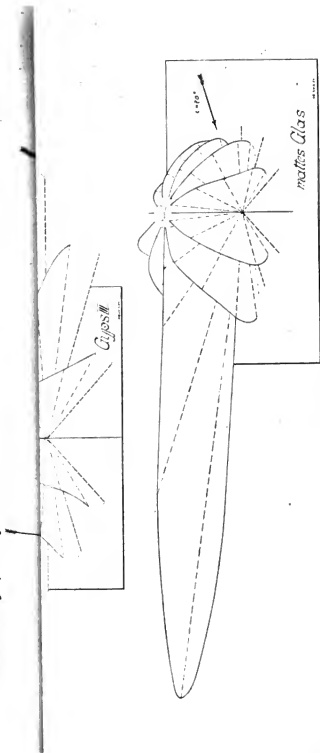


Fig. 5.







F. Thaler.



14 DAY USE
RETURN TO DESK FROM WHICH BORROWED
LOAN DEPT.

This book is due on the last date stamped below, or
on the date to which renewed.
Renewed books are subject to immediate recall.

REC'D LD JAN 29 '68 - 11 PM

FEB 19 1970 **FEB 18 1984** 7 6

RECEIVED rec'd circ. FEB 28 1983

FEB 14 70 - 12 PM
SEP 30 1994

~~LOAN DEPT.~~

JUL 8 1975

REC. CIR. JUN 10 '75

OCT 25 1979

Nov. 25 '79

Dec 25 '79

SEP 23 '94

REC'D

MAY 27 1979

LD 21A-45m-9, '67
(H5067a10)476B

General Library
University of California
Berkeley

66-8 AM
LD 21-5m-1, '39(7058a7)

U. C. BERKELEY LIBRARIES



CD47834829

Q51
A52
V. 31E
117540

